

УДК 51

Оценка внутридневной волатильности российских и американских фондовых активов на основе цены открытия, максимума, минимума и цены закрытия



**Иванова
Евгения Анатольевна,**
студентка магистратуры
Финансового университета
✉ evgeniya.ivanova@rambler.ru

Аннотация. Работа посвящена вопросам оценки дневной волатильности активов фондового рынка. Величина дневной волатильности лежит в основе многих моделей, в том числе популярных моделей семейства GARCH, различных стохастических моделей, поэтому вопрос нахождения наилучшей оценки дневной волатильности на базе публично доступной информации сто-

ит остро. В работе, наряду с классическими оценками (high/low, close/open), рассматриваются оценки Паркинсона, Гармана-Класса, Роджерса-Сатчелла, Мейлийсона, выведенные аналитически и являющиеся функцией от цены открытия, ценового максимума, ценового минимума и цены закрытия (OHLC). На основе тиковых данных двенадцати акций российского фондового рынка и двух акций американского фондового рынка и при помощи регрессионного анализа определена мера соответствия OHLC-оценок реальным значениям дневной и внутридневной волатильности. Соответствующая мера определяется коэффициентом детерминации линейной регрессии, в которой объясняемой переменной выступают фактические значения дневной волатильности, а объясняющей – соответствующая OHLC-оценка. В работе показано, что существующие оценки плохо описывают поведение активов российского фондового рынка, в то время как волатильность активов американского рынка описывается гораздо лучше. В работе поставлена проблема нахождения альтернативной OHLC-оценки, способной объяснить реальные изменения дневной и внутридневной волатильности доходности российского фондового рынка.

Ключевые слова: дневная волатильность; внутридневная волатильность; OHLC-оценка волатильности; оценка Паркинсона; оценка Гармана-Класса; оценка Роджерса-Сатчелла; оценка Мейлийсона.

Abstract. The paper examines the problem of security volatility estimation. Daily volatility is a component of many models, such as widely popular GARCH models and various stochastic volatility models, therefore the issue of finding the best daily volatility estimator based on easily accessible data is an acute problem. Aside from the classical estimators like high/low and close/open the high-low-open-close estimators suggested by Parkinson, Garman and Klass, Rogers and Satchell, Meilijson are examined. Based on the historical tick data of twelve Russian stock market and two American stock market securities and using regression analysis the descriptive power of daily and intraday high-low-open-close volatility estimators is evaluated. The measure of quality is defined as the coefficient of determination of the linear regression, where the real historical data is a dependent variable, and the respective high-low-open-close estimator is an explanatory variable. The paper shows that (intra-) daily volatility of Russian stock market securities is poorly explained by existing high-low-open-close estimator, while the opposite for the

Научный руководитель: **Путко Б.А.**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика».

American stock market securities. The problem of an alternative high-low-open-close estimator for Russian market equities is stated.

Keywords: *daily volatility; intraday volatility; high-low-open-close volatility estimators; Parkinson estimator; Garman-Klass estimator; Rogers-Satchell estimator; Meilijson estimator.*

Оценка дневной волатильности стала доступнее

Вопросам оценки и моделирования волатильности активов фондового рынка посвящен широкий пласт теоретических и практических исследований. Живой интерес к данной теме продиктован естественным желанием текущих и потенциальных инвесторов максимально точно оценить и спрогнозировать свои риски при открытии или удержании позиции по некоторому активу. К сожалению, отсутствие или неполнота доступной информации способны свести на нет преимущества, получаемые при использовании наиболее сложных и продвинутых моделей, оперирующих величинами дневной волатильности.

Как правило, на основании публично доступной информации о ценах закрытия некоторого актива за определенный период в качестве оценки волатильности за данный период принимают величину стандартного отклонения соответствующих дневных доходностей. Полученная оценка волатильности — это некоторое среднее значение для рассматриваемого периода. При этом надо понимать, что реальная волатильность актива менялась изо дня в день на протяжении всего исследуемого периода, но ограниченность информации сделала дневную волатильность ненаблюдаемой величиной.

Величина дневной волатильности лежит в основе многих моделей, в том числе популярных моделей семейства *GARCH*, поэтому вопрос нахождения наилучшей оценки дневной волатильности на базе доступной информации встает достаточно остро. На практике выдвигается предположение о том, что средняя дневная доходность актива равна нулю, и дневная волатильность доходности актива, таким образом, определяется, как квадрат дневной доходности. На базе полученной таким образом (и, очевидно, очень грубой) оценки далее применяется механизм построения модели *GARCH*. Естественно, ошибка, возникшая при оценке дневной волатильности, переносится и на всю модель,

что может повлечь неадекватную оценку рисков и некачественные прогнозы.

