УДК 336.763

Адаптивное управление риском позиции на основе фьючерсных контрактов

Аннотация. *Страхование или хеджирование позиции является одной из основных задач портфельного менеджмента. Традиционный метод оценки оптимального числа фьючерсных контрактов предполагает оценку регрессии изменения цены спот на изменения фьючерсной цены [1, 4, 6].*

В статье рассматривается динамическое страхование открытой позиции фьючерсными контрактами с учетом неоднородности изменений цен как по уровню, так и по дисперсии. При этом нестационарность корреляционной связи точно так же принимается во внимание. Для прогноза волатильности цен используется простая модель динамики изменений, основанная на экспоненциальном сглаживании, которая позволяет прогнозировать ожидаемую доходность и волатильность временных рядов.

Ключевые слова: *экспоненциальное сглаживание; фьючерсные контракты; коэффициент хеджирования; динамическое страхование позиции.*

Abstract. *Insurance or hedging a position is one of the main tasks of portfolio management. The traditional method for estimating the optimal number of futures contracts involves an assessment of the regression of price changes on the spot futures price [1, 4, 6]. In this paper we consider the dynamic insurance of open positions in futures contracts, taking into account heterogeneity of price changes in both level and dispersion. Nonstationarity of correlation is also taken into account. A simple model of the dynamics of changes based on exponential smoothing used for forecasting allows predicting the expected return and volatility of time series.*

Keywords: *exponential smoothing; futures contracts; hedge ratio; dynamic insurance of a position.*

Калинин А. Т.,
студент магистратуры
Финансового университета
✉ andrey.kalinin.mail@gmail.com

1. Модель динамики волатильности

Экспоненциальное среднее временного ряда *x* можно определить равенством [3, 5]:

$$E(t) = x(t) + x(t-1) + \beta^2 x(t-2) + \beta^3 x(t-3) + \cdots.$$

Здесь S(*t*) — значение экспоненциальной средней в момент времени *t*, α — параметр сглаживания, $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1 - \alpha$. В этой формуле предполагается, что исходный временной ряд определен для всех моментов времени, предшествующих текущему моменту *t*. При этом веса $\omega_i = \alpha\beta^i$ экспоненциально спадают до нуля, и их сумма равна единице. Экспоненциальное среднее можно также определить рекуррентно согласно формуле:

$$E(t) = \alpha x(t) + \beta E(t-1), \ \ \beta = 1 - \alpha \qquad (1)$$

Чем ниже значение α, тем меньший вес придается текущей цене и тем сильнее эффект сглаживания. В техническом анализе вместо вещественного параметра α используется временное окно w — целочисленный параметр, определяемый из равенства $\alpha = 2/(w+1)$. В дальнейшем экспоненциальное среднее временного ряда *x* в момент времени *t* с окном *w* обозначается через *E (t; w, x)*. В этом обозначении часть аргументов может отсутствовать, если это не вызывает недоразумений. Экспоненциальное сглаживание предполагает задание начальной оценки *S* (0), то есть оценки экспоненциальной средней на нулевой момент времени. Обычно в качестве такой оценки используют среднее арифметическое первых *w* значений временного ряда (*w* — размер временного окна).

Рассмотрим следующую модель временного ряда, учитывающую неоднородность по уровню и дисперсии:

$$x(t) = E(t; x, w_1) + e(t), \ \ e^2(t) = E(t; e^2, w_2) + \varepsilon(t), \ (2)$$

здесь: *x*(*t*) — абсолютные или относительные изменения цен; случайная величина *e*(*t*) имеет нулевое среднее и ди-

Научный руководитель: ***Керимов А.К.,*** *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Финансового университета.*

сперсию, вообще говоря, зависящую от времени t; остатки $\varepsilon(t)$ имеют нулевое среднее и постоянную дисперсию; w_1, w_2 ε параметры модели, подлежащие оценке.

