ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

CC BY 4.0

DOI: 10.26794/2587-5671-2019-23-6-117-130
УДК 336.717(045)
JEL G12

Использование фрактальных моделей ценовой динамики активов в целях управления финансовыми рисками

И.З. Ярыгина[a], **В.Б. Гисин**[b], **Б.А. Путко**[c]
Финансовый университет, Москва, Россия
[a] http://orcid.org/0000-0001-8684-1684 [b] https://orcid.org/0000-0002-7269-0587;
[c] http://orcid.org/0000-0002-3330-9819

АННОТАЦИЯ

Представлены результаты анализа проблем и перспектив использования теории фрактального рынка в целях математического прогнозирования ценовой динамики активов в рамках реализации стратегии управления финансовыми рисками. Цель статьи — раскрытие особенностей стоимости банковских активов и разработка рекомендаций, направленных на оценку финансовых рисков на базе использования математических методов прогнозирования экономических процессов. Использованы теоретические и эмпирические методы исследования. Раскрыты особенности математического моделирования экономических процессов, связанных с ценообразованием активов в условиях волатильного рынка. Доказано, что использование финансовой математики в банковской практике способствует формированию условий стабильного развития экономики. Методы математического моделирования ценовой динамики финансовых активов строятся на содержательной гипотезе и подкрепляются использованием адекватного аппарата фрактальных парных моделей ценообразования в целях раскрытия особенностей рыночных отношений субъектов хозяйствования. По мнению авторов, использование прогнозных моделей в целях минимизации финансовых рисков производных финансовых инструментов имеет хорошие перспективы. Сделан вывод, что использование рассматриваемых методик способствует управлению финансовыми рисками и улучшению прогнозов, в том числе операций с деривативами. Кроме того, параметры фрактальной волатильности, исследуемые в работе, показали предсказательную силу относительно экстремальных явлений на финансовых рынках, таких как крах американского инвестиционного банка LehmanBrothers в 2008 г. Актуальность статьи обусловлена тем, что благоприятный инвестиционный климат и использование современных методов финансирования во многом зависят от эффективного управления финансовыми рисками.

Ключевые слова: банковская деятельность; оценка стоимости активов; экономико-математические методы; управление финансовыми рисками; хеджирование

Для цитирования: **Ярыгина И.З., Гисин В.Б., Путко Б.А. Использование фрактальных моделей ценовой динамики активов в целях управления финансовыми рисками. *Финансы: теория и практика*. 2019;23(6):117-130. DOI: 10.26794/2587-5671-2019-23-6-117-130**

ORIGINAL PAPER

Fractal Asset Pricing Models for Financial Risk Management

I.Z. Yarygina[a], **V.B. Gisin**[b], **B.A. Putko**[c]
Financial University, Moscow, Russia
[a] http://orcid.org/0000-0001-8684-1684; [b] https://orcid.org/0000-0002-7269-0587;
[c] http://orcid.org/0000-0002-3330-9819

ABSTRACT

The article presents the analysis findings of the problems and prospects of using the fractal markets theory to mathematically predict the price dynamics of assets as part of a financial risk management strategy. The aim of the article is to find out the features of value of bank assets and to develop recommendations for assessing financial risks

based on mathematical methods for forecasting economic processes. Theoretical and empirical research methods were used to achieve the aim. The article reveals the features of mathematical modeling of economic processes related to asset pricing in a volatile market. It was proved that using financial mathematics in banking contributes to the stable development of the economy. Mathematical modeling of the price dynamics of financial assets is based on a substantive hypothesis and supported by an adequate apparatus of fractal pair pricing models in order to reveal specific market relations of business entities. According to the authors, the prospects of using forecast models to minimize the financial risks of derivative financial instruments are positive. The authors concluded that the considered methods contribute to managing financial risks and improving forecasts, including operations with derivatives. Besides, the studied fractal volatility parameters proved the predictive power regarding extreme events in financial markets, such as the bankruptcy of Lehman Brothers investment bank in 2008. The relevance of the article is due to the fact that the favorable investment climate and the use of modern financing methods largely depend on the effective financial risk management.
Keywords: banking; asset valuation; economic and mathematical methods; financial risk management; hedging

For citation: **Yarygina I.Z., Gisin V.B., Putko B.A. Fractal asset pricing models for financial risk management. *Finance: Theory and Practice.* 2019;23(6):117-130. DOI: 10.26794/2587-5671-2019-23-6-117-130**

ВВЕДЕНИЕ

Мировой опыт показал, что традиционный подход к исследованию ценовой динамики активов основан на выявлении закономерностей экономического характера и математическом моделировании проявления таких закономерностей в целях управления финансовыми рисками. Так, например, классическая модель Блэка-Шоулза-Мертона связана с гипотезой эффективного рынка (EMH), которая предполагает, что цена актива обусловлена множественными случайными факторами. В свою очередь, математическая модель ценовой динамики активов способствует раскрытию ее особенностей. Использование такой модели на практике позволяет минимизировать финансовые риски и обеспечивает безопасность банковской деятельности в условиях волатильного рынка.

Важно отметить, что финансовая математика за последнее столетие доказала, что математическая модель, чтобы оказаться жизнеспособной, должна строиться на содержательной гипотезе и подкрепляться адекватным математическим аппаратом. Модели, не содержащие обеих этих компонент, «непарные» модели, оказываются нежизнеспособными.

Так, например, математический аппарат, использованный Башелье в 1900 г. в его модели ценовой динамики, опередил свое время, и модель Башелье оставалась невостребованной более 60 лет. После разработки гипотезы эффективного рынка модель Башелье послужила основой для построения современных моделей ценообразования.

В некотором смысле обратный пример дает теория фрактального рынка, которая возникла одновременно с гипотезой эффективного рынка [1]. Но математический аппарат этой теории (модель, основанная на фрактальном броуновском движении) «не поспевал» за содержательной концепцией [2]. Отсутствие адекватной математической модели фрактальной ценовой динамики на момент формирования гипотезы фрактального рынка помешало формированию полноценной теории.

Попытки пересмотра классической теории обусловлены особенностями развития рыночных отношений и наблюдаемой волатильностью ценовой динамики активов под влиянием стилизованных факторов участников рынка [3], а именно:

- избыточной волатильностью доходности активов, которая не поддается оценке традиционными методами экономических процессов;
- появлением «тяжелых хвостов» распределений, указывающих на асимметрию рынка, способствующего росту рисков и вероятности возникновения экстремальных событий;
- автокорреляция доходности активов, при которой однородные активы могут демонстрировать отсутствие зависимости приращений доходности и наличие значимой долговременной памяти экономических процессов, способных найти проявление в однородных процессах рыночных отношений;
- кластеризация волатильности, в рамках которой за скачками доходности следуют значимые для рынка и ценовой динамики активов скачки противоположной направленности, способствующие вероятности значительных убытков;
- связь торгового объема активов и волатильности рынка, при которой наблюдается не только положительная корреляция торгового объема и волатильности, но и сходный тип долговременной памяти.