Благодаря качественным изменениям в повышении доступности информации, произошедшим за последние 20 лет, в том числе: развитие и популяризация сети Интернет, появление веб-сайтов бирж и инвестиционных компаний, а также основание компаний типа *Bloomberg*, распространяющих среди пользователей или подписчиков высокочастотные данные о торгах, — оценка дневной волатильности стала доступнее. Обладая высокочастотными данными (тиками), инвестор способен явно оценивать внутридневную волатильность любого актива.

Разумеется, работа с тиковыми данными связана с серьезными ограничениями. Во-первых, аренда терминала *Bloomberg* является весьма дорогим удовольствием.

Во-вторых, речь идет о хранении огромного блока данных, вследствие чего та же компания *Bloomberg* ограничивает период, в течение которого база хранит тиковые данные, 150 днями.

В-третьих, как правило, компании, обладающие подобной родо информацией, практикуют ограничения объемов выгружаемых данных или времени доступа к ним. Например, портал *finam.ru* позволяет выгружать тиковые данные сразу за несколько дней только с 18:00 до 10:00. В остальное время пользователь вынужден осуществлять выгрузку за каждый отдельный день вручную. Процесс утомителен и требует больших временных затрат. В свою очередь, компания *Bloomberg* при превышении лимита по объемам скаченной информации также ограничивает действия пользователя, которому, в конечном счете, остается только выгружать данные вручную за каждый день.

Наконец, обработка соответствующих объемов данных также требует больших мощностей и определенных навыков у конечного пользователя. Когда речь идет об анализе информации за несколько сотен дней, 8 000 тиков в каждом, стандартные инструменты типа *Excel* оказываются медлительными, склонными к «зависани-

ям», ненадежными или просто не рассчитанными на работу с такими объемами данных.

Перечисленные выше ограничения, связанные с использованием тиковых данных, побуждают к использованию оценок внутрисуточной волатильности, рассчитываемых на основе легкодоступной ежедневной информации о торгах – цены открытия (O), цены закрытия (C), ценового максимума (H) и минимума (L).

Оценки дневной волатильности на основе информации о ценах открытия, закрытия, максимуме и минимуме

Допустим, что ценовой процесс некоторого актива, обозначаемый P_t , следует геометрическому броуновскому движению, причем $\ln P_t$ в течение дня следует броуновскому движению с нулевым смещением и диффузией σ .

Далее введем следующие обозначения:

- O_t – цена открытия;
- C_t – цена закрытия;
- H_t – максимальная цена за день;
- L_t – минимальная цена за день.

В качестве безусловной оценки дневной волатильности σ^2 обычно применяется величина

$$\hat{\sigma}_0^2 = \left[\ln \left(\frac{C_t}{C_{t-1}} \right) \right]^2.$$

Оценка $\hat{\sigma}_0^2$ является весьма грубой оценкой фактической дневной волатильности σ^2 , она не учитывает дополнительную доступную информацию о максимуме и минимуме цены в течение дня и цену открытия.

В 1980 г. Паркинсон предложил другую асимптотически безусловную оценку, образованную на базе значений H и L , следующего вида [1]:

$$\hat{\sigma}_{Parkinson_intraday}^2 = \frac{1}{4 \ln 2} \left[\ln \left(\frac{H_t}{L_t} \right) \right]^2.$$

Важно отметить, что оценка Паркинсона сконструирована, по сути, для внутрисуточной волатильности. Принципиально то, что эта оценка не учитывает «прыжка» между ценой закрытия предыдущего дня C_{t-1} и ценой открытия следующего дня O_t . Другими словами, оценка

Паркинсона может считаться оценкой квадрата дневной волатильности только в предположении, что торговля активом продолжается на протяжении всего дня, т.е. $C_{t-1} = O_t$.

