УДК 519.85(045)
JEL C61

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРЕТО- И Λ-ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

КИСЕЛЁВ ВИКТОР ВАДИМОВИЧ,
кандидат технических наук, доцент, доцент Департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, Финансовый университет, Москва, Россия
E-mail: *bars46@gmail.com*

АННОТАЦИЯ
Многие практические задачи хозяйственной деятельности и ряд важных вопросов экономической теории связаны с определением наилучшего, оптимального варианта решения. Адекватная экономическая теория должна отражать процесс непрерывного развития экономической системы, поэтому необходимо рассматривать экономические модели, в которых все экономические переменные зависят от времени, и иметь математический аппарат, позволяющий находить оптимальные значения этих переменных. Таким математическим аппаратом является теория оптимального управления. Классическая теория оптимального управления рассматривает модели, в которых поведение системы описывается системой дифференциальных уравнений, задан функционал, определяющий цель управления и множество ограниченных управляющих воздействий. Важным инструментом решения таких задач является принцип максимума Понтрягина. Но применение принципа максимума приводит ко многим вычислительным проблемам. Для решения некоторых классов вычислительных проблем используется понятие оптимальности по Парето. Более широким понятием является понятие Λ-оптимальности. Показано, что множество Λ-оптимальных решений может быть шире или у́же множества Парето-оптимальных. В данной статье выделены классы задач, которые удобно решать с использованием Парето- и Λ-оптимальности. Приведен пример быстрого решения задачи управления рекламной деятельностью.
Ключевые слова: Парето-оптимальность, Λ-оптимальность, выпуклый конус, функционал, генераторы конуса.

PARETO-OPTIMALITY AND Λ-OPTIMAL FOR SOLVING SOME CLASSES OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM

V.V. KISELEV
PhD (Economics), Associate Professor of the Analysis, Department of Decision Making Theory and Financial Technologies, Financial University, Moscow, Russia
E-mail: *bars46@gmail.com*

ABSTRACT
Many practical problems of economic activities and a number of important issues of economic theory are connected to the choice of optimal solution. An adequate economic theory should reflect the process of continuous development of the economic system; therefore, it is necessary to consider the economic models in which all economic variables depend on time, and to have a mathematical tool that allows to find optimal values of these variables. The theory

of optimal control is a mathematical tool for just such a purpose. The classical theory of optimal control considers models in which the behavior of the system is described by a set of differential equations while the functional is given to define the purpose of control and a variety of the limited control actions is set. An important tool for solving such problems is the Pontryagin principle of maximum. However, the use of the maximum principle leads to many computational problems. That is why the concept of Pareto optimality is used to solve certain classes of computational problems. The broader concept is a Λ-optimality, its definition was introduced in P.L. Yu (Cone. Cone convexity, cone extreme points, and non-dominated solutions in decision problems with multi-objectives // Optim. Theory Appl. 1974. Vol. 14. № 3). It shows that a plurality of Λ-optimal decisions can be wider or narrower than the set of Pareto-optimalities. The article highlights the classes of problems that are easy to solve using the Pareto- and Λ-optimality. The solution of advertising management problem is given for illustration purposes.

Keywords: Pareto-optimality, Λ-optimality, convex closed set, dimension matrix, functional, cone generators.

Существующие в настоящее время динамические модели экономики представляют собой формальное описание множеств вариантов развития экономической системы, или траекторий экономики, удовлетворяющих тем или иным требованиям [1].

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ Λ-ОПТИМАЛЬНОСТИ

Будем рассматривать следующую задачу. Поведение системы описывается уравнением:

$$\dot{x} = l(x) + Bu = f(x,u),$$
$$x \in X \subset R^N, \quad u \in U \subset R^M.$$

Задано начальное условие $x(0) = x^0$. Здесь X — некоторое выпуклое открытое множество, U — выпуклое замкнутое множество. $B = B(t)$ — матрица размерности $N \times M$, причем $B > 0$ на $[0, T]$.