Изучение этих явлений началось в 80-х гг. XX в. [4]. Однако математическое моделирование отдельных стилизованных фактов впервые проведено исследователями в начале XXI в. [5–7]. В настоящее время представители различных научных школ показали, что особенности развития рынка напрямую связаны с оценкой рисков и необходимостью использования прогнозных математических моделей в целях адекватных решений управления активами, направленных на стабильное проявление экономических процессов. Важно отметить, что универсальная математическая модель ценовой динамики рыночных активов пока не найдена. Например, исследования, проведенные в рамках Европейского центрального банка в 2014 г. на базе анализа данных развитых экономик стран Евросоюза, направлены на поиск теоретической модели, объясняющей наблюдаемые явления рыночных отношений [8]. В свою очередь, использовать рассматриваемый подход в целях прогнозирования процессов развивающихся рынков не представляется возможным. Кроме того, исследование ценовой динамики криптовалют, проведенное представителями Европейской математической школы в 2017 г., показало особенности прогнозирования использования активов в киберпространстве [9].

В этой связи интересно наблюдение, сделанное в 2019 г. в сфере стохастической финансовой математики [10]. Анализируя стилизованные факты экономического развития на большом статистическом материале, авторы пришли к выводу, что развивающиеся рынки ведут себя подобно рынкам, на которых реализуются разнообразные политические прогнозы, что подтверждает роль общей и специализированной информации в банковском деле. Попытка связать стилизованные факты рыночных явлений с поведенческими особенностями экономических агентов делается с использованием многоагентных моделей, в том числе с участием искусственного интеллекта, в которых участники рыночных отношений реализуют относительно рациональную стратегию управления активами, направленную на поддержание прибыли и управление рисками [11–13]. Впрочем, критические замечания в отношении многоагентных моделей прогнозирования, прежде всего в условиях развивающихся рынков, остаются справедливыми [14].

Важно отметить, что в сложных моделях прогнозирования высоковолатильного нетрадиционного рынка перспективным является использование «нестандартных» моделей. Так, основная теорема ценообразования динамики активов доказана для рынков, относительно которых применение математического моделирования не представлялось возможным [15].

В 2018 г. представители научной школы Университета Иерусалима ввели понятие полно-неполного рынка и предприняли попытку математического прогнозирования стратегии хеджирования активов [16]. В связи с этим важно отметить, что в целях расчета ценовой динамики активов и управления финансовыми рисками необходимо использовать всестороннюю информацию о реальных ценах и виртуальных производных финансовых инструментов.

Многообразие методов и моделей, используемых в современной финансовой математике, показывает, что объединяющая концепция, обобщающая классическую и объясняющая стилизованные факты рыночных отношений, в современной науке не представлена. Наиболее системное и последовательное объяснение стилизованные факты экономического развития получают в рамках концепции фрактального рынка, которая предполагает зависимость прогнозного значения ценовой динамики активов от истории развития рынка. Настоящая статья посвящена анализу этой концепции.

МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА САМОПОДОБНЫХ ПРОЦЕССАХ

Основным предположением в теории фрактального рынка служит предположение о самоподобии динамических ценовых рядов активов. Ценовая динамика активов финансового рынка моделируется, как правило, с использованием самоподобных процессов. В пользу этого свидетельствуют статистические наблюдения и экономические аргументы [17].

Самоподобие является следствием присутствия на рынке большого числа участников с различными инвестиционными горизонтами и оперирующих в одинаковых условиях. Более того, на своих инвестиционных горизонтах участники рынка действуют сходным образом, что обеспечивает своеобразную инвариантность характеристик рынка относительно временного масштаба использования активов. Статистической характеристикой масштабной инвариантности служит показатель Херста H [17], значение которого находится в промежутке от нуля до единицы. Для броуновского движения, лежащего в основании классических моделей волатильного рынка, значение показателя Херста равно 0,5. Если значение H находится в промежутке от 0,5 до 1, временной ряд ценовой характеристики активов является персистентным (трендоустойчивым); если H находится в промежутке от 0 до 0,5, временной ряд является антиперсистентным и демонстрирует свойство возврата к среднему значению.

Математический аппарат описания самоподобных случайных процессов предложен А.Н. Колмогоровым. Разработка на этой основе методов получения точных числовых прогнозов рынка, связанных с процессами ценообразования активов, ведется уже около полувека, однако решающих результатов типа модели Блэка-Шоулза до сих пор получить не удалось. Причина в том, что использование фрактального броуновского движения для моделирования ценообразования активов на фондовом рынке сталкивается с необходимостью решения трудной задачи. В отличие от классического математического моделирования, в моделях, основанных на фрактальном броуновском движении, имеются арбитражные возможности, которые не поддаются описанию рациональной теорией ценообразования.

Среди исследователей в течение долгого времени доминировало убеждение, что наличие арбитражных возможностей неразрывно связано с автокорреляцией и памятью финансовых временных рядов. Более глубокое проникновение в математику фрактального рынка показывает, что безарбитражность, автокорреляция и самоподобие обусловлены разными факторами. В [18] приведены примеры гауссовых случайных процессов, которые обладают такой же долговременной памятью, как и процессы, основанные на фрактальном броуновском движении с показателем Херста больше 0,5, и в то же время ведут к безарбитражным моделям рынка. Заметим, что для построения ценовой модели в [18] была использована идея скользящего среднего, что удачно увязывает математический аппарат с понятными финансисту реалиями рынка.

Тем не менее большинству исследователей представляется более перспективным использование для построения рыночной модели именно фрактального броуновского движения. Обойти проблему с наличием арбитражных возможностей помогает замена интегрирования по Ито интегрированием по Вику [19, 20]. Практика показала, что до настоящего времени для модифицированного интегрирования не удалось найти убедительной экономической интерпретации, поэтому к использованию математического моделирования с использование интегрирования по Вику целесообразно относиться с осторожностью.

Решение задачи минимизации финансовых рисков с использованием математического моделирования ценовых показателей производных финансовых инструментов может быть найдено на базе более полного учета особенностей торговли финансовыми инструментами на конкретном финансовом рынке. Фрактальный рынок с пропорциональными транзакционными издержками является безарбитражным. Точное определение цены производных финансовых инструментов на таком рынке принципиально невозможно, удается лишь более или менее точно установить границы цен, не допускающих арбитража. Однако теория фрактального рынка привлекательна для его участников в связи с возможностью ее использования для минимизации финансовых рисков управления активами.

Классические прогнозные модели предполагают, что ценовая динамика рискового актива описывается случайным процессом с лежащим в его основе броуновским движением. А именно, пусть $S(t)$ — цена рискового актива в момент времени t. Тогда доходность за промежуток времени Δt представима в следующем виде:

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)}=\mu\Delta t+\sigma\Delta W(t), \qquad (1)$$

где $\mu+\frac{\sigma^2}{2}$ — ожидаемая доходность; σ — волатильность доходности; $\Delta W(t)=W(t+\Delta t)-W(t)$; $W(t)$ — так называемый винеровский случайный процесс (броуновское движение). Величина $\Delta W(t)$ считается нормально распределенной со средним значением ноль и дисперсией Δt. При этом предполагается, что для разных значений t приращения $\Delta W(t)$ независимы (если только временные интервалы не перекрываются).