В том же году Гарман и Класс сформулировали собственную оценку параметра σ^2 [2]. Идея Гармана и Класса состоит в аналитическом поиске безусловной оценки с минимальной вариацией. В целях упрощения расчетов авторы полагают, что актив торгуется в течение всего дня. В результате авторы приходят к следующему виду оценки квадрата внутрисуточной волатильности:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{Garman-Klass_intraday}^2 &= \\ &= 0,511 * \left[\ln \left(\frac{H_t}{L_t} \right) \right]^2 - 0,019 * \\ &* \left[\ln \left(\frac{C_t}{O_t} \right) * \left\{ \ln(H_t) + \ln(L_t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \ln(O_t) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln \left(\frac{H_t}{O_t} \right) \ln \left(\frac{L_t}{O_t} \right) \right] - \\ &\quad - 0,383 * \left[\ln \left(\frac{C_t}{O_t} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Снимая допущение о непрерывности торгов, Гарман и Класс получают оценку квадрата дневной волатильности вида:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{Garman-Klass}^2 &= a_{GK} * \frac{\hat{\sigma}_{Garman-Klass_intraday}^2}{1-f} + \\ &+ (1-a_{GK}) * \frac{\left[\ln \left(\frac{O_t}{C_{t-1}} \right) \right]^2}{f}, \end{aligned}$$

где $f \in (0,1)$ – часть дня, в течение которого торги закрыты. Справочно отметим, что работа московской биржи в режиме основных торгов продолжается с 9:45 до 18:50, что означает $f_{MMBB} \approx 0,38$. Американская фондовая биржа AMEX работает с 9:30 до 16:00, $f_{AMEX} \approx 0,27$.

Коэффициенты $a_{GK} = 0,88$ и $1-a_{GK} = 0,12$ Гарман и Класс определяют аналитически при условии минимизации вариации оценки $\hat{\sigma}_{Garman-Klass}^2$.

Гарман и Класс также модифицируют внутрисуточную оценку Паркинсона, учитывая в ней

влияние «скачка» и таким образом получая выражение для дневной волатильности:

$$\hat{\sigma}_{Parkinson}^2 = a_p * \frac{\left[\ln\left(\frac{H_t}{L_t}\right) \right]^2}{4 \ln 2 (1-f)} + (1-a_p) * \frac{\left[\ln\left(\frac{O_t}{C_{t-1}}\right) \right]^2}{f}.$$

Коэффициенты $a_p = 0,83$ и $1-a_p = 0,17$ Гарман и Класс также определяют аналитически при условии минимизации вариации оценки $\hat{\sigma}_{Parkinson}^2$.

Позднее Роджерс и Сатчелл [3] построили следующую оценку квадрата внутридневной волатильности:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{Rogers-Satchell_intraday}^2 &= \\ &= \ln\left(\frac{H_t}{O_t}\right) \ln\left(\frac{H_t}{C_t}\right) + \ln\left(\frac{L_t}{O_t}\right) \ln\left(\frac{L_t}{C_t}\right). \end{aligned}$$

Переход от внутридневной к дневной волатильности, учитывающей «скачок» открытия торгов, можно осуществить по аналогии с тем, как это проделали Гарман и Класс:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{Rogers-Satchell}^2 &= \\ &= a_{RS} * \frac{\hat{\sigma}_{Rogers-Satchell_intraday}^2}{1-f} + \\ &+ (1-a_{RS}) * \frac{\left[\ln\left(\frac{O_t}{C_{t-1}}\right) \right]^2}{f}. \end{aligned}$$

В 2009 г. Мейлийсон была сформулирована новая оценка квадрата внутридневной волатильности, обладающая минимальной вариацией [4].

$$\hat{\sigma}_{Meilijson_intraday}^2$$

$$= 0,27352 * \sigma_1^2 + 0,160358 * \sigma_2^2 + 0,365212 * \sigma_3^2 + 0,20091 * \sigma_4^2,$$

где $\sigma_1^2 = 2 \left[(h' - c')^2 + l'^2 \right];$

$$\sigma_2^2 = c'^2;$$

$$\sigma_3^2 = 2(h' - c' - l')c';$$

$$\sigma_4^2 = -\frac{(h' - c')l'}{2 \log 2 - 1,25};$$

$$\ln\left(\frac{C_t}{O_t}\right) > 0 : c' = \ln\left(\frac{C_t}{O_t}\right), h' = \ln\left(\frac{H_t}{O_t}\right), l' = \ln\left(\frac{L_t}{O_t}\right);$$

$$\ln\left(\frac{C_t}{O_t}\right) < 0 : c' = -\ln\left(\frac{C_t}{O_t}\right), h' = -\ln\left(\frac{L_t}{O_t}\right), l' = -\ln\left(\frac{H_t}{O_t}\right).$$