Уравнения (2) можно представить в более наглядной форме, позволяющей определить прогнозы на один шаг вперед уровня исходного ряда x и его дисперсии. Используя равенство (1), получим:

$$x(t)=\alpha_1 x(t)+\beta_1 E(t-1;x,w_1)+e(t).$$

Откуда легко получаем равенство:

$x(t) = E(t-1; x, w_1) + e(t)/\beta_1$.

Заменяя t на t+1, последнее равенство перепишем в виде:

$$x(t+1)=E(t;x,w_1)+ \\ +\frac{e(t+1)}{\beta_1}=\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_1\beta_1^i+\frac{e(t+1)}{\beta_1}. \quad (3)$$

Последнее равенство показывает, что динамика исходного ряда представляется авторегрессией бесконечного порядка с коэффициентами, зависящими от окна w_1. Точно так же показывается, что второе уравнение системы (2) можно представить в виде:

$$e^2(t+1)=E(t;e^2,w_2)+\frac{e(t+1)}{\beta_2}= \\ =\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_2\beta_2^i+\frac{\varepsilon(t+1)}{\beta_2}. \quad (4)$$

Таким образом, уравнения (2) эквивалентны уравнениям (3) и (4).

Прогноз случайной величины $x(t + 1)$, сделанный в текущий момент времени t, определяется как условное математическое ожидание этой случайной величины при условии, что вся предыстория процесса известна вплоть до текущего момента, то есть известны все значения $x(s)$ для $s \le t$. Из представления (3) следует, что прогноз $x_f(t + 1)$ значения ряда x на один шаг вперед определяется равенством:

$$x_f(t+1)=M\{x(t+1)\,|\,x(s),s\le t\ \textit{известны}\}= \\ =E(t;w_1,x), \quad (5)$$

поскольку по условию случайная величина $e(t)$ имеет нулевое математическое ожидание.

Из равенства (4), в силу предположения на остатки $\varepsilon(t)$, следует, что условное математическое ожидание $e^2(t + 1)$ совпадает с $E(t; w_2, e^2)$, то есть:

$$M_t\{e^2(t+1)\}=(E(t;w_2,e^2),$$

(индекс t означает, что рассматривается условное математическое ожидание). Поскольку среднее случайной величины $\varepsilon(t + 1)$ равно нулю, то отсюда следует, что прогнозы дисперсии и стандартного отклонения на один шаг вперед определяются равенствами:

$$D_f(t+1)=EMA(T;w_2,e^2), \\ \sigma_f(t+1)=\sqrt{EMA(T;w_2,e^2)}. \quad (6)$$

2. Оценка параметров

Опишем метод оценки параметров w_1, w_2 модели (3), (4) по эмпирическим ценовым данным $p(t)$, $1 \le t \le T$. Для заданных w_1, w_2 проводится следующая последовательность вычислений. Ряд x определяется как абсолютные или относительные изменения ценовых данных, то есть:

$$(t)=\nabla p(t)=p(t)-p(t-1)\ \textit{или} \\ x(t)=\nabla p(t)/p(t-1).$$

Для заданных значений окон w_1, w_2 прогнозы уровня и стандартного отклонения изменений определяются согласно алгоритму:

а) вычислить квадраты отклонения доходностей от их среднего уровня согласно формуле:

$$e^2(t)=(x(t)-EMA(t;w_1,x))^2,$$

б) в качестве оценки дисперсии доходностей принимается экспоненциальное среднее отклонений e^2 с параметром сглаживания w_2, то есть полагается:

$$\sigma^2(t)=EMA(t;w_2,e^2).$$

В результате получаем ряд $\sigma(t)$, t = 2,3, ...,T, $\sigma(t)$ — это оценка стандартного отклонения на момент времени t. Прогнозы ожидаемого значения ряда x и его стандартного отклонения на один шаг вперед, сделанные в момент t, определяются равенствами (6).