Винеровские процессы относятся к классу самоподобных случайных процессов. В общем случае случайный рыночный процесс является самоподобным, если изменение временного масштаба приводит к изменению пространственного масштаба, а вероятностные характеристики процесса остаются неизменными. Более точно случайный процесс $X(t)$, $t\geq 0$, называется самоподобным, если для всякого $a>0$ можно найти $b>0$ так, что случайные процессы $X(at)$ и $bX(t)$ имеют одинаковые вероятностные характеристики. Если к тому же параметр b связан с параметром a так, что $b=a^H$ для некоторой постоянной H при всех $a>0$, постоянную H называют показателем Херста и говорят, что процесс самоподобный с показателем Херста H. Для винеровского процесса показатель Херста равен 0,5.

Если считать изменения доходности на непересекающихся временных интервалах независимыми, в моделях используются процессы Леви. Модели, основанные на процессах Леви, дают достаточно хорошую аппроксимацию реальных ценовых рядов, в ряде случаев гораздо лучшую, чем классические модели [21]. Их применение позволяет учесть такие особенности финансовых временных рядов, как асимметрия и тяжелые хвосты распределений вероятности, и тем самым более адекватно оценивать риски (например, игнорирование тяжелых хвостов ведет к недооценке рисков, связанных с экстремальными событиями). Достигается это за счет того, что процессы Леви определяются большим числом параметров, чем винеровские процессы. Как правило, используются четыре параметра. Два из них в определенном смысле аналогичны параметрам винеровского процесса: μ — параметр положения (аналог среднего значения, которое у процесса Леви может быть и не определено); σ — параметр масштаба (аналог среднего отклонения, которое у процесса Леви также может быть и не определено). Еще два параметра позволяют учесть особенности временных рядов, не улавливаемые винеровскими процессами: β — параметр скошенности (позволяет учитывать асимметрию, проявляющуюся в различиях между распределениями вероятностей в зоне потерь и в зоне превышения ожиданий).

В работе [21] показано, что использование процессов Леви для описания доходностей мировых фондовых индексов дает вполне удовлетворительные результаты. При этом удается учесть динамические особенности финансовых рядов, ускользающие в классических моделях. Применительно к российскому рынку получаются похожие результаты [22].

Важным свойством модели является ее прогностическая способность. Для того чтобы модель могла считаться качественной и прогностически ценной, необходимо, чтобы она была достаточно устойчива относительно небольших колебаний исходных данных и относительно небольших сдвигов вдоль временной оси. В этом отношении увеличение числа параметров позволяет добиться более точной калибровки на исторических данных, но устойчивость оценок оказывается проблематичной. Анализ данных показывает, что для периодов в 1–2 месяца хорошие результаты показывают модели с нормальным распределением. При продолжительности прогнозного периода более 200 дней, как классические модели, так и основанные на процессах Леви, оказываются не вполне надежными. Наконец, для периодов в 100–150 дней модели, основанные на процессах Леви, дают лучший результат [23].

Заметим, что применение неклассических моделей для российского рынка более существенно. Например, для индекса DJA распределения в соответствующих процессах Леви близки к нормальным, и те и другие согласуются с эмпирическими данными. Для индекса РТС это уже не так в связи с высокими транзакционными издержками (к ним мы относим и издержки, обусловленные недостаточной ликвидностью).

Основной пример самоподобного случайного процесса с зависимыми приращениями дает фрактальное броуновское движение. Зависимость приращений позволяет моделировать с помощью фрактального броуновского движения процессы, обладающие долговременной памятью. Тем самым в рамках таких моделей находят объяснение явления, связанные с образованием трендов.

Применение моделей финансовых временных рядов, основанных на самоподобных процессах, сталкивается с принципиальными трудностями независимо от того, о каких процессах идет речь: с зависимыми или с независимыми приращениями. Дело в том, что ценообразование в классической модели Блэка-Шоулза-Мертона базируется на том, что этой модели для ценовых случайных процессов имеется эквивалентная мартингальная вероятностная мера. Содержательно существование такой меры можно интерпретировать как существование в определенном смысле рационального прогноза, а цена производного инструмента определяется как бы с учетом этого прогноза относительно его будущих цен. В общем случае для самоподобных случайных процессов с независимыми приращениями имеется, вообще говоря, бесконечное семейство «рациональных прогнозов». Соответственно появляется интервал цен, которые могут трактоваться как «справедливые». В некоторых случаях, но далеко не всегда, можно оценить границы этих интервалов. Но зачастую эти границы оказываются малосодержательными. В моделях, использующих фрактальное броуновское движение, при показателе Херста, отличном от 0,5 «рациональный прогноз» (эквивалентная мартингальная мера) вообще отсутствует, и имеются арбитражные возможности. Строить модели ценообразования в рамках таких моделей можно только с учетом особенностей реального функционирования финансового рынка. К числу таких особенностей относятся транзакционные издержки.

В классических моделях цена производного инструмента определяется с помощью реплицирующих стратегий. При наличии транзакционных издержек точная репликация может оказаться слишком дорогой, и она заменяется приближенной, получаемой в результате решения задачи стохастического управления методами динамического программирования. Решение этой задачи во многих случаях оказывается слишком сложным (даже с учетом сегодняшних вычислительных мощностей). Упрощения достигаются за счет сужения класса допустимых инвестиционных стратегий, например реструктуризация портфеля может осуществляться только через фиксированные промежутки времени. В этом случае, применяя верхние и нижние хеджи, удается получить более или менее приемлемые оценки границ ценовых коридоров [24]. Принципиально важные результаты получены в [25], где удалось получить оценки границ ценовых коридоров при достаточно общих предположениях. Авторам удалось связать объемы торгов, ликвидность и динамические параметры ценового движения и получить оценки, позволяющие строить оптимальные торговые стратегии [26]. Эти работы делают актуальным вопрос о более последовательном использовании в моделях так называемого рыночного времени. Технически это понятие использовалось во многих работах. Полученные в этих работах результаты открывают новые возможности для применения налога Тобина. Исследования, на наш взгляд, достаточно ясно указывают на то, что течение времени в моделях финансовых рынков целесообразно увязывать с финансовыми событиями, а не только с вращением Земли вокруг Солнца [25, 26].

Отметим, что при прогнозировании ценовой динамики активов в целях управления финансовыми рисками в сложных условиях рынка перспективным является использование фрактального метода моделирования.

ФРАКТАЛЬНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И МОДЕЛИ РЫНКА

Формально фрактальное броуновское движение с индексом Херста H, $0<H<1$ — это случайный процесс $\{B^H(t)\}$, где случайные величины $B^H(t)$ распределены нормально для всех моментов времени t и при этом $B^H(0)=0$, среднее значение $B^H(t)$ равно нулю для любого t, а ковариация $B^H(t)$ и $B^H(s)$ имеет следующий вид:

$$E\left[B^H(t)B^H(s)\right]=\frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}\right). \quad (2)$$

Эквивалентным образом можно считать, что дисперсия $B^H(t)$ пропорциональна t^{2H} (в случае винеровского процесса дисперсия пропорциональна t).

