УДК 330.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

ЛУКАСЕВИЧ ИГОРЬ ЯРОСЛАВОВИЧ, *д-р экон. наук, профессор,*
заведующий кафедрой «Финансовый менеджмент» Финансового университета
E-mail*: lukas1963@yandex.ru*

В статье рассмотрены проблемы моделирования временной структуры процентных ставок. Дан детальный анализ основных подходов и моделей. Для статистического подхода разработана модель, позволяющая минимизировать ошибки полученных оценок. Предложено направление развития диффузионных моделей временной структуры процентных ставок для отечественного рынка путем включения компоненты, «отвечающей» за генерацию возмущений (скачков). Показано, что практическим примером комбинированного подхода является методика расчета *G*-кривой, базирующаяся на модификации модели Нельсона — Сигеля, которая в настоящее время применяется Московской биржей.

Ключевые слова: кривые доходности, временная структура; процентные ставки диффузионные модели; комбинированный подход.

Modeling the Time Structure of Interest Rates

IGOR YA. LUKASEWICH, *ScD (Economics), full professor, Head of the Financial Management Department, Financial University*

The paper addresses the problem of modeling the time-dependent structure of interest rates. A detailed analysis of the main approaches and models is made. For the statistical approach a model allowing minimization of estimation errors has been developed. An approach to the development of diffusion models of the time structure of interest rates for the domestic market is proposed by incorporating a component “responsible” for the generation of disturbances (spikes). A practical example of the combined approach is a methodology of computing the G-curve based on the modified Nelson-Siegel model currently used by the Moscow Stock Exchange.

Keywords: yield curves, time (-dependent) structure; interest rates diffusion models; combined approach.

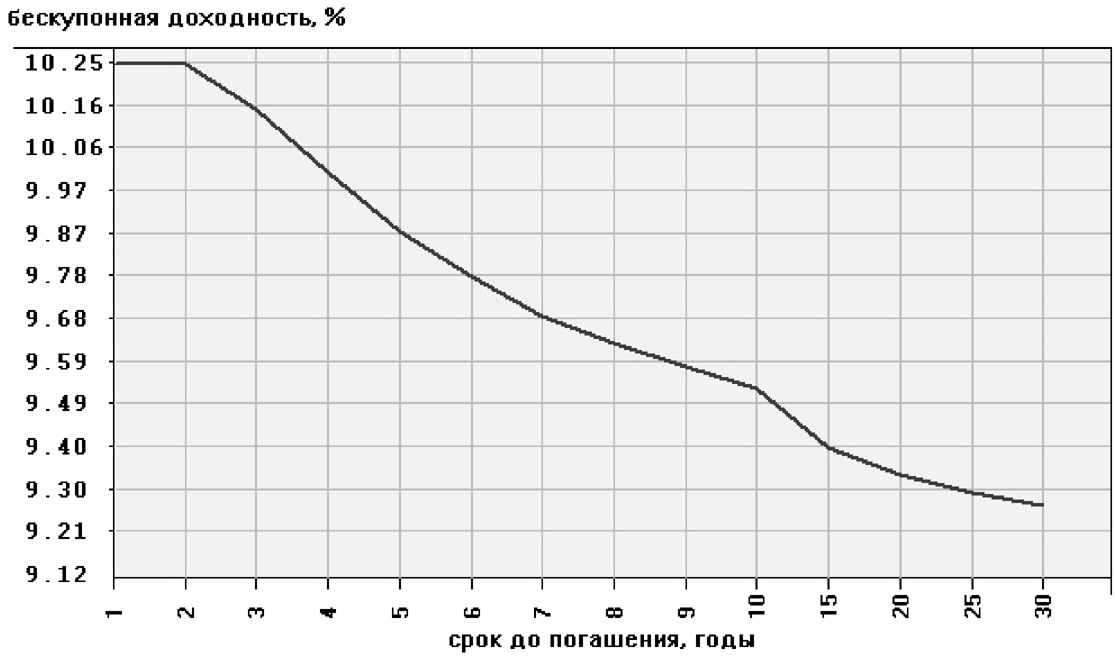
Сущность моделирования кривых доходности

Исследования зависимостей и соотношений между процентными ставками (т.е. ценами на заемные ресурсы), относящимися к различным временным периодам, занимают одно из центральных мест в теории финансов и инвестиций.