Внутридневную оценку Мейлийсона можно также перевести в дневную, следуя логике Гармана и Класса. Тогда оценка квадрата дневной волатильности примет вид:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{Meilijson}^2 &= a_M * \frac{\hat{\sigma}_{Meilijson_intraday}^2}{1-f} + \\ &+ (1-a_M) * \frac{\left[\ln\left(\frac{O_t}{C_{t-1}}\right) \right]^2}{f}. \end{aligned}$$

Апробация оценок на реальных данных

Важно подчеркнуть, что приведенные выше модели носят теоретический характер: они построены на предположении об определенном характере поведения цены актива, а оценки коэффициентов моделей получены на основе аналитических выкладок. В идеальном мире, в рамках сделанных допущений, эти оценки обладают минимальной вариацией. Однако встает вопрос, могут ли эти модели успешно применяться в реальном мире, например, для оценки дневной и внутридневной вариации лог-доходностей акций российского фондового рынка.

В целях апробации моделей были использованы тиковые данные за период 03.08.2015–30.12.2015 включительно для следующих активов российского фондового рынка (далее согласно тиккерам): *AFLT, AKRN, DIXY, GAZP, HYDR, IRAO, LKOH, MAGN, MGNT, MSNG, MTLR, SBER*. Выгрузка осуществлялась с портала Финам [5]. Также модели прошли апробацию на тиковых данных двух ценных бумагах американского фондового рынка – *AAPL, GOOGL*, период исследования 30.09.2015–24.12.2015, источник выгрузки – *Bloomberg* [6].

Для каждого актива строились регрессии следующего вида:

$$1) \sigma_{intraday}^2 = \alpha_{0,X_i} + \alpha_{1,X_i} \hat{\sigma}_{X_intraday}^2 + \varepsilon_{X_i};$$

$$2) \sigma^2 = \alpha_{0,X} + \alpha_X \hat{\sigma}_X^2 + \varepsilon_X;$$

где $\hat{\sigma}_{intraday}^2$ – внутридневная дисперсия логарифмических доходностей исследуемого актива; σ^2 – дневная дисперсия логарифмических доходностей исследуемого актива, т.е. дисперсия, рассчитанная для доходностей внутри дня и доходности, полученной при открытии торгов относительно цены закрытия предыдущего торгового дня; α_{0,X_i} и $\alpha_{0,X}$ – свободные члены моделей; $\hat{\sigma}_{X_intraday}^2$ и $\hat{\sigma}_X^2$ – описанные во втором разделе оценки квадрата внутридневной и дневной волатильности соответственно; α_{1,X_i} и α_X – коэффициенты регрессии при соответствующих оценках; ε_{X_i} и ε_X – ошибки регрессионных моделей.

В качестве показателя качества той или иной оценки применялся коэффициент детерминации построенной регрессии.

Результирующие коэффициенты детерминации построенных регрессий для фактических внутридневных данных российского и американского фондовых рынков содержатся в табл. 1.

Из данных табл. 1 видно, что по принципу максимального коэффициента детерминации лучшей является оценка Роджерса-Сатчелла (8 из 14 случаев). Однако это лучшая оценка из худших. Очевидно, что для российских акций, за исключением DIXY, ни одна из существующих

оценок не годится для описания внутридневной волатильности. Гораздо лучше ситуация обстоит у представителей американского рынка: максимальные коэффициенты детерминации для AAPL и GOOGL достигают 58%, т.е. качество соответствующих оценок можно классифицировать как приемлемое.

Далее рассмотрим, насколько хорошо исследуемые оценки позволяют описать дисперсию доходностей с учетом эффекта скачка при переходе от цены закрытия предшествующего торгового дня к цене открытия текущего.

Переход от внутридневных к дневным оценкам Паркинсона, Гармана-Класса, Роджерса-Сатчелла и Мейлийсона осуществим по формулам из второго раздела.

В свою очередь, вместо внутридневной оценки $\left[\ln\left(\frac{C_t}{O_t}\right) \right]^2$ воспользуемся дневной оценкой вида $\hat{\sigma}_0^2 = \left[\ln\left(\frac{C_t}{C_{t-1}}\right) \right]^2$.