Требуется минимизировать функционал

$$\int_0^T F(x,t)dt.$$

Пусть

$$\dot{x}_{N+1} = 1 = f_{N+1}, \quad x_{N+1}(0) = 0,$$

$$\dot{x}_0 = F = f_0, \quad x_0(0) = 0.$$

Запишем систему сопряженных уравнений [2]:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\sum_j \varphi_j \frac{df_j}{dx_i}, \; i = \overline{1, N+1}, \; \varphi_0 = -1.$$

Теперь принцип максимума можно записать так [3]:

$$0 = \max_{u \in U}\left[(-1)F + \sum_{i=1}^N \varphi_i f_i + \varphi_{N+1} f_{N+1}\right] =$$
$$= (-1)F + \sum_{i=1}^N \varphi_i l_i + \varphi_{N+1} f_{N+1} + \max_{u \in U}(\varphi, \mathrm{Bu}).$$

Пусть Λ — выпуклый конус, вектор-функция $g(u)$ определена на множестве U.

Определение 1 [4]. Вектор $u_\Lambda \in U$ называется Λ-оптимальным, если не существует такого вектора $u \in U$, что $g(u) - g(u_\Lambda) \in \Lambda$, $g(u) \neq g(u_\Lambda)$.

Множество всех Λ-оптимальных точек на U будем обозначать U_Λ.

Замечание. Если все координаты вектор-функции $g(u)$ желательно максимизировать на множестве U, тогда Парето-оптимальность — это Λ-оптимальность для конуса

$$\Lambda = \left\{ y \mid y_i \geq 0, i = \overline{1, N} \right\}$$

и оптимальность по Слейтеру, если

$$\Lambda = \left\{ y \mid y_i > 0, i = \overline{1, N} \right\}.$$

Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать U_Π, а множество точек, оптимальных по Слейтеру, U_C.

Определение 2. Конус Λ* называется многогранным, если его можно представить в виде

$$\Lambda^* = \left\{ z \middle| z = \sum_{i=1}^L \alpha_i H_i, \alpha_i \geq 0, H_i \in R^M, i = \overline{1, L} \right\}.$$

Векторы $H_i, i = \overline{1, L}$ называются генераторами конуса.

Теорема 1. Если множество значений функции $\varphi(t)$ ограничено на $[0, T]$ и принадлежит некоторому выпуклому конусу Λ^* [данное предположение, в частности, выполнено, если множество значений $\varphi(t)$ — выпуклое и не содержит начало координат], тогда

$$\max_{u\in U}\left(\varphi, \mathrm{Bu}\right) = \max_{u\in U_\Lambda}\left(\varphi, \mathrm{Bu}\right)$$

для конуса

$$\Lambda = \left\{y \mid \left(y,z\right) \geq 0, z \in \Lambda^*\right\}.$$

Доказательство. Выражение

$$\max_{u\in U}\left(\varphi, \mathrm{Bu}\right)$$

означает, что оптимальное управление в каждый момент времени следует выбирать так, чтобы максимизировать скалярное произведение (φ, Bu), которое в фиксированный момент времени можно рассматривать как линейную свертку координат вектора Bu с весами φ, по условию $\varphi \in \Lambda^*$. Доказательство того, что максимум линейной свертки при данных условиях достигается на множестве Λ-оптимальных решений, приведено в работе [4].

Замечание. Для практических вычислений всегда можно выбрать выпуклые многогранные конуса Λ_1^* и Λ_2^*, такие, что $\Lambda_1^* \subset \Lambda^* \subseteq \Lambda_2^*$. Из этих вложений следует: $\Lambda_1 \supset \Lambda \supseteq \Lambda_2$ и $U_{\Lambda_1} \subset U_\Lambda \subseteq U_{\Lambda_2}$.

Далее рассмотрим возможность использования понятия Λ-монотонности для сокращения количества вычислений.