Важнейшим направлением подобных исследований является анализ и моделирование так называемых кривых доходности (*yield curve*). В общем случае такая кривая представляет собой график, отражающий изменения стоимости и доходности соответствующих долговых инструментов (например, государственных или корпоративных облигаций) в зависимости от срока погашения. Пример подобной кривой, построенной специалистами Банка России на основе доходностей государственных бескупонных облигаций по состоянию на декабрь 2015 г., приведен на *рисунке*.

Нетрудно заметить, что эта кривая, по сути, описывает временную структуру процентных ставок (*term structure of interest rates*) на конкретном рынке (в данном случае на рынке государственного долга) и дает представление о стоимости денег в зависимости от срока и рисков заимствования, отражая его текущую, и, возможно, будущую конъюнктуру.

На макроуровне моделирование кривых доходности является важнейшим инструментом



Кривая доходности государственных бескупонных облигаций

Источник: URL: www.cbr.ru.

реализации денежно-кредитной политики государства, посредством которой оно влияет на экономическую активность субъектов финансового рынка, формирует основу ценообразования на кредитные ресурсы, дает сигналы рынку относительно инфляционных ожиданий и т.д.

На микроуровне кривые доходности могут использоваться для решения широкого круга задач, таких как:

- управление инвестиционным портфелем на финансовом рынке;
- прогнозирование цен на финансовые активы;
- анализ инвестиционных и финансовых рисков;
- определение адекватных коэффициентов дисконтирования при проведении оценки эффективности инвестиционных проектов и стоимости бизнеса и др.

Анализ и моделирование кривых доходности требует предварительного изучения взаимосвязей различных видов ставок, которые могут быть использованы для построения кривых доходности. Исследования показывают, что на практике для этих целей применяются [1, 2]:

- ставки по текущим финансовым контрактом (ставки спот);
- ставки по контрактам с исполнением в определенный срок в будущем (форвардные ставки);
- эффективная ставка доходности к погашению (*yield to maturity — YTM*).

С теоретической точки зрения кривые доходности, построенные на базе *YTM*, не могут адекватно отражать временную структуру процентных ставок, так как будут неодинаковы для облигаций с различными купонными платежами. Кроме того, доходность к погашению, равная *YTM*, обеспечивается только в случае немедленного реинвестирования полученных платежей по ставке *YTM*.

Теории временной структуры процентных ставок

Попытки дать объяснения поведению краткосрочных и долгосрочных процентных ставок привели к созданию различных теорий временной структуры (*term structure theory*). Несмотря на существующие различия, они являются разновидностями или развитием трех основных направлений, а именно теории предпочтения ликвидности (*liquidity premium theory*, *liquidity preference theory*), теории ожиданий (*expectations theory*) и теории сегментации (*segmentation theory*).

Детальный анализ базовых теорий, а также различных направлений их развития можно найти в [1]. Поэтому ниже будет кратко рассмотрена сущность этих теорий как базы для моделирования временной структуры процентных ставок.

Теория предпочтения ликвидности предполагает, что доходность долгосрочных безрисковых бумаг должна в среднем превышать доходность аналогичных инструментов с меньшим сроком погашения. В соответствии с этой теорией инвесторы согласятся уплатить некоторую премию за приобретение краткосрочных бумаг с целью избежания риска, связанного с долгосрочными вложениями, т.е. инвесторы предпочитают большую ликвидность меньшей. Таким образом, для привлечения средств на долгосрочной основе заемщики должны предложить инвестору дополнительную премию за риск ликвидности в виде более высокого дохода.

Теория ожиданий предполагает, что форвардная ставка представляет собой усредненное ожидание спот-ставки. Существует несколько ее разновидностей, наиболее популярными из которых являются теория несмещенных ожиданий (*unbiased expectations theory*), теория чистых ожиданий (*pure expectations theory*) и теория локальных ожиданий (*local expectations theory*) [1].