Зададим коэффициенты a_p, a_{GK}, a_{RS}, a_M значениями, которые максимизируют коэффициенты детерминации моделей. Решение не фиксиро-

Таблица 1

Оценки внутридневной дисперсии. Коэффициенты детерминации регрессионных моделей

Актив	$\left[\ln\left(\frac{C_t}{O_t}\right) \right]^2$	$\hat{\sigma}_{GK_intraday}^2$	$\hat{\sigma}_{RS_intraday}^2$	$\hat{\sigma}_{M_intraday}^2$
AFLT*	0,00	0,08	0,12	0,09
AKRN	0,00	0,19	0,18	0,19
DIXY**	0,00	0,56	0,63	0,55
GAZP	0,02	0,03	0,02	0,02
HYDR	0,01	0,04	0,09	0,05
IRAO	0,02	0,19	0,17	0,20
LKOH	0,00	0,10	0,13	0,11
MAGN	0,03	0,07	0,08	0,08
MGNT	0,02	0,00	0,02	0,01
MSNG	0,04	0,24	0,22	0,23
MTLR	0,01	0,11	0,13	0,11
SBER	0,01	0,03	0,04	0,03
AAPL	0,03	0,57	0,58	0,58
GOOGL	0,33	0,50	0,34	0,51

* AFLT – выколота точка 15.12.2015; ** DIXY – выколота точка 21.10.2015. Выделены наибольшие показатели в строках.

Оценки дневной дисперсии. Коэффициенты детерминации регрессионных моделей

Актив	$\hat{\sigma}_0^2$	$\hat{\sigma}_{GK}^2$	$\hat{\sigma}_{RS}^2$	$\hat{\sigma}_M^2$
AFLT*	0,00	0,08	0,11	0,09
AKRN	0,00	0,19	0,18	0,19
DIXY**	0,00	0,55	0,63	0,54
GAZP	0,03	0,14	0,14	0,13
HYDR	0,01	0,13	0,17	0,14
IRAO	0,03	0,31	0,29	0,32
LKOH	0,00	0,17	0,19	0,17
MAGN	0,01	0,14	0,14	0,15
MGNT	0,01	0,11	0,11	0,11
MSNG	0,08	0,22	0,20	0,21
MTLR	0,02	0,13	0,15	0,13
SBER	0,00	0,56	0,30	0,57
AAPL	0,21	0,72	0,73	0,72
GOOGL	0,80	0,98	0,98	0,98

* AFLT – выколота точка 15.12.2015; ** DIXY – выколота точка 21.10.2015. Выделены наибольшие показатели в строках.

вать значения параметров a_p , a_{GK} , a_{RS} , a_M связано с тем, что реакция цены каждого актива на перерыв в торгах индивидуальна, и навязывание модели определенного коэффициента повлекло бы предвзятые результаты.

В табл. 2 представлены результирующие коэффициенты детерминации построенных регрессий для квадратов дневной волатильности.

Анализ полученных в табл. 2 результатов позволяет вновь признать оценку Роджерса-Сатчелла наилучшей (7 из 14) из рассматриваемых. К сожалению, выводы повторяют ранее полученный результат – за исключением DIXY и SBER дневная волатильность российских активов очень слабо описывается известными OHLC-оценками. Для американского же рынка ситуация противоположная, о чем свидетельствуют высокие коэффициенты детерминации.

Изучение OHLC-оценок в приложении к российскому и американскому фондовым рынкам позволило численно продемонстрировать различия двух систем – зрелого, хорошо урегулированного американского и достаточно молодого российского рынков. Очевидно, что причина плохой работоспособности существующих OHLC-оценок на российском рынке кроется в невыполнении базовой предпосылки о геометрии

в броуновском движении цены активов. Стоит также учесть, что российская экономика переживает кризис, что не может не отражаться на волатильности рынка ценных бумаг. Учитывая низкую прикладную ценность исследованных OHLC-оценок для российского фондового рынка, необходимо продолжить исследование динамики волатильности с целью нахождения наилучшей альтернативной оценки, учитывающей специфику российского фондового рынка.

Литература

1. Parkinson M. (1980). The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. *Journal of Business*, vol. 53, no. 1, pp. 61–65.
2. Garman M.B., Klass M.J. (1980). On the estimation of security price volatilities from historical data. *Journal of Business*, vol. 53, no. 1, pp. 67–78.
3. Rogers L.C. G., Satchell S.E. (1991). Estimating variance from high, low and closing prices. *Annals of Applied Probability*, vol. 1, no. 4, pp. 504–512.
4. Meilijson I. (2009). The Garman-Klass volatility estimator revisited. URL: <http://arxiv.org/pdf/0807.3492v2.pdf> (дата обращения: 27.02.2016).
5. Портал Финам. ru. Электронный ресурс. URL: <http://www.finam.ru/> (дата обращения: 26.12.2015).
6. Bloomberg (дата обращения: 26.12.2015).