Траектория фрактального броуновского движения является фрактальным объектом, имеющим фрактальную размерность $D=2-H$.

Используя фрактальное броуновское движение, можно строить модели рынка, которые обладают многими важными свойствами, проявление которых демонстрируют реальные рынки. Будем для краткости называть такие модели фрактальными рынками.

Одной из наиболее важных и изучаемых является модель, аналогичная классической (1), в которой динамика цены рискового актива описывается уравнением вида

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)}=\mu\Delta t+\sigma\Delta B^H(t). \quad (3)$$

Поведение автоковариационной функции доходности с лагом τ подобно поведению функции $2H(2H-1)\tau^{2H-2}$ (мы берем период, равный единице). При всех значениях показателя Херста автокорреляция стремится к нулю с увеличением временного лага.

При $H>0{,}5$ автокорреляция положительная и спадает тем медленнее, чем больше значение H. Например, при $H=0{,}8$ автокорреляция остается достаточно заметной (примерно 0,2) даже при $\tau=10$. Этот случай соответствует персистентности.

При $H<0{,}5$ автокорреляция становится отрицательной при $\tau<1$, достигает минимального значения и затем с увеличением лага стремится к нулю. Этот случай соответствует антиперсистентности.

Эти свойства показателя Херста связаны с кризисными явлениями. Эмпирические наблюдения позволяют сделать вывод о том, что снижение фрактальной размерности ценовой траектории предшествует большим изменениям на рынках. В [27] проведен анализ фрактальных характеристик рынков в период до 2014 г. С учетом этого становится актуальной задача изучения динамики показателя Херста. Этой проблеме посвящены работы [28, 29], в которых введено и изучено понятие индекса фрактальности μ, связанного с показателем Херста соотношением $H\approx 1-\mu$.

Динамика индекса фрактальности допускает статистически достоверное описание и, благодаря этому, может использоваться для прогнозирования. Перспективные эконометрические подходы к описанию динамики показателя Херста предложены в [30].

ИНДЕКС ФРАКТАЛЬНОСТИ

Величины, характеризующие фрактальную структуру рынка, используются для моделирования волатильности. Цена актива рассматривается как непрерывный случайный процесс. В качестве меры волатильности на промежутке длины δ используется амплитуда $A(\delta)=h(\delta)-l(\delta)$, где $h(\delta)$ — максимальная, а $l(\delta)$ — минимальная цена на этом промежутке.

Выбираются два значения δ_0 и δ_c, причем $\delta_c=n\delta_0$. Величина δ_c обычно называется характерным масштабом. В момент времени t рассматривается промежуток $[t-\delta_c,t]$. Пусть δ — делитель характерного масштаба и кратное минимального. Тогда на отрезке имеется δ_c/δ примыкающих промежутков. Сумма амплитуд на этих промежутках обозначается $V(\delta)$. Рассматривается регрессия

$$\log V(\delta)=\alpha-\mu\log(\delta). \quad (4)$$

В [28] показано, что регрессия (4) имеет очень высокий коэффициент детерминации, почти совпадающий с единицей, в достаточно широком диапазоне

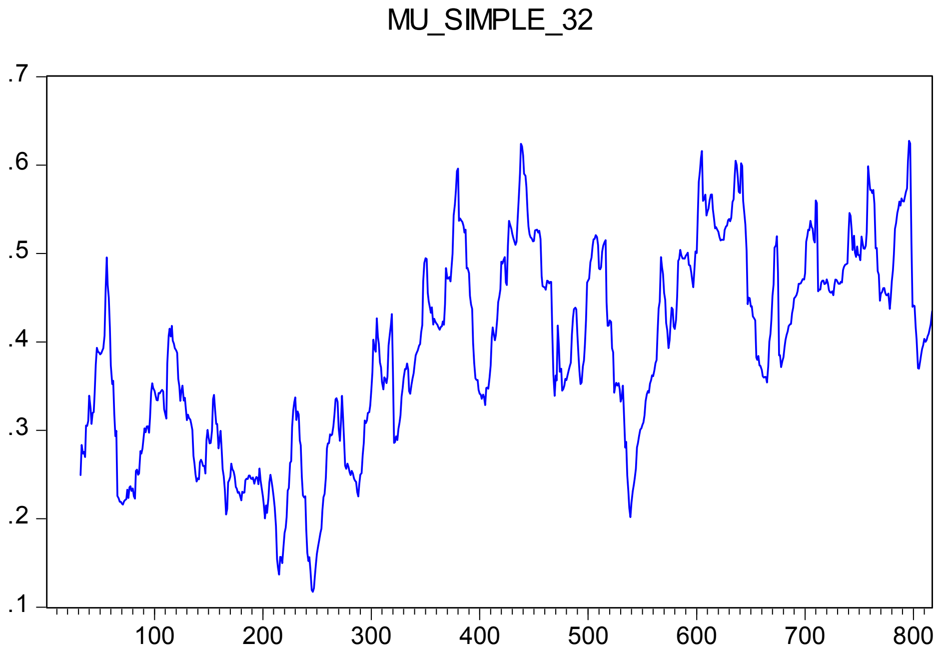

Рис. 1 / Fig. 1. **График функции** $\mu(t)$ **/ Graph of** $\mu(t)$

Источник / Source: составлено авторами / compiled by the authors.

(авторы рассматривали соотношение характерного и минимального масштаба от 8 до 1024). Таким образом, оценка μ практически не зависит от выбора делителей, и можно рассматривать динамические величины $\mu(t,\delta_0,\delta_c)$ и $\alpha(t,\delta_0,\delta_c)$. Как правило, $\delta_0 = 1$, и динамические величины обозначаются $\mu_{\delta_c}(t)$ и $\alpha_{\delta_c}(t)$.

Функция μ (в отличие от α) не зависит от основания логарифма в равенстве (4) и является внутренней характеристикой фрактальной структуры финансового ряда. В [28] величину μ называют индексом фрактальности. При стремлении минимального масштаба к нулю индекс фрактальности стремится к величине $D-1$, где D — фрактальная размерность случайного процесса цен. При этом стремление оказывается очень быстрым (быстрый выход на асимптотику), что позволяет оценивать фрактальную размерность с помощью достаточно малого количества наблюдений.

Как следствие очень высокого коэффициента детерминации регрессии (4) можно использовать упрощенные оценки параметров μ_0, α_0 (в предположении $\delta_0 = 1$):

$$\mu_s = \log_{\delta_c} V(\delta_0) - \log_{\delta_c} V(\delta_c);\ \alpha_s = \log_{\delta_c} V(\delta_0). \quad (5)$$

что дает разложение волатильности на характерном масштабе:

$$\log_{\delta_c} V(\delta_c) = \alpha_s - \mu_s \approx \alpha - \mu. \quad (6)$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

В работе [29] рассматриваются регрессионные модели составляющих волатильности α и μ, которые могут быть использованы для прогнозирования будущих динамик волатильности валютного рынка. При этом следует отметить: в то время, как в большинстве моделей предсказывается само будущее значение, но, как правило, на достаточно короткий интервал, фрактальная модель позволяет прогнозировать только направление роста величин α и μ, но на достаточно длинный интервал (от одного до восьми месяцев).

