Особенности финансовых потоков крупных компаний и организаций

Кулик В.Л.,
студент, Финансовый университет
venya.kulik@mail.ru

Аннотация. *Автор рассматривает зависимость основных параметров p-срочных рент, т.е. рент, в которых платежи производятся p раз за один период, приведенную и наращенную величины ренты от срочности ренты. Показано, что при увеличении срочности ренты приведенная и наращенная величины ренты постнумерандо увеличиваются, а ренты пренумерандо уменьшаются. В пределе $p \to \infty$ обе ренты переходят в непрерывную ренту, платежи которой осуществляются непрерывно. Важность данного рассмотрения связана с тем фактом, что в крупных организациях и компаниях потоки платежей (частным случаем которых и являются ренты) являются квазинепрерывными, т.е. осуществляются через очень малые промежутки времени. Исследовано взаимное расположение приведенной и наращенной величин p-срочных рент и непрерывной ренты. Показано, что данные величины для непрерывной ренты находятся вблизи середины промежутка между значениями для рент постнумерандо и пренумерандо, всегда незначительно (до 0,6%) ближе к первой.*
Ключевые слова: *p-срочные ренты; непрерывные ренты; финансовые потоки крупных организаций.*

Features of Financial Flows of Large Companies and Organizations

Kulik V.L.

Abstract. *The author examines the dependence of the basic parameters of a p-term rent i.e. rent, in which payments are to be made per period p times shown and raised up values rents from the urgency of rents. It is shown that when increasing the urgency of rents and values shown accreted rents postnumerando rent increase, and prenumerando. In the limit both rents moving in a continuous annuity, payments which are carried out continuously. The importance of this consideration is related to the fact that in large organisations and companies streams of payments (which are a special case of rents) are pseudo-continuous, i.e. are performed through a very small intervals. The following arrangement is investigated and accrued values p-term rent and continuous annuity. It is shown that the values for the continuous annuities are near the middle of the interval between the values for prenumerando and postnumerando rents, always slightly (up 0.6%) closer to the first.*
Keywords: *r-immediate annuity; annuity; continuous financial flows of large organizations.*

Научный руководитель: ***Брусов П.Н.,*** *доктор физико-математических наук, профессор Департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий Финансового университета.*

В крупных организациях и компаниях потоки платежей являются квазинепрерывными, т.е. осуществляются через очень малые промежутки времени. В данной статье мы изучаем непрерывные ренты и их связь с p-срочными рентами и обсуждаем использование полученных результатов для оценки основных параметров финансовых потоков больших компаний и организаций.

Когда рентный платеж R производится не один раз за период, а разбит на p одинаковых платежей, то соответствующий поток платежей для ренты постнумерандо имеет вид

$$CF = \{(R/p,\ 1/p),\ (R/p,\ 2/p),\ \ldots,\ (R/p,\ n-1/p)),\ (R/p,\ n)\} \tag{1}$$

и называется *p-срочной рентой* (*рис. 1, 2*).

1. *P*-срочная рента

Найдем приведенную величину p-срочной ренты постнумерандо. Всего за n лет производится np платежей по R/p каждый. Приводя их к $t = 0$, получаем *приведенную стоимость p-срочной ренты*:

$$A^{(p)} = \frac{R}{p(1+i)^{1/p}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-np/p}}{1-(1+i)^{-1/p}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}. \tag{2}$$

Множитель

$$a_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} \tag{3}$$

называется *коэффициентом приведения p-срочной ренты*.