Определение 3. Пусть $\Lambda \subset R^M$ — выпуклый конус, размерность конуса равна M. Скалярная функция $\Phi(u)$, $u \in V \subset R^M$ называется строго Λ-возрастающей (Λ-неубывающей) на множестве V, если из $u^1 - u^2 \in \Lambda$, $u^1, u^2 \in V$, Λ-выпуклый конус, следует $\Phi(u^1) > \Phi(u^2)$ ($\Phi(u^1) \geq \Phi(u^2)$).

Определение 4 [4]. Пусть Λ — фиксированный выпуклый конус, $\Lambda \subset R^{N+M}$, функция $\Phi(x, u)$ определена и непрерывна на выпуклом множестве $V = U \cup X$. Если для любых u^1, u^2 из множества $U \subset R^M$ таких, что $u^2 \in u^1 + \Lambda$, $u^1 \neq u^2$ и любом фиксированном x из $\mathrm{X} \subset R^N$ выполняется неравенство $\Phi(x, u^2) > \Phi(x, u^1)$ $\quad$ ($\Phi(x, u^2) \geq \Phi(x, u^1)$), то будем говорить, что функция $\Phi(x, u)$ строго Λ-монотонна (Λ-монотонна) по группе переменных u.

Определение 5. Функция $\Phi(x, u)$ определена и непрерывна на выпуклом множестве $V = U \cup X$. Данная функция называется неубывающей по группе переменных x, если для любого фиксированного $u \in U \subset R^M$ и $x^2 \geq x^1$, $x^1, x^2 \in X$ выполняется $\Phi(x^2, u) \geq \Phi(x^1, u)$.

Пример. Функция $F(x_1, x_2) = x_2 - \sin x_1$ определена при $100 \leq x_1 \leq 100$, $100 \leq x_2 \leq 100$. Данная функция монотонна по группе переменных x_2 и Λ-монотонна для конуса

$$\Lambda = \{z \in R^2 \mid (\alpha_1, z) \geq 0, (\alpha_2, z) \geq 0, \alpha_1 = \\ = (10,1), \alpha_2 = (-10,1)\}.$$

Теорема 2. Рассматривается задача оптимального управления

$$\int_0^T F(x,u)dt \to \max,$$

$$x = (x_1(t),...,x_N(t)), u = (u_1(t),...,u_M(t)),$$
$$\dot{x} = f(x,u),\ x(0) = x^0, u \in U, x \in X.$$

Здесь U, X — выпуклые множества, функции $F(x, u)$ и $f(x, u)$ являются неубывающими по x и Λ-неубывающими по u, $f(x, u) \geq 0$ в области определения. Тогда

$$\max_{u\in U}\int_0^T F(x,u)dt = \max_{u\in U_\Lambda}\int_0^T F(x,u)dt,$$

где U_Λ — множество Λ-оптимальных решений.

Доказательство. В данной задаче для любых t_1, $t_2 \in [0, T]$ таких, что $t_2 > t_1$ и любого $u \in U$ выполняется неравенство $x(t_1 + \Delta t_2) \geq x(t_1)$, поскольку

$$x(t_1 + \Delta t) = x(t_1) + f(x(t_1), u(t_1))\Delta t + o(\Delta t)$$

и $f(x(t_1), u(t_1))\Delta t \geq 0$. Функция $f(x, u)$, Λ-монотонна по группе переменных u, поэтому [6]

$$\max_{u\in U} f\left(x,u\right) = \max_{u\in U_\Lambda} f\left(x,u\right).$$

Отсюда следует:

$$\max_{u\in U} x(t_1 + \Delta t) = \max_{u\in U}\{x(t_1) + f(x(t_1),u(t_1))\Delta t + \\ o(\Delta t)\} = \max_{u\in U}\{x(t_1) + f(x(t_1),u(t_1))\Delta t + o(\Delta t)\}. \quad (1)$$

В момент времени 0

$$\max_{u\in U} F\left(x^0,u\right) = \max_{u\in U_\Lambda} F\left(x^0,u\right).$$

В момент времени Δt в силу равенства (1) и свойств функции F выполнено

$$\max_{u\in U} F(x(\Delta t),u(\Delta t)) = \max_{u\in U_\Lambda} F(x(\Delta t),u(\Delta t)).$$

Аналогичные равенства можно записать в моменты времени $2\Delta t$, …, $n\Delta t$. Поскольку в любой момент времени

$$\max_{u\in U} F(x,u) = \max_{u\in U_\Lambda} F(x,u),$$

то можно записать

$$\max_{u\in U}\int_0^T F(x,u)dt = \max_{u\in U_\Lambda}\int_0^T F(x,u)dt.$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Частный случай теоремы 2 можно сформулировать так.