Для построения эконометрической модели используется эмпирический факт: функция $\mu(t)$ имеет достаточно четко выраженную квазициклическую структуру (*рис. 1*). Следует заметить, что квазицикличность фрактальных характеристик (в частности, самого динамического ряда Херста) отмечалась и обсуждалась на качественном уровне и ранее [1, 2]. Поскольку величина μ обладает гораздо более быстрой асимптотикой, чем оценка *R*/*S*-анализа, естественно ожидать, что квазицикличность функции $\mu(t)$ оказывается более выраженной.

Таким образом, для моделирования индекса фрактальности логично использовать периодические функции:

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{i=1}^{k} \left[a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t) \right]. \quad (7)$$

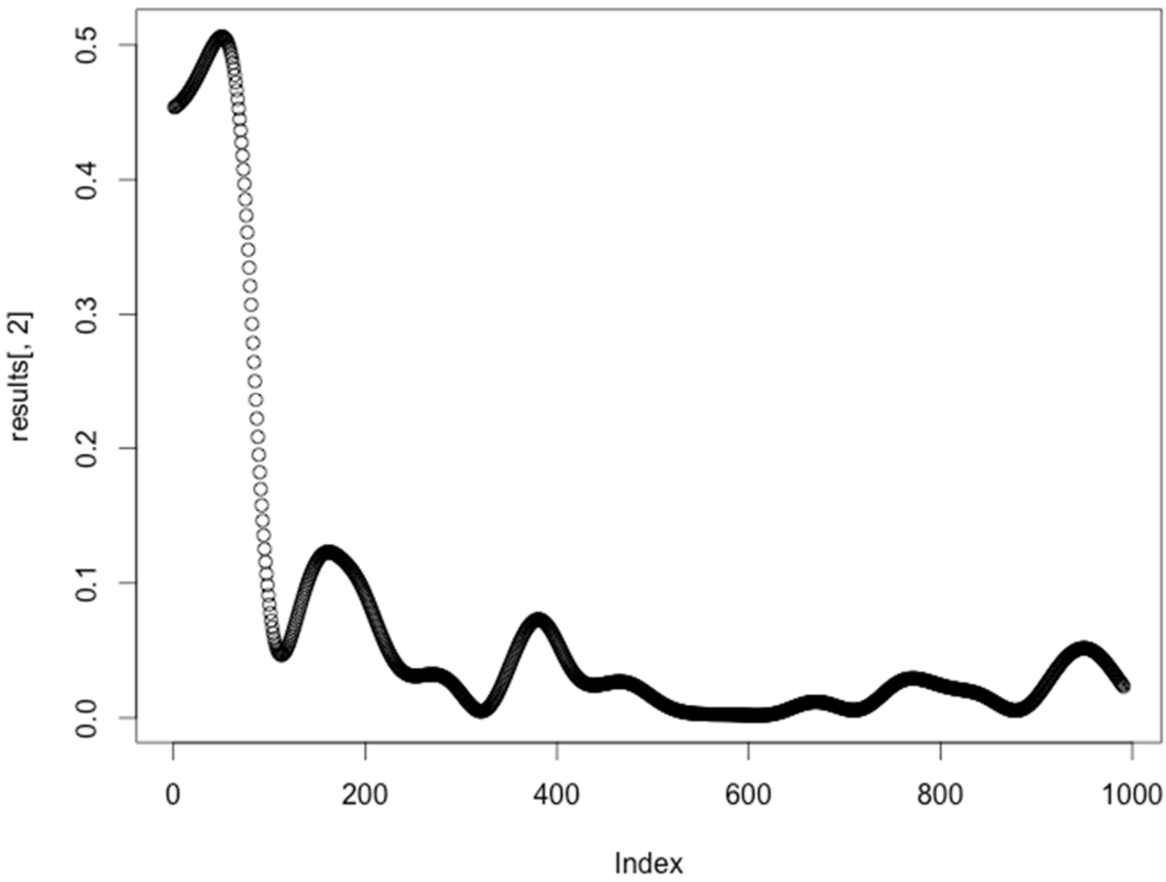

Рис. 2 / Fig. 2. **График функции $R^2(\omega)$ / Graph of $R^2(\omega)$.**
Источник / Source: составлено авторами / compiled by the authors.

Соответствующая (7) эконометрическая модель строится следующим образом. Рассматривается уравнение

$$\mu(t) = x + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t) + \varepsilon(t). \quad (8)$$

Частота ω пробегает значения от 0 до 0,1 с шагом 0,0001. Для каждого значения ω определяется коэффициент детерминации регрессии (8). Полученная при этом функция $R^2(\omega)$ имеет четко выраженные экстремумы. Ее можно получать для любого отрезка временного ряда $[T_0, T_1]$. Типичный график представлен на *рис. 2.*

Наименьший максимум, имеющий наибольшее значение коэффициента детерминации,— это главная, трендовая частота. Кроме нее, имеются частоты квазициклов — обычно их три-четыре.

Таким образом, и экстремальные частоты, и соответствующие им значения коэффициентов детерминации оказываются функциями от двух параметров: T_0 — начальной точки и длины $\Delta = T_1 - T_0$ интервала, на котором строится эконометрическая модель (ширины окна). При этом картина, изображенная на *рис. 2*, на больших интервалах значений параметров T_0, Δ не изменяется качественно и мало изменяется количественно, что подтверждает квазицикличность структуры. В то же время при некоторых значениях T_0 происходят фазовые переходы. Главная трендовая частота в (8) раздваивается с последующим «перетеканием» — затуханием исходного «горба» и нарастанием нового.

Эти идеи были использованы в [30] для прогнозирования тенденций валютного курса рубля. При этом регрессии имели достаточно высокий коэффициент детерминации: $R^2 \sim 0,7 \div 0,75$. Бэктесты модели показали, что направление тенденции курса предсказывается верно в 60–70% случаев. Очень хорошо согласованной с моделью оказалась ситуация с кризисом 2008 г.

В [31, 32] приведены данные по изучению значений показателя Херста на фондовым рынке, основанные на анализе объемного статистического материала. Эти данные в целом подтверждают указанную закономерность. В связи с этим не может не настораживать увеличение значений показателя Херста в отечественном нефтяном секторе, наблюдаемое в 2019 г. Достаточно характерные для Российского фондового рынка значения показателя Херста, близкие к 0,6 (Аэрофлот — 0,58–0,63; Газпром — 0,53–060; Сбербанк — 0,57–0,64; Роснефть — 0,53–0,57 в 2014–2018 гг.) сменились в первой половине 2019 г. более высокими (Татнефть — 0,70; Сургутнефтегаз — 0,77; Роснефть — 0,72).