Окна сглаживания w_1, w_2 можно выбирать из условия, что все значения x(t) лежат в коридоре:

$$[x_f(t+1)-2\sigma_f(t+1),x_f(t+1)+2\sigma_f(t+1)], \\ t=2,3,\ldots T.$$

Периодически по мере поступления новых данных значения окон переоцениваются.

Проверка адекватности модели исходным данным заключается в проверке гипотез относительно остатков $e^2(t)$ и $\varepsilon(t)$, которые определяются равенствами (2). В частности, остатки должны удовлетворять условиям белого шума. Проверка этой гипотезы осуществляется стандартными методами.

Прогнозирование на основе экспоненциального сглаживания — простая и достаточно эффективная процедура, особенно в случае, когда неоднородности по среднему или дисперсии не слишком резкие. При возникновении скачка в ценах, а следовательно, и в изменениях цены оценки прогнозов довольно быстро адаптируются к новому уровню.

Пример 1. Динамика цен закрытия вместе с динамикой прогнозов волатильности на основе модели (2) приведена на *рис. 1*. Исходными данными являются ежедневные цены закрытия акций в период 29.12.11–01.06.12 (всего 101 отсчет). Выбранная модель характеризуется окнами $w_1 = 18$, $w_2 = 22$. Штриховые линии определяют прогнозную верхнюю и нижнюю границу коридора. Верхняя граница определяется равенством $x(t + 1) + 2\sigma_f(t + 1)$, нижняя — $x_f(t + 1) - 2\sigma_f(t + 1)$. Сплошная тонкая линия представляет относительные изменения цены, сплошная жирная линия — прогнозы относительных изменений цен на один шаг вперед. Из рисунка видно, что практически все изменения цен (96%) лежат в пределах установленных границ.

3. Оценка корреляции на основе экспоненциального сглаживания

В общем случае ковариация или корреляция между относительными изменениями доходностей двух различных активов заметно меняется во времени. Динамика корреляционной связи между относительными изменениями цен и фьючерсных контрактов на них, как правило, довольно высокая, порядка 0,6–0,7 в начале эмиссии серии фьючерсных контрактов, и растет по мере приближения к дате исполнения. За месяц до исполнения уровень корреляции имеет порядок 0,85–0,9 (см. *рис. 2*).

Ниже приводится краткое описание модификации известной схемы адаптивной оценки корреляции на основе экспоненциального сглаживания, приведенное, например, в работе [3]. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — значения абсолютных или относительных изменений цен для $t = 2, \ldots, T$. Задача заключается в получении прогноза ковариации и корреляции на момент времени t+1, по ценовым данным, известным до текущего момента t. Вначале методом, изложенным в предыдущем разделе, оцениваются средние уровни и стандартные отклонения этих временных рядов, тем самым окна (w_{x1}, w_{x2}) и (w_{y1}, w_{y2}), по которым определяются эти величины, можно считать известными. В случае относительных изменений цен спот и фьючерсных цен эти пары окон, как правило, совпадают в силу их сильной корреляции. Далее определяется временной ряд s^2:

$$s^2(t) = \left(x(t) - m_x(t)\right)\left(y(t) - m_y(t)\right),$$

где

$$m_x(t) = EMA\left(t; w_{x1}, x\right), \quad m_y(t) = EMA\left(t; w_{y1}, y\right) —$$

средние временных рядов x и y на момент времени t соответственно. В качестве оценки ковариации на текущий момент времени принимается скользящее среднее ряда s^2:

$$Cov\left\{x(t), y(t)\right\} = EMA\left(t; w, s^2\right).$$

Параметр сглаживания w в этой формуле полагается равным максимуму из окон w_{x2}, w_{y2}. Уровень корреляции на текущий момент времени оценивается по формуле:

$$Corr\left\{x(t), y(t)\right\} = \frac{Cov\left\{x(t), y(t)\right\}}{{}_x(t)_y(t)},$$