Следствие теоремы 2. Если задача оптимального управления имеет вид

$$\int_0^T F(x,u)dt \to \max,$$

$$x = (x_1(t),...,x_N(t)), u = (u_1(t),...,u_M(t)),$$
$$\dot{x} = f(x,u),\ \ x(0) = x^0, u\in U, x\in X.$$

Здесь U, X — выпуклые множества, функции $F(x, u)$ и $f(x, u)$ являются неубывающими по x и неубывающими по u, $f(x, u) \geq 0$ в области определения. Тогда

$$\max_{u\in U}\int_0^T F(x,u)dt = \max_{u\in U_\Pi}\int_0^T F(x,u)dt,$$

где U_Π — множество Парето-оптимальных решений.

Следствие. Если в условиях теоремы 3 множество U является параллелепипедом

$$U = [a_1,b_1]\times...\times[a_i\ \ ,b_M],$$

тогда вектор $u_b \geq (b_1, \ldots, b_M)$ задает оптимальное управление в любой момент времени.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим частный случай задачи оптимального управления, когда правые части исходной системы дифференциальных уравнений имеют вид: $f_1(u_1), f_2(u_2), \ldots, f_k(u_k), f_{k+1}(x, t), \ldots, f_N(x, t)$.

$$\dot{x}_1 = f_1(u_1),$$
$$\dot{x}_2 = f_2(u_2),$$
$$...$$
$$\dot{x}_k = f_k(u_k),$$
$$\dot{x}_{k+1} = f_{k+1}(x,t),$$
$$\dot{x}_N = f_N(x,t).$$

Задано $x(t_0) = x^0$, $u\in U\subset R^K$, здесь U — выпуклое множество.

Требуется минимизировать интеграл $\int_0^T F(x,t)\,dt$.

Полагаем $\dot{x}_{N+1} = 1 = f_{N+1},\ x_{N+1}(0) = 0,\ \dot{x}_0 = F = f_0$, $x_0(0) = 0$.

Для исходной системы можно записать систему сопряженных уравнений

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{N+1}\varphi_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i},\ \ \varphi_0 = -1,\ \ \frac{d\varphi_0}{dt} = 0.$$

Далее будем рассматривать расширенные векторы $\overline{f}\in R^{N+2}$, $\overline{\varphi}\in R^{N+2}$.

Теорема 3. Если известно, что $\varphi_1(t)\geq 0$, $\varphi_2(t)\geq 0$, ..., $\varphi_k(t)\geq 0$, то для принципа максимума верно следующее равенство:

$$\max_{u\in U}(\overline{\varphi},\overline{f}) = \max_{u\in U_C}(\overline{\varphi},\overline{f}).$$

Доказательство. Запишем детально принцип максимума:

$$\max_{u\in U}(\overline{\varphi},\overline{f}) = \max_{u\in U}\sum_{i=0}^{N+1}\varphi_i f_i =$$
$$= \max_{u\in U}\left\{\varphi_0 f_0 + \sum_{i=1}^{k}\varphi_i f_i + \sum_{i=k+1}^{N+1}\varphi_i f_i\right\} =$$
$$= \varphi_0 f_0 + \sum_{i=k+1}^{N+1}\varphi_i f_i + \max_{u\in U}\left\{\sum_{i=1}^{k}\varphi_i f_i\right\}.$$

В каждый момент времени выражение

$$\max_{u\in U}\{\sum_{i=1}^{k}\varphi_i f_i\}$$

— линейная свертка с неотрицательными весовыми коэффициентами φ.