Согласно этой теории возрастающие кривые отражают ожидание со стороны инвесторов роста ставок, а убывающие — падения. Из теории ожиданий также следует, что при отсутствии неопределенности форвардные ставки являются точным прогнозом спот-ставок.

Следующее объяснение временной зависимости процентных ставок основывается на предположении о существовании различных сегментов рынка (*markets segmentation*). В его основе лежит предположение, что инвесторы и заемщики по объективным и субъективным причинам привязаны к определенным видам и срокам ценных бумаг. Таким образом, существуют отдельные рынки краткосрочных, среднесрочных и долгосрочных ценных бумаг. При этом спот-ставки определяются спросом и предложением на каждом рынке. Согласно теории сегментации возрастающая кривая доходности наблюдается в случае, если пересечению кривых спроса и предложения для краткосрочных инвестиций соответствует меньшая процентная ставка, чем равновесная ставка для долгосрочных инвестиций. Аналогично убывающая кривая наблюдается в обратном случае. Такая трактовка позволяет объяснить аномалии в кривой доходности.

Согласно различным исследованиям наибольшие эмпирические подтверждения выдвигаются теорией предпочтения ликвидности. Вместе с тем объяснения форм кривых доходности на отечественном рынке гособлигаций могут даваться с позиций всех трех теорий.

Проблема моделирования временной структуры процентных ставок имеет давнюю историю и продолжает вызывать неослабевающий интерес у ученых и практиков. Достаточно сказать, что в разное время ею занимались такие выдающиеся ученые, как Д. Кейнс, а также нобелевские лауреаты П. Самуэльсон, Р. Мертон, Ф. Модильяни, М. Шоулз, Е. Фама и др. Вместе с тем, несмотря на значительный прогресс в этой области, задача построения адекватных моделей по-прежнему далека от окончательного решения и требует дальнейших исследований.

В настоящее время предложено несколько подходов к их разработке, в зависимости от которых все модели временной структуры можно условно подразделить на три категории:

- статистические, базирующиеся на классических методах прогнозирования временных рядов;
- эконометрические (модели волатильности), учитывающие изменения дисперсии и ковариаций;
- стохастические (диффузионные), в основе которых лежит тот или иной случайный процесс.

Статистические подходы к моделированию временной структуры процентных ставок

Наиболее распространенным и широко используемым на практике подходом к подобному моделированию является применение классических статистических методов прогнозирования временных рядов. Основными причинами их популярности являются:

- относительная несложность, изученность и доступность используемых математи-

ческих методов широкому кругу специалистов;
- наличие многочисленных компьютерных программ, обеспечивающих автоматизацию выполнения соответствующих расчетов.

Одна из первых классических моделей временной структуры была предложена Д. Кейнсом [3]:

$$E(r_{t,t+1}) = r_t + a\left(r^* - r_t\right), \qquad (1)$$

где r^* — долгосрочная ставка, предполагаемая неизменной в течение срока проведения операции;

a — постоянный множитель, $0 < a < 1$.

Представим модель (1) в следующем виде:

$$E(r_{t,t+1}) = ar^* + (1-a)r_t. \qquad (2)$$

Как следует из приведенной формулировки, Кейнс предполагал наличие положительной связи ожидаемых и текущих ставок, что в целом соответствует теории предпочтения ликвидности. При этом если текущий уровень ставок выше нормального уровня долгосрочных ставок, рынок ожидает их понижения и обратно. Разница между текущими и долгосрочными ставками в модели (1) считается близкой к постоянному коэффициенту a.

Подход Кейнса получил развитие в работах Д. Вуда (*J. Wood*) и Б. Малкила (*B. Malkiel*)[1]. Разработанные ими модели были названы моделями с «регрессивными» ожиданиями (*regressive expectations*).