где $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$ — оценки стандартных отклонений рядов $x(t)$ и $y(t)$ соответственно на момент времени t, полученные методом предыдущего раздела. Прогнозы ковариации и корреляции на следующий момент времени определяется равенствами:

$$Cov_f(t+1) = EMA\left(t; w\ \ , s^2\right),$$
$$Corr_f(t+1) = \sqrt{EMA\left(t; w\ \ , s^2\right)}\ .$$

Пример 2. Динамика корреляционной связи между относительными изменениями цен акций ОАО «Газпром» и фьючерсных контрактов на них в интервале 22.01.12 — 30.04.12 показана на *рис. 2*. Окна сглаживания, по которым оценивалась корреляция, равны $w_1 = 18$, $w_2 = 22$. Как видно из рисунка, уровень корреляции в целом довольно высокий и в то же время заметно растет по мере приближения к дате исполнения фьючерсного контракта.

4. Оптимальное число фьючерсных контрактов

Рассмотрим портфель, содержащий Q_s единиц определенного актива (длинная позиция) и k фьючерсных контрактов на этот актив, при этом каждый контракт содержит q_f единиц базового актива. Обозначим через $S(t)$ и $F(t)$ – цену спот и фьючерсную цену (в денежном выражении) на момент времени t. Изменение стоимости портфеля за единицу времени представляется в виде:

$$\nabla W(t+1) = \nabla S(t+1) Q_s + k \nabla F(t+1) q_f, \qquad (7)$$

где через $\nabla W(t)$, $\nabla S(t)$, $\nabla F(t)$ – обозначают абсолютные изменения соответствующих величин за единицу времени, то есть:

$$\nabla W(t+1) = P(t+1) - P(t),\ \nabla S(t+1) =$$
$$= S(t+1) - S(t),\ \ \nabla F(t+1) = F(t+1) - F(t).$$

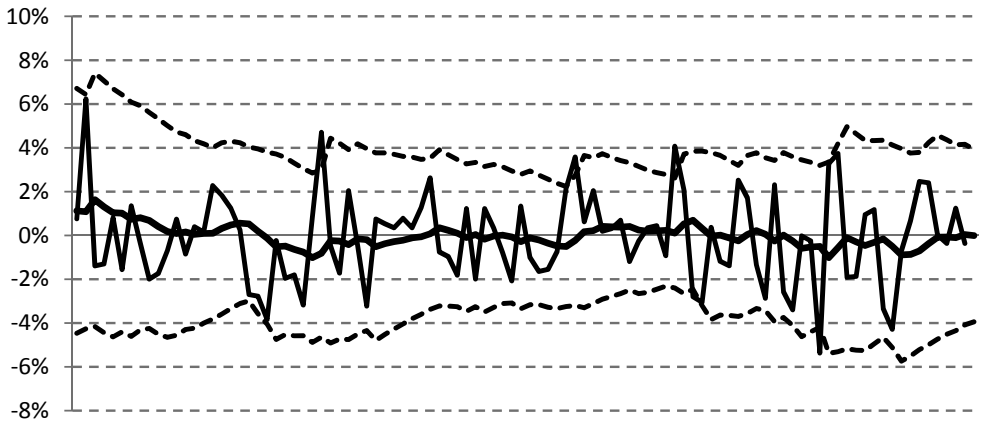

Рис. 1. ***Прогнозы и доверительный коридор изменений цен в пределах 96%***

Обычно, если не оговорено противное, в качестве единицы измерения времени выбираются сутки. Отметим, что вероятностные характеристики изменения рассматриваемых величин меняются во времени. В дальнейшем прогнозы вероятностных характеристик рассматриваемых случайных величин:

$$\nabla W(t+1), \quad \nabla S(t+1), \quad \nabla F(t+1),$$

сделанные в момент времени *t*, определяются при условии, что история цен спот и фьючерсных цен известна вплоть до этого момента времени. Соответствующие прогнозы снабжаются индексом *t*. Например, через $M_t(\nabla S)$ обозначается условное математическое ожидание случайной величины $\nabla S(t+1)$, которое интерпретируется как прогноз изменения цены, сделанный в момент *t*. Из равенства (7) следует, что:

$$M_t(\nabla W) = M_t(\nabla S)Q_s + kq_f M(\nabla \mathrm{F}) \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} D_t(\nabla W) &= Q_s^2 D_t(\nabla S) + k^2 q_f^2 D_t(\nabla F) + \\ &+ 2Cov_t(Q_s \nabla S, kq_f \nabla F) = \\ &= Q_s^2 D_t(\nabla S) + k^2 q_f^2 D_t(\nabla F) + \\ &+ 2kQ_s q_f Cov_t(\nabla S, \nabla F). \end{aligned} \qquad (9)$$

Задача страхования заключается в определении числа фьючерсных контрактов *k* в портфеле таким образом, чтобы изменчивость стоимости портфеля была минимальной, то есть *k* следует выбирать из условия минимума дисперсии случайной величины ∇W. Выражение для дисперсии (9) представляет квадратный трехчлен относительно *k*, минимум которого достигается при:

$$k_0 = -\frac{Q_s Cov_t(\nabla S, \nabla F)}{q_f D_t(\nabla F)} = -\frac{\beta Q_s}{q_f},$$
$$\beta = \frac{Cov_t(\nabla S, \nabla F)}{D_t(\nabla F)}. \qquad (10)$$

Поскольку число контрактов — целое число, полученное значение k_0 необходимо округлить до целого

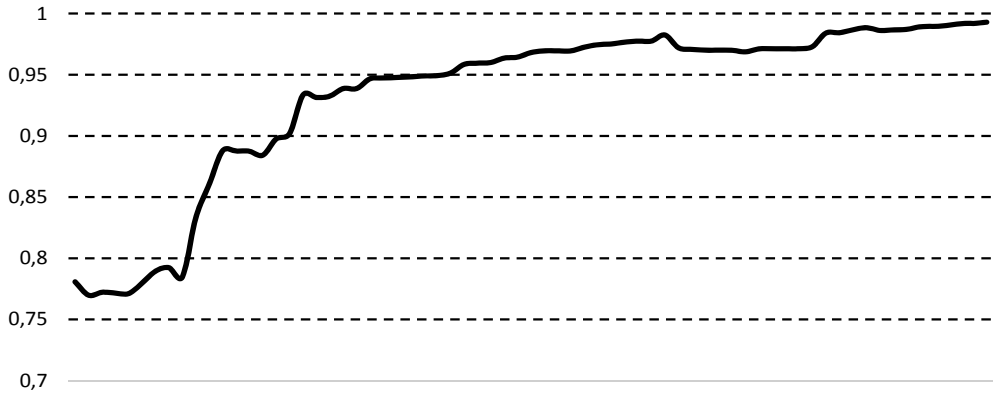

Рис. 2. ***Динамика корреляций между относительными изменениями цен акций ОАО «Газпром» и фьючерсных контрактов серии SPFB.GAZR-12.12***

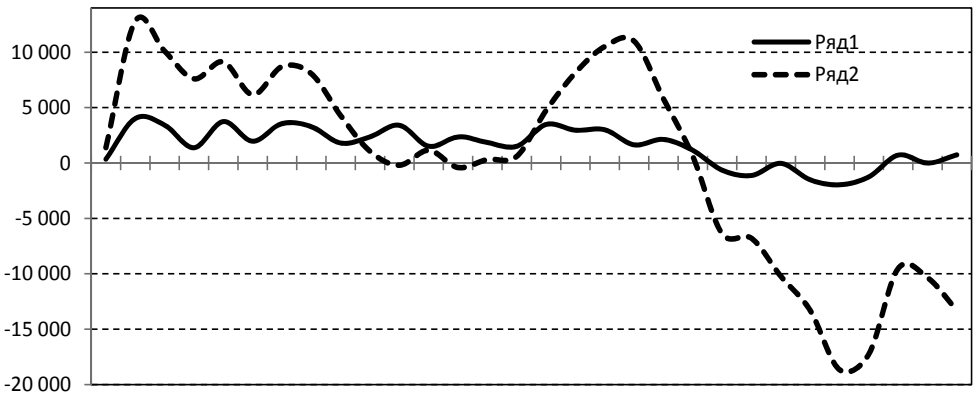

Рис. 3. ***Динамика изменений стоимости портфеля при динамическом страховании (ряд 1) и незастрахованной позиции (ряд 2)***