Поэтому можно записать

$$\max_{u \in U}\{\sum_{i=1}^{k}\varphi_i f_i\} = \max_{u \in U_C}\{\sum_{i=1}^{k}\varphi_i f_i\}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ПОЛИТИКИ ОБЛАСТИ РЕКЛАМНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Ниже приводится решение задачи, сформулированной в книге [5]. Выбрать оптимальную политику в области рекламной деятельности, которая стимулирует объем продаж данного продукта за некоторый период времени при следующих условиях: скорость изменения объема продаж уменьшается пропорционально объему продаж и увеличивается пропорционально уровню рекламной деятельности в той части рынка, которая еще этим продуктом не насыщена. Задача имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} S(t)dt \to \max_{\{A(t)\}},$$

$$\dot{S} = -aS + bA\left(1 - \frac{S}{M}\right),$$

$$S(t_0) = S_0, \quad 0 \le A(t) \le \overline{A},$$

где S — объем продаж; A — уровень рекламной деятельности; M — емкость рынка; t_0, t_1, a, b, S_0, A — заданные положительные параметры.

Пусть $t_1 - t_0 = T$, $x_1 = S$, $A(t) = u$, $\overline{A} = U$, тогда сформулированную выше задачу можно переписать так:

$$x_0(t) = -\int_0^T x_1\, dt,$$

$$\dot{x}_0 = -x_1 = f_0, \quad x_0(0) = 0,$$

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + bu\left(1 - \frac{x_1}{M}\right),$$

$$x_1(0) = x_1^0, \quad 0 \le u \le U.$$

Запишем систему сопряженных уравнений:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = -\varphi_0\frac{\partial f_0}{\partial x_0} - \varphi_1\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = -\varphi_0 \cdot 0 - \varphi_1 \cdot 0 = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\varphi_0\frac{\partial f_0}{\partial x_1} - \varphi_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = = \varphi_0 - \varphi_1\left(-a - \frac{b \cdot u}{M}\right) = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot B, \qquad (3)$$

где

$$B = a + \frac{b}{M} \cdot u;$$

поскольку $a > 0$, b, M, U — неотрицательные числа, то $B > 0$.

Из первого уравнения следует $\varphi_0(t) = C_0$; используя формулу граничного условия, можно записать:

$$\varphi_0(T) = -1 = C_0 = \varphi_0(t).$$

Получим условия для нахождения оптимального управления:

$$\max_{0 \le u \le U}(\varphi, f) = \max_{0 \le u \le U}(f_0\varphi_0 + f_1\varphi_1) =$$

$$= \max_{0 \le u \le U}(-1 \cdot (-x_1) + \left(-ax_1 + bu \cdot \left(1 - \frac{x_1}{M}\right)\right) \cdot \varphi_1 =$$

$$= x_1 - ax_1\varphi_1 + \max_{0 \le u \le U} bu\left(1 - \frac{x_1}{M}\right) \cdot \varphi_1;$$

поскольку по условию задачи $b > 0$, $\frac{x_1}{M} \le 1$, то $u^* = U\text{sig}\varphi_1$, где

$$\text{sig}\varphi_1 = \begin{cases} 1 \text{ при } \varphi_1 \ge 0 \\ 0 \text{ при } \varphi_1 < 0. \end{cases}$$

Подставим оптимальное управление в выражение, определяющее B:

$$B = \begin{cases} a \text{ при } \varphi_1 < 0 \\ a + \dfrac{bU}{M} \text{ при } \varphi_1 \ge 0. \end{cases}$$

Заметим, что $d(B\varphi_1 - 1) = dB\varphi_1$.