Сошлемся на исследование научной школы Университета Утрехта (Нидерланды), в которой приведены оценки «нормальных» значений показателя Херста для различных секторов: информационные технологии — 0,50–0,67; финансы — 0,38–0,62; сырьевой сектор — 0,38–0,63 [33].

Важно отметить, что на фрактальном рынке отсутствует мартингальная мера и, соответственно, имеются арбитражные возможности, что связано с особенностями интеграла Ито. В математическом плане исправить ситуацию прогнозирования ценовой динамики можно, применяя интегрирование по Вику [19]. Однако указанный способ интегрирования в настоящее время не получил адекватной современным условиям рыночных отношений экономической интерпретации. Такой подход несложно пояснить, используя дискретную аппроксимацию фрактального броуновского движения, которая служит основным инструментом для проведения расчетов. Приведем краткое описание дискретной аппроксимации.

Пусть временной промежуток $[0;T]$ разбит на n равных интервалов. Для каждого n можно вычислить коэффициенты $k_{l,i}^{(n)}$, $l=1,\ldots,n$, $i=1,\ldots,l$, так, что суммы

$$B^H(t)\approx\sum_{i=1}^{l}k_{l,i}^{(n)}\xi_i, \tag{9}$$

где ξ_i — случайные величины, принимающие одно из двух значений $\{-1;1\}$, аппроксимируют значения $B^H(t)$ при значениях $t=l\cdot\frac{T}{n}$ на промежутке $[0;T]$.

Тогда

$$\Delta B^H(t)=k_{l+1,l+1}\xi_{l+1}+\sum_{i=1}^{l}\left(k_{l+1,i}-k_{l,i}\right)\xi_i \tag{10}$$

[мы опускаем индекс n в обозначении $k^{(n)}$ из (9)]. Уравнение (10) позволяет при достаточно больших n аппроксимировать цену рискового актива на фрактальном рынке.

Полагая $\Delta t=\frac{T}{n}$ и $S_0=S(0)$, получаем:

$$S(\Delta t)=S_0\left(1+\mu\Delta t+k_{11}\xi_1\right); \tag{11}$$

$$S(2\Delta t)=S(\Delta t)\left(1+\mu\Delta t+k_{2,2}\xi_2+\left(k_{2,1}-k_{1,1}\right)\xi_1\right)\ldots . \tag{12}$$

Интегрирование по Ито соответствует обычному умножению скобок. Интегрирование по Вику — такому умножению, при котором слагаемые, содержащие ξ_i^2, отбрасываются. Например, при вычислении $S(2\Delta t)$ должно быть отброшено слагаемое $k_{11}\left(k_{2,1}-k_{1,1}\right)$, получающееся при почленном перемножении (11) и (12) с учетом того, что $\xi_1^2=1$. Содержательного экономически осмысленного объяснения того, почему такие слагаемые нужно отбрасывать, пока найти не удалось. Это заставляет относиться с некоторой осторожностью к результатам, полученным с использованием интегрирования по Вику.

ВЫВОДЫ

Остановимся на результатах, связанных с ценообразованием на рынках с транзакционными издержками. В исследованиях [25, 34] удалось найти подход к описанию оптимальных стратегий на рынках с транзакционными издержками.

При достаточно общих предположениях доля капитала, вложенного в рисковую компоненту, должна находиться внутри границ

$$\pi_-=\frac{\rho-\lambda}{\gamma\sigma^2}\ \text{и}\ \pi_+=\frac{\rho+\lambda}{\gamma\sigma^2}, \tag{13}$$

где ρ — избыточная доходность; γ — относительное неприятие риска; ε — спред между ценами спроса и предложения, а величина λ имеет следующий вид:

$$\lambda=\gamma\sigma^2\left(\frac{3}{4\gamma}\pi_*{}^2\left(1-\pi_*\right)^2\right)^{1/3}\varepsilon^{1/3}+O(\varepsilon) \tag{14}$$

$$\text{с}\ \pi_*=\frac{\rho}{\gamma\sigma^2}.$$

Например, расчеты по формулам (13) и (14) для обыкновенных акций Сбербанка в начале 2014 г. дали значения $\pi_-=45{,}6\%$, $\pi_+=48{,}2\%$. Премия за ликвидность, рассчитанная по методике из [25], оказалась равной 0,04%. Для менее привлекательных и ликвидных активов границы покупки и продажи оказывались существенно ниже, а премия за ликвидность резко возрастала. Например, для АКБ «Приморье» она составила 0,15%.

В последнее время значительное число исследований посвящено моделированию волатильности с помощью фрактального броуновского движения. В рамках построенных моделей удается объяснить эффекты кратковременной и долговременной памяти, парадокс «улыбки волатильности» и некоторые другие особенности [35].

Получила распространение концепция размытой фрактальной волатильности (RFSV, Rough Fractional Stochastic Volatility) [36, 37]. Концепция RFSV обобщает модели со стохастической волатильностью, используемые уже более 20 лет (см. [38]). В стандартной модели стохастической волатильности, описываемой уравнениями

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu(t, S(t))dt + \sigma(t)dW^{(1)}(t); \qquad (15)$$

$$d(\ln\sigma(t)) = k(\theta - \ln\sigma(t))dt + \gamma dW^{(2)}(t), \qquad (16)$$

предлагается использовать вместо винеровского процесса $W^{(2)}(t)$ фрактальное броуновское движение.

Исследования в этом направлении были стимулированы тем, что эмпирически выявлена устойчивая закономерность: динамика волатильности имеет фрактальный характер, показатель Херста процесса $W^{(2)}(t)$ равен 0,1 для инструментов фиксированной доходности. Такой показатель Херста соответствует очень высокой изменчивости волатильности с тенденцией возврата к ее средним значениям. Это наблюдение позволяет значительно улучшить прогнозы волатильности, и, что особенно важно, значительно точнее, чем при использовании других моделей, описать возможные риски и подразумеваемую волатильность ценовой динамики активов. Предлагаемый подход перспективен также в формировании прогнозных моделей ценовой динамики активов производных финансовых инструментов [37]. Кроме того, параметры фрактальной волатильности демонстрируют предсказательную силу относительно экстремальных явлений в финансовой сфере. Примером может служить крах Lehman Brothers и других инвестиционных банков США в 2008 г., что явилось причиной глобального финансово-экономического кризиса [36].

Представленное обоснование целесообразности использования фрактальных моделей ценовой динамики активов и их практическое применение в финансовой сфере может способствовать минимизации рисков и укреплению стабильного развития рыночных отношений.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Статья подготовлена по результатам исследований, выполненных за счет бюджетных средств по государственному заданию Финуниверситету в рамках НИР по теме «Механизмы создания в базовых отраслях экономики Российской Федерации высокопроизводительного экспортно ориентированного сектора в рамках глобальных дезинтеграционных и евразийских интеграционных процессов». Финансовый университет, Москва, Россия.