Другое направление развития классических моделей временной структуры связано с изменением общей гипотезы о «типе» ожиданий инвесторов. В частности, де Лью (*de Leeuw*) выдвинул гипотезу о возможности формирования ожиданий на основе экстраполяции предыдущих наблюдений (трендов). Следствием подобного подхода стало появление ряда моделей, базирующихся на «экстраполятивных» ожиданиях:

$$E(r_{t,t+1}) = \left(1+b\right)r_t - br_{t-1}, \quad 0 < b < 1. \qquad (3)$$

[1] Malkiel B.P. The term structure of interest rates. Princeton Univ. Press, 1966.

$$E(r_{t,t+1}) = \left(1+b\right)r_t - b\left[\frac{\delta}{1-\delta}\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\delta\right)^i r_{t-i}\right]. \qquad (4)$$

В простых моделях подобного типа предполагается, что ожидаемое изменение процентной ставки ($r_{t,t+1}-r_t$) в следующем периоде представляет собой постоянную долю b от последнего Δr_t.

В более сложных моделях типа (4) используется геометрическое взвешивание с убывающими весами с целью придания большей значимости последним наблюдениям и уменьшения влияния устаревающих данных. При этом значение параметра δ здесь задается значительно большим по величине в сравнении с γ в модели (3).

Результатом синтеза гипотез «регрессивных» и «экстраполятивных» ожиданий стало появление смешанных моделей вида:

$$E(r_{t+1,t}) = r_t + b\left[r_t - \frac{\delta}{1-\delta}\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\delta\right)^i r_{t-i}\right] + a\left[\gamma\sum_{i=0}^{\infty}(1-\gamma)^i r_{t-i} - r_t\right]. \qquad (5)$$

Наибольшую известность получила смешанная модель, разработанная Ф. Модильяни — одним из родоначальников современной теории структуры капитала[2]:

$$E(r_{t+1,t}) = \omega_0 r_t + \sum_{i=1}^{\infty}\omega_i r_{t-i}, \qquad (6)$$

где $\varpi_0 = 1 + b - (1-\gamma)a$ и $\varpi_i = a\gamma(1-\gamma)^i - b\frac{\delta(1-\delta)^i}{1-\delta}, \forall i \geq 1.$

Более продвинутые варианты адаптивных моделей временной структуры процентных ставок были предложены Т. Минсером (*T. Mincer*), а также Г. Бирвагом (*G. Bierwag*)[3].

В первой модели ожидания аппроксимируются как взвешенное среднее из нескольких экспоненциально взвешенных средних:

[2] Modigliani F. Innovations in interest rate policy // American Economic Review. May, 1966. pp. 178–197.

[3] Bierwag G. Immunization, duration and the term structure of interest rates // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1977, No 12, pp. 724–743.

$$E(r_{t+1,t}) = \sum_{j=1}^{n} e_j \left[\lambda_j \sum_{i=0}^{\infty} \left(1-\lambda_j\right)^i r_{t-i} \right], \qquad (7)$$

где сумма корректирующих положительных весов e_j (значений ошибок прогноза) равна 1.

В основе второй модели лежит предположение, что все участники рынка имеют адаптивные ожидания. В этом случае рыночное ожидание представляет собой взвешенную сумму всех сделанных прогнозов участников:

$$E(r_{t+1,t}) = r_t \sum_{i=0}^{\infty} \left[e\lambda_1 \left(1-\lambda_1\right)^i + \left(1-e\right)\lambda_2 \left(1-\lambda_2\right)^i \right] r_{t-i} \cdot \qquad (8)$$

Результаты исследований и разработки адаптивных моделей для прогнозирования процентных ставок и курсов валют на российском рынке можно найти в работах Ю.П. Лукашина [4].

Еще одним распространенным направлением в статистическом моделировании процентных ставок является применение сплайнов для выравнивания временных рядов.

Идея построения дисконтирующей функции с помощью полиномиальных сплайнов принадлежит Д. Маккалоху (*J. McCulloch)*[4]. Разработанная им модель базируется на кубической функции:

$$d(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \qquad (9)$$

Позднее О. Вэйсичек (*O. Vasicek*) предложил использовать экспоненциальный сплайн вида[5]:

$$d(t) = a_0 + a_1 e^{-\alpha t} + a_2^{-2\alpha t} + a_3 e^{-3\alpha t}, \qquad (10)$$

где *a* — константа.