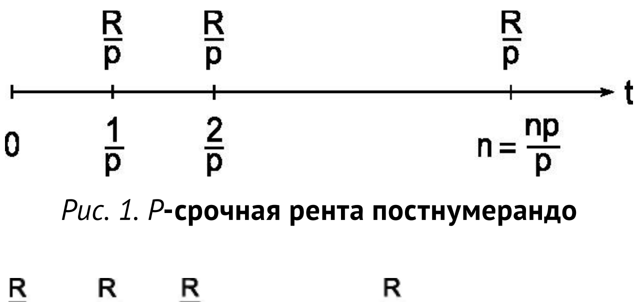


Рис. 1. P-**срочная рента постнумерандо**

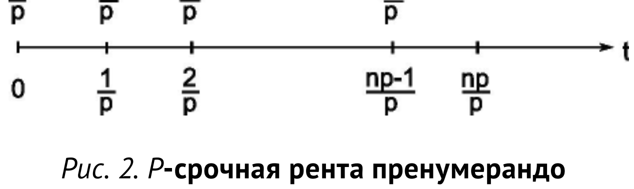


Рис. 2. P-**срочная рента пренумерандо**

Для *наращенной величины p-срочной ренты* имеем

$$S^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = Rs_{\overline{n}|i}^{(p)}. \tag{4}$$

Множитель

$$s_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1} \tag{5}$$

называется *коэффициентом наращения p-срочной ренты*.

Связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты имеет такой же вид, как и для обычной годовой ренты:

$$S^{(p)} = A^{(p)} \cdot (1+i)^{n}. \tag{6}$$

2. p-срочная рента (случай $k \neq p$)

Рассмотрим наиболее общий случай — p-срочную ренту с начислением процентов k раз в году. Для *наращенной величины p-срочной ренты* имеем

$$S^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i/k)^{(k/p)(np)}-1}{(1+i/k)^{k/p}-1} = R \cdot \frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} = Rs_{\overline{kn}|i/k}^{(p)}. \tag{7}$$

Для приведенной стоимости ренты имеем

$$A^{(p)} = R \cdot \frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p[(1+i/k)^{k/p}-1]} = Ra_{\overline{kn}|i/k}^{(p)}. \tag{8}$$

3. Непрерывная рента

Переходя к пределу при $p \to \infty$, получим непрерывный поток платежей, так называемую *непрерывную ренту*.

Находя предел $A^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}$ при $p \to \infty$, получим выражение для приведенной величины непрерывной ренты:

$$A^{(\infty)} = \lim_{p\to\infty} A^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \tag{9}$$

Коэффициент приведения равен

$$a_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \qquad (10)$$

Для наращенной суммы и коэффициента наращения непрерывной ренты легко получаем из (9) и (10) следующие формулы:

$$S^{(\infty)} = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)} \times (1\ +i)^n = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)};$$

$$s_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \frac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)}. \qquad (11)$$

Из полученных формул видно, что переход от дискретных рент к непрерывным приводит к увеличению коэффициентов приведения и наращения в $i/\ln(1+i)$ раз, т.е. имеем следующую связь между коэффициентами:

$$a_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \frac{i}{\ln(1+i)}\, a_{\overline{n}|i}\,,\ s_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \frac{i}{\ln(1+i)}\, s_{\overline{n}|i}\,. \qquad (12)$$

4. Зависимость основных параметров p-срочных рент от срочности ренты

Покажем качественно, что при увеличении срочности ренты постнумерандо приведенная и наращенная величины ренты увеличиваются. Сравним две ренты постнумерандо — годовую и полугодовую (*рис. 3, 4*).

В случае годовой ренты в течение первого периода проценты не начисляются, поскольку первый платеж произведен в конце этого периода. В случае же полугодовой ренты за вторую половину первого периода (1/2;1) проценты начисляются на платеж $R/2$. Далее за вторую половину второго периода (3/2;2) проценты в случае годовой ренты начисляются на платеж R, а в случае полугодовой ренты — на платеж $3R/2$ и т.д. Таким образом, в случае полугодовой ренты проценты за вторые половины всех периодов начисляются на платежи на $R/2$ большие, чем в случае годовой ренты, в то время как за первые половины всех периодов для обеих рент проценты начисляются на равные платежи. Это означает, что при переходе от годовой ренты к полугодовой приведенная и наращенная величины ренты постнумерандо увеличиваются.