ACKNOWLEDGEMENTS

The article is based on the results of budgetary-supported research according to the state task carried out by the Financial University as part of research on the topic “Mechanisms for creating a highly productive export-oriented sector among the basic sectors of the economy of the Russian Federation within the global disintegration and Eurasian integration processes”. Financial University, Moscow, Russia.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Review*. 1968;10(4):422–437. DOI: 10.1137/1010093
2. Mandelbrot B.B. When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. *The Review of Economics and Statistics*. 1971;53(3):225–236. DOI:10.2307/1937966
3. Cont R. Volatility clustering in financial markets: Empirical facts and agent-based models. In: Teyssière G., Kirman A.P., eds. Long memory in economics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2007:289–309.
4. Pagan A. The econometrics of financial markets. *Journal of Empirical Finance*. 1986;3(1):15–102. DOI: 10.1016/0927–5398(95)00020–8
5. Cont R. Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*. 2001;1(2):223–236. DOI: 10.1080/713665670

6. Ding Z., Granger C., Engle R. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*. 1983;1(1):83–106. DOI: 10.1016/0927–5398(93)90006-D
7. Guillaume D., Dacorogna M., Davé R., Müller U., Olsen R., Pictet O. From the bird's eye view to the microscope: A survey of new stylized facts of the intraday foreign exchange markets. *Finance and Stochastics*. 1997;1(2):95–129. DOI: 10.1007/s007800050018
8. Hiebert P., Jaccard I., Schüler Y. Contrasting financial and business cycles: Stylized facts and candidate explanations. *Journal of Financial Stability*. 2018;38:72–80. DOI: 10.1016/j.jfs.2018.06.002
9. Bariviera A.F., Basgall M.J., Hasperué W., Naiouf M. Some stylized facts of the Bitcoin market. *Physica A*: *Statistical Mechanics and its Applications*. 2017;484:82–90. DOI: 10.1016/j.physa.2017.04.159
10. Restocchi V., McGroarty F., Gerding E. The stylized facts of prediction markets: Analysis of price changes. *Physica A*: *Statistical Mechanics and its Applications*. 2019;515:159–170. DOI: 10.1016/j.physa.2018.09.183
11. Pruna R.T., Polukarov M., Jennings N.R. An asset pricing model with loss aversion and its stylized facts. In: IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI) (Athens, 6–9 Dec. 2016). New York: IEEE; 2016:1–8. DOI: 10.1109/SSCI.2016.7850003
12. Gisin V.B., Shapoval A.B. Two agent based models and market stylized facts. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2008;42(4):521–527.
13. Dhesi G., Ausloos M. Modelling and measuring the irrational behaviour of agents in financial markets: Discovering the psychological soliton. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016;88:119–125. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.12.015
14. LeBaron B., Agent-based computational finance: Suggested readings and early research. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2000;24(5–7):679–702. DOI: 10.1016/S 0165–1889(99)00022–6
15. Acciaio B., Beiglböck M., Penkner F., Schachermayer W. A model-free version of the fundamental theorem of asset pricing and the super-replication theorem. *Mathematical Finance*. 2016;26(2):233–251. DOI: 10.1111/mafi.12060
16. Dolinsky Y., Neufeld A. Super-replication in fully incomplete markets. *Mathematical Finance*. 2018;28(2):483–515. DOI: 10.1111/mafi.12149
17. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики (в 2-х т.). М.: Наука; 2004. 1018 с.
18. Cheridito P. Gaussian moving averages, semimartingales and option pricing. *Stochastic Processes and their Applications*. 2004;109(1):47–68. DOI: 10.1016/j.spa.2003.08.002
19. Rostek S., Schöbel R. A note on the use of fractional Brownian motion for financial modeling. *Economic Modelling*. 2013;30:30–35. DOI: 10.1016/j.econmod.2012.09.003
20. Biagini F., Hu Y., Øksendal B., Zhang T. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications. London: Springer-Verlag; 2008. 330 p.
21. Schoutens W. Lévy processes in finance: Pricing financial derivatives. Chichester: John Wiley & Sons Ltd; 2003. 170 p.
22. Гисин В.Б., Коннов В.В., Шаров В.Ф. Вероятностные модели для анализа ценообразования активов на фондовых рынках. М.: Финансовый университет; 2012. 152 с.
23. Борусяк К.К. Применение модели Мейкснера распределения доходности финансовых активов к российскому фондовому рынку. Математические методы анализа финансовых временных рядов: сб. науч. ст. Гисин В.Б., Шаповал А.Б., ред. М.: Финансовая академия; 2008:4–23.
24. Kabanov Y., Safarian M. Markets with transaction costs: Mathematical theory. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2010. 294 p.
25. Gerhold S., Guasoni P., Muhle-Karbe J., Schachermayer W. Transaction costs, trading volume, and the liquidity premium. *Finance and Stochastics*. 2014;18(1):1–37. DOI: 10.1007/s00780–013–0210-y
26. Guasoni P., Weber M. Dynamic trading volume. *Mathematical Finance*. 2017;27(2):313–349. DOI: 10.1111/mafi.12099
27. Navascués M.A., Sebastián M.V., Latorre M. Stock indices in emerging and consolidated economies from a fractal perspective. In: Rojas I., Pomares H., eds. Time series analysis and forecasting: Selected contributions from the ITISE conference. Cham: Springer International Publ.; 2016:113–122.
28. Dubovikov M.M., Starchenko N.V., Dubovikov M.S. Dimension of minimal cover and fractal analysis of time series. *Physica A*: *Statistical Mechanics and its Applications*. 2004;339(3–4):591–608. DOI: 10.1016/j.physa.2004.03.025

29. Путко Б.А., Диденко А.С., Дубовиков М.М. Модель волатильности обменного курса валют (RUR/USD), построенная на основе фрактальных характеристик финансового ряда. *Прикладная эконометрика*. 2014;(4):79–87.
30. Bertrand P.R., Combes J.-L., Dury M.-E., Hadouni D. Overfitting of Hurst estimators for multifractional Brownian motion: A fitting test advocating simple models. *Risk and Decision Analysis*. 2018;7(1–2):31–49. DOI: 10.3233/RDA-180136
31. Ikeda T. Fractal analysis revisited: The case of the US industrial sector stocks. *Economics Bulletin*. 2017;37(2):666–674.
32. Ikeda T. A fractal analysis of world stock markets. *Economics Bulletin.* 2017;37(3):1514–1532.
33. Karp A., Van Vuuren G. Investment implications of the fractal market hypothesis. *Annals of Financial Economics*. 2019;14(1):1–27. DOI: 10.1142/S 2010495219500015
34. Nika Z., Rásonyi M. Log-optimal portfolios with memory effect. *Applied Mathematical Finance*. 2018;25(5–6):557–585. DOI: 10.1080/1350486X.2018.1542323
35. Guennoun H., Jacquier A., Roome P., Shi F. Asymptotic behavior of the fractional Heston model. *SIAM Journal on Financial Mathematics*. 2018;9(3):1017–1045. DOI: 10.1137/17M1142892
36. Bayer C., Friz P., Gatheral J. Pricing under rough volatility. *Quantitative Finance*. 2016;16(6):887–904. DOI: 10.1080/14697688.2015.1099717
37. Gatheral J., Jaisson T., Rosenbaum M. Volatility is rough. *Quantitative Finance*. 2018;18(6):933–949. DOI: 10.1080/14697688.2017.1393551
38. Comte F., Renault E. Long memory in continuous-time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*. 1998;8(4):291–323. DOI: 10.1111/1467–9965.00057