Несмотря на достаточно эффективную реализацию статистических методов прогнозирования в современных компьютерных программах, даже с вычислительной точки зрения проблемы точности оценок при моделировании временной зависимости процентных ставок оставляют широкое поле деятельности для дальнейшего совершенствования. Основной причиной этого является существование ограничений на величины тех или иных параметров в используемых моделях, которые часто принимают вид неравенств.

Данная проблема может быть решена последующей нелинейной оптимизацией, минимизирующей ошибки полученных оценок. В частности, в рамках теории ожиданий подобная модель может быть сформулирована в представленном ниже виде.

Пусть P_i — рыночная цена облигации i; P^*_i — прогнозная цена облигации i; r_t — прогнозируемая спот-ставка в периоде t; d_t — коэффициент дисконтирования в периоде t; f_t — форвардная ставка в периоде между t и $t+1$; w — вектор параметров кривой.

Тогда в соответствии с положениями теории ожиданий равновесная цена облигации равна:

$$P_t^* = \sum_{t \in T} c_{it} d_t. \qquad (11)$$

Пусть $dt = g(t, w)$ — сглаживающая функция (например, экспоненциальная). Тогда задача нелинейного программирования может быть сформулирована как:

$$\min \sum_i (P_i - P_i^*)^2 \qquad (12)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned}
&d_t = g(t,w)\\
&P_i^* = \sum_i c_{it} d_t\\
&r_t = d_t^{-1/t} - 1\\
&f_t = \frac{(1+r_{t+1})^{t+1}}{(1+r_t)^t} - 1.\\
&\underline{w} \le w \le \overline{w}\\
&\underline{d_t} \le d_t \le \overline{d_t}\\
&\underline{r_t} \le r_t \le \overline{r_t}\\
&\underline{f_t} \le f_t \le \overline{f_t}
\end{aligned}$$

Предлагаемый подход обеспечивает большую эффективность, точность и гибкость вычислений, так как позволяет учитывать различные ограничения, которые могут быть заданы для параметров модели (12).

[4] McCulloch J. Measuring the Term Structure of Interest Rates // Journal of Business. 1971. No 1, pp. 19–31.

[5] Vasicek O. An equilibrium characterisation of the term structure // Journal of Financial Economic. 1977, v. 5, pp. 177–188.

Несмотря на широкую популярность и практическую доступность, классические методы прогнозирования временных рядов вряд ли могут рассматриваться в качестве адекватного подхода к решению проблемы моделирования временной структуры процентных ставок, поскольку изменения последних имеют ярко выраженную стохастическую природу.

Исследования показывают, что в настоящее время существуют два основных подхода к построению моделей, позволяющих учитывать стохастическую природу изменений процентных ставок, т.е. их волатильность (*volatility*).

Эконометрические подходы к моделированию временной структуры процентных ставок

Сущность эконометрического подхода заключается в разработке моделей с переменной дисперсией и ковариациями. В общем случае их можно подразделить на две концептуальные категории:

- модели, управляемые наблюдениями (данными);
- модели, управляемые параметрами.

К первой категории относят различные классы авторегрессионных моделей условной неоднородности (*ARCH*, *GARCH*, *HARCH* и др.) для описания случайных компонент временных рядов. Достоинством этих моделей является их способность учитывать такие свойства эмпирических распределений, как кластерность, «тяжелые» хвосты, эксцесс, наличие «долгой памяти»[6].

Наиболее простой здесь является модель типа *ARCH* (*AutoRegressive Conditional Heteroskesdastic*), в которой величины s_t (волатильности) являются линейной функцией квадратов предшествующих значений наблюдаемой переменной. Для исследуемой проблемы модель может быть сформулирована в следующем виде:

$$y_t = e_t \sigma_t,$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 y_{t-1}^2 + \ldots + a_n y_{t-n}^2, \qquad (13)$$

где y_t — разность логарифмов цен ($y_t = ln\,(P_t/P_{t-1})$);

P_t, P_{t-1} — цены актива в моменты t и t—1 соответственно;

n — порядок модели; $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$;

e_t — независимые, стандартно распределенные величины, $e \sim N\,(0, 1)$.