Покажем теперь, что при увеличении срочности ренты пренумерандо приведенная и наращенная величины ренты уменьшаются.

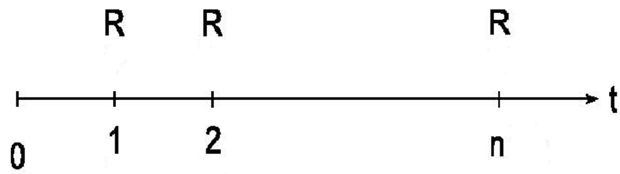


Рис. 3. **Годовая p-срочная рента постнумерандо**

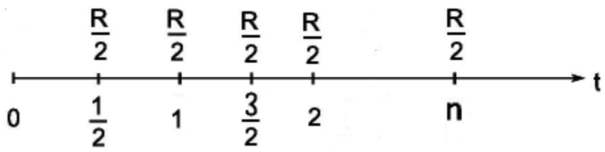


Рис. 4. **Полугодовая p-срочная рента постнумерандо**

Как и в случае ренты постнумерандо, сравним две ренты пренумерандо — годовую и полугодовую (*рис. 5*, *6*).

В случае годовой ренты в течение первого периода проценты начисляются на платеж R. В случае же полугодовой ренты за первую половину первого периода (1/2;1) проценты начисляются лишь на платеж $R/2$ (а не на R), и только за вторую — на R. Далее за первую половину второго периода (1;3/2) проценты в случае годовой ренты начисляются на платеж $2R$, а в случае полугодовой ренты — на платеж $3R/2$ и т.д. Таким образом, в случае полугодовой ренты проценты за первые половины всех периодов начисляются на платежи на $R/2$ меньшие, чем в случае годовой ренты, в то время как за вторые половины всех периодов

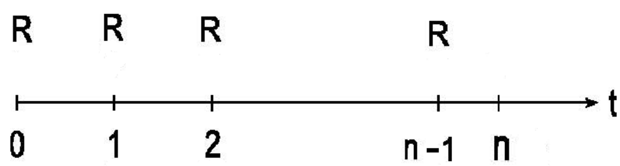


Рис. 5. **Годовая p-срочная рента пренумерандо**

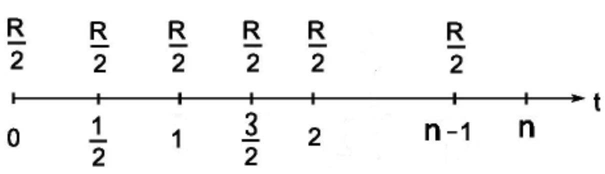


Рис. 6. **Полугодовая p-срочная рента пренумерандо**

для обеих рент проценты начисляются на равные платежи. Это означает, что при переходе от годовой ренты к полугодовой приведенная и наращенная величины ренты постнумерандо уменьшаются.

Полученные результаты можно проиллюстрировать графически (*рис. 7*). При увеличении срочности ренты приведенная (и наращенная) величины ренты постнумерандо увеличиваются, а ренты пренумерандо — уменьшаются. В пределе $p \to \infty$ обе ренты переходят в непрерывную ренту, платежи которой осуществляются непрерывно.

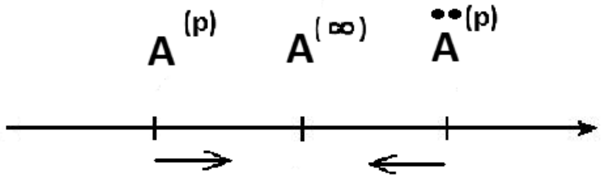


Рис. 7. **Связь приведенных величин *p*-срочных рент постнумерандо и пренумерандо с приведенной величиной непрерывной ренты**

5. Взаимное расположение приведенной и наращенной величин *p*-срочных рент и непрерывной ренты

Теперь исследуем взаимное расположение приведенной и наращенной величин *p*-срочных рент и непрерывной ренты.