Теперь уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{d(B\varphi_1 - 1)}{(B\varphi_1 - 1)} = Bdt.$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$\ln\left|B\varphi_1 - 1\right| = Bt - c,$$

это эквивалентно

$$\begin{cases} B\varphi_1 - 1 = e^{Bt-c} \text{ при } B\varphi_1 - 1 \geq 0; & (4) \\ -(B\varphi_1 - 1) = e^{Bt-c} \text{ при } B\varphi_1 - 1 < 0. & (5) \end{cases}$$

Из граничного условия следует $\varphi_1(T) = 0$. Запишем выражения для φ_1.

Из уравнения (4) следует:

$$\varphi_1(T) = \frac{(e^{BT-c} + 1)}{B} \neq 0.$$

Из уравнения (5) следует:

$$\varphi_1 = \frac{(-e^{Bt-c} + 1)}{B}.$$

Так как $\varphi_1(T) = 0$, то $e^{BT-c} = 1$ или $BT = c$, т.е.

$$\varphi_1 = \frac{(1 - e^{B(t-T)})}{B}.$$

Поскольку $\varphi_1 > 0$ при $0 \leq t < T$ и $\varphi = 0$ при $t = T$, то теперь можно записать оптимальное уравнение:

$$u^* = U \text{ } при \text{ } 0 \leq t < T.$$

Выше было приведено классическое решение задачи. Если использовать теорему 1, то решение можно получить значительно проще и быстрее. Поскольку $\varphi(t) > 0$ на интервале $[0, T)$, то $\Lambda^* = \{y \mid y > 0\}$, тогда $\Lambda = \{z \mid z \cdot y > 0\}$. Отсюда следует, что $z > 0$ и $U_\Lambda = U$, это означает, что по теореме 1

$$u^* = U \text{ } при \text{ } 0 \leq t < T.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лагоша Б.А.*, *Апалькова Т.Г.* Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М.: Финансы и статистика, 2008.
2. Математические методы в экономике и финансах / под. ред. *В.М. Гончаренко*. М.: КНОРУС, 2016.
3. *Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркина Г.И.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: МГТУ им. Баумана, 2001.
4. *Kiselev V.V.* Application of the Λ-Monotonicity to the Search for Optimal Solutions in Higher-Dimensional Problems. Journal of mathematical science, 2016, vol. 216, no. 5, pp. 667–673.
5. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис Пресс, 2002.
6. *Киселёв В.В.* Использование Λ-монотонности по группе переменных для снижения размерности задачи // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. Вып. 2. С. 312–313.
7. *Yu P.L.* Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // Optim. Theory appl, 1974, vol. 14, no. 3.

REFERENCES

1. *Lagosha B.A.*, *Apalkova T.G.* Optimal'noe upravlenie v jekonomike: teorija i prilozhenija [Optimum control in economy: theory and applications]. Moscow, Finansy i statistika, 2008 (in Russian).
2. Matematicheskie metody v jekonomike i finansah [Mathematical methods in economy and finance] / ed. *V.M. Goncharenko*. Moscow, KNORUS, 2016 (in Russian).
3. *Wanko V.I.*, *Yermoshina O.V.*, *Kuvyrkin G.I.* Variacionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie [Calculus of variations and optimum control]. Moscow, MGTU im. Baumana, 2001 (in Russian).
4. *Kiselev V.V.* Application of the Λ-Monotonicity to the Search for Optimal Solutions in Higher-Dimensional Problems. *Journal of mathematical science*, 2016, vol. 216, no. 5, pp. 667–673 (in England).
5. *Intriligator M.* Matematicheskie metody optimizacii i jekonomicheskaja teorija [Mathematical Optimization and Economic Theory]. Moscow, Airis Press, 2002 (in Russian).
6. *Kiselev V.V.* Ispol'zovanie Λ-monotonnosti po gruppe peremennyh dlja snizhenija razmernosti zadachi [Application of the Λ-monotonicity with respect to a group of variables for the reducing of the dimension of a problem]. *Review of the applied and production mathematics — Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki*, 2008, vol. 15, no. 2, pp. 312–313 (in Russian).
7. *Yu P.L.* Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Optim. Theory appl*, 1974, vol. 14, no. 3 (in England).