Даже при n = 1 модель поведения приращений y_t обладает рядом интересных свойств. В частности, ее стационарное решение приводит к распределениям типа Парето (с «тяжелыми» хвостами). Недостатком моделей *ARCH* является то, что все величины $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots y_{t-n}$ в (13) являются квадратами своих значений. Таким образом, моделью не учитываются разные знаки приращений.

Более развитыми являются модели типа *GARCH* (Generalized *ARCH*) и *HARCH* (Heterogeneous *ARCH*):

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{k} b_j \sigma_{t-j}^2, \qquad (14)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j \left(\sum_{i=1}^{j} y_{t-i} \right)^2, \qquad (15)$$

где $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$;

$z_j \geq 0$ для $j \leq n-1$.

Таким образом, последнее слагаемое позволяет учитывать возможные эффекты, создаваемые разными знаками приращений. Существенным достоинством подобных моделей является способность хорошо аппроксимировать эмпирические корреляционные функции, построенные по реальным данным. Вместе с тем подбор и оценка параметров для таких моделей представляют определенные трудности.

Управляемыми параметрами моделей предполагается, что волатильность является функцией некоторой ненаблюдаемой величины. В качестве примера можно привести модель логнормальной стохастической дисперсии, предложенную С. Тэйлором [7]:

$$y_t | h_t \sim N\{0, \exp(h_t)\},\ h_{t+1} = \\ = z_0 + z_1 h_t + e_t,\ e_t \sim N\,(0, s_e^2). \qquad (16)$$

Лог-волатильность h_t в (16) является скрытой от исследователя, однако она может быть оценена по данным наблюдений. Хотя подобные

[6] Gourieroux Ch. ARCH Models and Financial Applications. Springer-Verlag, 1997. 228 p.

модели с трудом поддаются статистической интерпретации и требуют применения сложных численных методов, их достоинство заключается в максимальной приближенности к процессам диффузии, которые в настоящее время широко используются в современной теории финансов и являются объектом пристального внимания со стороны исследователей.

Как уже отмечалось, один из подходов к оценке финансовых активов, получивший название теории случайных блужданий, базируется на предположении о непредсказуемости изменений цен и их независимости от предыдущей динамики.

Исследования показывают, что для описания случайных блужданий в теории вероятностей используются модели процессов с независимыми приращениями, наиболее характерными представителями которых являются так называемые винеровские процессы.

Диффузионные модели временной структуры процентных ставок

История возникновения и развития диффузионных моделей примечательна сама по себе. Достаточно сказать, что первая подобная модель была предложена почти 100 лет назад в работе Л. Башелье (*L. Bachilier*) «Теория спекуляций»[7], ученика известного физика А. Пуанкаре.

Исследуя поведение биржевых цен на акции, Л. Башелье разработал для его описания математическую модель одномерной диффузии, получившей известность впоследствии как модель броуновского движения. Данная модель имела следующий вид:

$$P_t = P_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

где μ — математическое ожидание смещения (нормы доходности);

σ — стандартное отклонение;

$W(t)$ — случайный процесс, у которого средние приращения нулевые, а средние квадраты приращений удовлетворяют соотношению $\overline{(\Delta S_t)^2} \sim \Delta t$ (т.е. броуновское движение).

Идеи Башелье не были поняты современниками и долгое время находились в забвении.

Дальнейшее развитие диффузионные модели получили в работах известного экономиста П. Самуэльсона, который предложил для описания динамики цен использовать геометрическое броуновское движение:

$$P_t = P_0 e^{\mu t} e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2},$$

где $W(t)$ — случайный процесс, введенный Башелье.