числа. Минимальное значение дисперсии получается подстановкой в равенство (9) найденного значения k_0. Знак минус перед k_0 показывает, что страхователь должен занять противоположные позиции по хеджируемому активу и фьючерсным контрактам.

Представление для коэффициента хеджирования (10) полностью совпадает с традиционным, однако при выводе не требуется никаких предположений об однородности временных рядов изменений цен спот и фьючерс. При этом ожидаемые значения изменений интерпретируются как прогнозы изменений, а дисперсии — как характеристики ошибки прогноза на будущий период. Эти величины оцениваются в текущий момент времени по известным на этот момент истории цен методом, изложенным выше. По мере поступления данных прогнозы и их дисперсии корректируются.

5. Динамическое управление риском портфеля

Пусть t — текущий момент времени. Состояние портфеля на текущий момент определяется парой (Q_s, k), где $Q_s > 0$ — количество базового актива (предполагается постоянным), $k = k(t-1)$ определено в предыдущем $t-1$ периоде. Задача заключается в определении числа фьючерсных контрактов $k = k(t)$ на текущий момент времени. При этом предполагается, что на этот момент времени известна вся информация о спотовых и фьючерсных ценах на рассматриваемый актив. Управление риском позиции отождествляется с выбором количества фьючерсных контрактов $k = k(t)$ на основе доступной текущей информации о ценах с целью уменьшения риска и получения (по возможности) дополнительного дохода. Ниже приводится схема адаптивного управления риском портфеля на основе прогнозов дисперсии изменений цен и ковариации между изменениями цен спотовых и фьючерсных цен.

1. На текущий момент времени получить прогнозы дисперсии изменений фьючерсной цены и уровень ковариации $Cov_t(\nabla S, \nabla F)$ на следующий момент времени $t + 1$.

2. Определить коэффициент хеджирования и оптимальное число фьючерсных контрактов согласно формулам (10).

Пример 3. Для оценки эффективности страхования использовались ежедневные данные по спотовым и фьючерсным ценам по акциям ОАО «Газпром» на интервале 11.01.2012–19.02.2012 г. [7]. Исходная позиция содержит 1000 акций (Q_s = 1000). На *рис. 3* сплошной линией (ряд 1) — результат изменения стоимости портфеля (Q_s = 1000, k) относительно начальной даты при адаптивном управлении риском. Штриховая линия (ряд 2) представляет незастрахованную позицию, то есть изменение стоимости 1000 акций. Из графика видно, что незастрахованная позиция к моменту t = 19.02.12 приведет к потере около 13 000 руб. Динамическое страхование приводит к потерям за весь период страхования не более 2000 руб.; при этом к концу рассматриваемого интервала доход составит около 800 руб. Из сравнения этих графиков видно, что динамическое страхование эффективно снижает риск больших потерь. Однако оно не приводит к существенному доходу.

Литература

1. Буренин А.М. Хеджирование фьючерсным контрактами фондовой биржи РТС. М.: НТО им. С.И. Вавилова, 2008.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и управление. М.: Мир, 1974.
3. Керимов А.К. Методы анализа и прогнозирования ценовых данных. М.: РУДН, 2003.
4. Керимов А.К. Финансовые фьючерсные контракты. М.: Финансовый Университет, 2013.
5. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. М.: Статистика, 1981.
6. Халл Дж.К. Опционы, фьючерсы и другие финансовые инструменты. М: Вильямс, 2010.
7. Сайт фондовой биржи РТС. URL: http://www.rts.ru/ (дата обращения: 05.06.2015).