Для этого исследуем зависимость величины

$$\Delta = \frac{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}{\ln(1+i)} - \frac{1+(1+i)^{1/p}}{2}, \qquad (13)$$

характеризующей относительное расстояние между $A^{(\infty)}$ и серединой между $A^{(p)}$ и $\ddot{A}^{(p)}$:

1) от процентной ставки i при фиксированной срочности p;

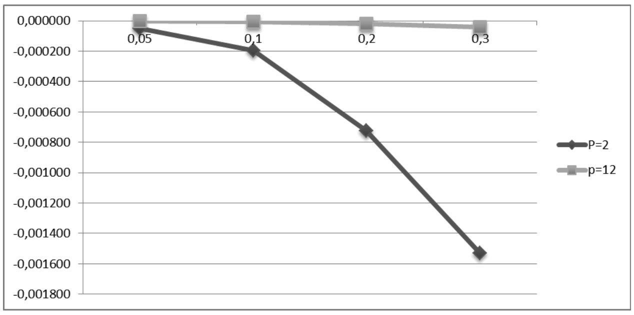
2) от срочности p при фиксированной процентной ставке i.

5.1. Зависимость — от процентной ставки i при фиксированной срочности p

DELTA (*i*)

P	*i*	DELTA
2	0,05	−0,000050
2	0,1	−0,000194
2	0,2	−0,000725
2	0,3	−0,001532

P	i	Delta
12	0,05	−0,000001
12	0,1	−0,000005
12	0,2	−0,000019
12	0,3	−0,000040



5.2. Зависимость — от срочности p при фиксированной процентной ставке i

DELTA (*P*)

P	*i*	DELTA
1	0,05	−0,000203
4	0,05	−0,000012
12	0,05	−0,000001
100	0,05	0,000000

P	*i*	DELTA
1	0,1	−0,000794
4	0,1	−0,000048
12	0,1	−0,000005
100	0,1	0,000000

P	*i*	DELTA
1	0,2	−0,003037
4	0,2	−0,000177
12	0,2	−0,000019
100	0,2	0,000000
P	i	DELTA
1	0,3	−0,006552
4	0,3	−0,000371
12	0,3	−0,000040
100	0,3	−0,000001

Из таблиц и графиков видно, что как приведенная, так и наращенная величины для непрерывной ренты находятся вблизи середины промежутка между значениями для рент постнумерандо и пренумерандо, всегда незначительно (до 0,6%) ближе к значению для первой.

Разность приведенных (наращенных) величин p-срочных рент пренумерандо и постнумерандо, пропорциональная $\left[(1+i)^{1/p}-1\right]$, при $p \to \infty$ стремится к нулю, при этом обе величины становятся близкими приведенной (наращенной) величине непрерывной ренты (9), (11). Это означает, что для оценки приведенной (наращенной) величин финансовых потоков больших компаний и организаций можно использовать любую из четырех формул (2), (4), (9), (11), но проще это делать с помощью формул для непрерывной ренты (9), (11).

Литература

1. Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В. Финансовая математика. М.: Кнорус, 2016.
2. Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В. Задачи по финансовой математике. М.: Кнорус, 2016.
3. Брусов П.Н., Филатова Т.В., Орехова Н.П. Справочник по финансовой математике. М.: Инфра-М, 2014.
4. Brusov P., Filatova T., Orehova N., Eskindarov M. Modern corporate finance, investments and taxation, Springer International Publishing, Switzerland, 2015. 373 p.
5. Brusov P., Filatova T., Orehova N., Kulik V. The golden age of the company (Three colors of company's time). Journal of Reviews on Global Economics, 2015, vol. 4, pp. 21–42.
6. Брусов П.Н., Филатова Т.В., Орехова Н.П., Кулик В.Л. Современные инвестиционные модели с равномерным погашением долга и их применение // Финансы и кредит. 2015. № 9 (633). С. 21–27.