Однако особый интерес к диффузионным моделям вызвала разработка Ф. Блэком и М. Шоулзом модели оценки опционов. За основу они взяли так называемый стандартный винеровский процесс — непрерывный аналог геометрического случайного блуждания. Стандартный винеровский процесс представляет собой случайный непрерывный процесс W с независимыми приращениями. Его переходные вероятности имеют плотности $q_t(x, y)$, которые нормальны с математическим ожиданием x и дисперсией at, где $a > 0$ — некоторая постоянная. Эти плотности удовлетворяют обычному уравнению диффузии вида:

$$\frac{\partial q_t(x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 q_t(x,y)}{\partial x^2}. \tag{17}$$

Рассмотрим применение моделей случайных непрерывных блужданий для описания поведения процентных ставок. Пусть r_t — спот-ставка в момент t. Тогда случайное изменение r_t может быть описано в виде следующего стохастического дифференциального уравнения[8]:

$$dr(t) = \mu(t,r)dt + \sigma(t,r)dW(t), \tag{18}$$

где μ — математическое ожидание смещения;

σ — стандартное отклонение;

$W(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Р. Мертон (*R. Merton*) предложил описывать движение r_t как простой диффузионный процесс с постоянными коэффициентами сноса m и волатильности s:

[7] L. Bachilier. Theorie de la speculation. – Ann. Ecole Norm. Sup., 1900. (Перепечатано в книге: The random character of stock market prices. Cambridge, MA.: MIT, Press, 1967, pp. 517–531).

[8] Непрерывное блуждание вида 18 известно как процесс Ито.

$$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t, \qquad (19)$$

где W — стандартный винеровский процесс.

Следующий шаг был сделан О. Вэйсичеком, модель которого базируется на использовании процессов Орнштейна — Уленбека[9]:

$$dr_t = \alpha(\bar{r} - r_t)dt + \sigma dW_t, \qquad (20)$$

где постоянные $\bar{r}$ и a играют роль среднего и коэффициента пропорциональности, отвечающего за отклонения r_t.

Еще одной известной разработкой является равновесная модель Кокса — Росса — Ингерсолла (*Cox J.C., Ross S.A., Ingersoll J.E.*)[10]:

$$dr_t = \alpha(\bar{r} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t. \qquad (21)$$

Среди других разработок следует отметить модели Халла — Уайта (*Hull J., White R.*), Лонгштаффа — Шварца (*Longstaff F.A., Shwartz E.S.*), Хита — Джерроу — Мортона (*Heath D., Jarrow R., Morton A.*).

Детальное исследование и сравнительный эмпирический анализ наиболее известных диффузионных моделей временной структуры были выполнены К. Ченом (*K. Chen*) и А. Сандерсом (*A. Sanders*) для фондового рынка США [2]. Согласно проведенным ими исследованиям наилучший результат при тестировании показала модель *HJM* (модель Хита — Джерроу — Мортона). На наш взгляд, модель *HJM*, по сути, является обобщением подходов к моделированию временной структуры процентных ставок в рамках теории случайных блужданий и заслуживает специального рассмотрения.

Пусть изменения форвардной ставки $f_{t,T}$ заданы следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\partial f(t,T) = \mu(t,T) + \sigma_f(t,T)dW_t. \qquad (22)$$

Тогда спот-ставка $r_t = f_{t,\,t}$ может быть задана в виде:

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \mu(v,t)dv + \int_0^t \sigma_f(v,t)dW(v). \qquad (23)$$

Цена бескупонной облигации в периоде t исходя из значения форвардной ставки $f_{t,T}$ и при условии непрерывного начисления процентов будет равна:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right), \qquad (24)$$

где $0 \le t \le T$.

Посредством применения теоремы Фубини и лемму Ито можно показать, что цена дисконтной облигации должна удовлетворять следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} dP(t,T) = \left[r(t) + b(t,T)\right]P(t,T)dt + \\ + a(t,T)P(t,T)dW(t), \end{aligned} \qquad (25)$$

где

$$\begin{aligned} a(t,T) &= -\int_t^T \sigma_f(t,v)dv, \\ b(t,T) &= -\int_t^T \mu(t,v)dv + \frac{1}{2}a(t,T)^2. \end{aligned} \qquad (26)$$

Отметим, что такой подход позволяет сформулировать и многофакторные модели временной структуры процентных ставок и оценки потоков платежей.

Будучи по своей сути эволюционными, все модели, базирующиеся на винеровских процессах, эффективны лишь в случае небольших колебаний ставок, т.е. в условиях экономической стабильности и развитого финансового рынка. Однако диапазон колебаний ставок на российском рынке в целом достаточно широк. Поэтому непосредственное применение в российских условиях данных моделей требует их доработки.

Наиболее перспективным направлением развития диффузионных моделей временной структуры процентных ставок для отечественного рынка представляется их расширение путем включения компоненты, «отвечающей» за генерацию возмущений (скачков). В качестве такой компоненты может быть использован

[9] Fong H., Vasicek O. Term Structure Modelling // Journal of Finance. 1982, v. 37, No. 7, pp. 339–348.

[10] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, S.A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, 53:385–407 (May, 1985).

пуассоновский процесс. Тогда для общего случая подобная модель будет иметь следующий вид:

$$dr(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + \delta(t)dN(t), \quad (27)$$

где W — винеровский процесс;

N — пуассоновский процесс;

δ — параметр пуассоновского процесса.

Предлагаемый подход к моделированию временной структуры процентных ставок на базе диффузионных процессов, позволяющий учитывать резкие колебания в развитии случайного процесса, по нашему мнению, более всего соответствует реалиям российского рынка, отличительными чертами которого являются нестабильность, зависимость от неэкономических факторов, высокая степень неопределенности.

Вместе с тем его практическая реализация связана с определенными вычислительными сложностями. Отметим также необходимость применения имитационного моделирования для генерации источников неопределенности, т.е. винеровских и пуассоновских процессов. Все это требует специальной математической и компьютерной подготовки соответствующих специалистов.

Выводы

Для решения конкретных задач могут использоваться комбинированные подходы. Практическим примером комбинированного подхода является методика расчета *G*-кривой, базирующаяся на модификации модели Нельсона-Сигеля, которая в настоящее время применяется Московской биржей. Подробное описание сущности этой методики можно найти в [5], а также на сайте московской биржи по адресу: http://fs.moex.com/files/850.

Литература

1. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции. М.: Инфра-М, 2014.
2. Taylor S.J. Modelling stochastic volatility // Math. Finance, 1994, v. 4, pp. 183–204.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику. М.: Инфра-М, 2010.
4. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. М.: Финансы и статистика, 2003.
5. Гамбаров Г., Шевчук И., Балабушкин А. Оценка срочной структуры процентных ставок // Рынок ценных бумаг. 2004. № 11, 13.
6. Chan K.C., Sanders A.B. An empirical comparison of alternative models for the short-term interest rate // Journal of Finance. 1992, v. 47, No. 3, pp. 1209–1227.
7. Vasicek O. An equilibrium characterisation of the term structure // Journal of Financial Economic. 1977, v. 5, pp. 177–188.

Reference

1. Sharp U., Aleksander G., Bjejli Dzh. Investment [Investicii]. Moscow, Infra-M, 2014.
2. Taylor S.J. Modelling stochastic volatility // Math. Finance. 1994, v. 4, pp. 183–204.
3. Dougerti K. Introduction to econometrics [Vvedenie v jekonometriku]. Moscow, Infra. Moscow, 2010.
4. Lukashin Ju.P. Adaptive methods of short-term forecasting [Adaptivnye metody kratkosrochnogo prognozirovanija]. Moscow, Finansy i statistika, 2003.
5. Gambarov G., Shevchuk I., Balabushkin A. Estimation of the term structure of interest rates [Ocenka srochnoj struktury procentnyh stavok]. *Rynok cennyh bumag*, 2004, No. 11, 13.
6. Chan K.C., Sanders A.B. An empirical comparison of alternative models for the short-term interest rate // Journal of Finance. 1992, v. 47, No. 3, pp. 1209–1227.
7. Vasicek O. An equilibrium characterisation of the term structure. / *Journal of Financial Economic.*, 1977, v. 5, pp. 177–188.