REFERENCES

1. Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Review*. 1968;10(4):422–437. DOI: 10.1137/1010093
2. Mandelbrot B.B. When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. *The Review of Economics and Statistics.* 1971;53(3):225–236. DOI: 10.2307/1937966
3. Cont R. Volatility clustering in financial markets: Empirical facts and agent-based models. In: Teyssière G., Kirman A.P., eds. Long memory in economics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2007:289–309.
4. Pagan A. The econometrics of financial markets. *Journal of Empirical Finance.* 1986;3(1):15–102. DOI: 10.1016/0927–5398(95)00020–8
5. Cont R. Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*. 2001;1(2):223–236. DOI: 10.1080/713665670
6. Ding Z., Granger C., Engle R. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*. 1983;1(1):83–106. DOI: 10.1016/0927–5398(93)90006-D
7. Guillaume D., Dacorogna M., Davé R., Müller U., Olsen R., Pictet O. From the bird's eye view to the microscope: A survey of new stylized facts of the intraday foreign exchange markets. *Finance and Stochastics*. 1997;1(2):95–129. DOI: 10.1007/s007800050018
8. Hiebert P., Jaccard I., Schüler Y. Contrasting financial and business cycles: Stylized facts and candidate explanations. *Journal of Financial Stability*. 2018;38:72–80. DOI: 10.1016/j.jfs.2018.06.002
9. Bariviera A.F., Basgall M.J., Hasperué W., Naiouf M. Some stylized facts of the Bitcoin market. *Physica A*: *Statistical Mechanics and its Applications*. 2017;484:82–90. DOI: 10.1016/j.physa.2017.04.159
10. Restocchi V., McGroarty F., Gerding E. The stylized facts of prediction markets: Analysis of price changes. *Physica A*: *Statistical Mechanics and its Applications*. 2019;515:159–170. DOI: 10.1016/j.physa.2018.09.183
11. Pruna R.T., Polukarov M., Jennings N.R. An asset pricing model with loss aversion and its stylized facts. In: IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI). (Athens, 6–9 Dec. 2016). New York: IEEE; 2016:1–8. DOI: 10.1109/SSCI.2016.7850003
12. Gisin V.B., Shapoval A.B. Two agent based models and market stylized facts. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2008;42(4):521–527.
13. Dhesi G., Ausloos M. Modelling and measuring the irrational behaviour of agents in financial markets: Discovering the psychological soliton. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016;88:119–125. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.12.015
14. LeBaron B., Agent-based computational finance: Suggested readings and early research. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2000;24(5–7):679–702. DOI: 10.1016/S 0165–1889(99)00022–6

15. Acciaio B., Beiglböck M., Penkner F., Schachermayer W. A model-free version of the fundamental theorem of asset pricing and the super-replication theorem. *Mathematical Finance*. 2016;26(2):233–251. DOI: 10.1111/mafi.12060
16. Dolinsky Y., Neufeld A. Super-replication in fully incomplete markets. *Mathematical Finance*. 2018;28(2):483–515. DOI: 10.1111/mafi.12149
17. Shyriaev A.N. Fundamentals of stochastic financial mathematics (in 2 vols.). Moscow: Nauka; 2004. 1018 p. (In Russ.).
18. Cheridito P. Gaussian moving averages, semimartingales and option pricing. *Stochastic Processes and their Applications*. 2004;109(1):47–68. DOI: 10.1016/j.spa.2003.08.002
19. Rostek S., Schöbel R. A note on the use of fractional Brownian motion for financial modeling. *Economic Modelling*. 2013;30:30–35. DOI: 10.1016/j.econmod.2012.09.003
20. Biagini F., Hu Y., Øksendal B., Zhang T. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications. London: Springer-Verlag; 2008. 330 p.
21. Schoutens W. Lévy processes in finance: Pricing financial derivatives. Chichester: John Wiley & Sons Ltd; 2003. 170 p.
22. Gisin V.B., Konnov V.V., Sharov V.F. Probabilistic models for analyzing asset pricing in stock markets. Moscow: Financial University; 2012. 152 p. (In Russ.).
23. Borusyak K.K. Application of the Meixner model of the distribution of return on financial assets to the Russian stock market. In: Gisin V.B., Shapoval A.B., eds. Mathematical methods for analyzing financial time series: Coll. sci. pap. Moscow: Financial Academy; 2008:4–23. (In Russ.).
24. Kabanov Y., Safarian M. Markets with transaction costs: Mathematical theory. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2010. 294 p.
25. Gerhold S., Guasoni P., Muhle-Karbe J., Schachermayer W. Transaction costs, trading volume, and the liquidity premium. *Finance and Stochastics*. 2014;18(1):1–37. DOI: 10.1007/s00780–013–0210-y
26. Guasoni P., Weber M. Dynamic trading volume. *Mathematical Finance*. 2017;27(2):313–349. DOI: 10.1111/mafi.12099
27. Navascués M.A., Sebastián M.V., Latorre M. Stock indices in emerging and consolidated economies from a fractal perspective. In: Rojas I., Pomares H., eds. Time series analysis and forecasting: Selected contributions from the ITISE conference. Cham: Springer International Publ.; 2016:113–122.
28. Dubovikov M.M., Starchenko N.V., Dubovikov M.S. Dimension of minimal cover and fractal analysis of time series. *Physica A*: *Statistical Mechanics and its Applications*. 2004;339(3–4):591–608. DOI: 10.1016/j.physa.2004.03.025
29. Putko B.A., Didenko A.S., Dubovikov M.M. Exchange rate volatility model (RUR/USD) based on the fractal characteristics of a financial series. *Prikladnaya ekonometrika = Applied Econometrics*. 2014;(4):79–87. (In Russ.).
30. Bertrand P.R., Combes J.-L., Dury M.-E., Hadouni D. Overfitting of Hurst estimators for multifractional Brownian motion: A fitting test advocating simple models. *Risk and Decision Analysis*. 2018;7(1–2):31–49. DOI: 10.3233/RDA-180136
31. Ikeda T. Fractal analysis revisited: The case of the US industrial sector stocks. *Economics Bulletin*. 2017;37(2):666–674.
32. Ikeda T. A fractal analysis of world stock markets. *Economics Bulletin.* 2017;37(3):1514–1532.
33. Karp A., Van Vuuren G. Investment implications of the fractal market hypothesis. *Annals of Financial Economics*. 2019;14(1):1–27. DOI: 10.1142/S 2010495219500015
34. Nika Z., Rásonyi M. Log-optimal portfolios with memory effect. *Applied Mathematical Finance*. 2018;25(5–6):557–585. DOI: 10.1080/1350486X.2018.1542323
35. Guennoun H., Jacquier A., Roome P., Shi F. Asymptotic behavior of the fractional Heston model. *SIAM Journal on Financial Mathematics*. 2018;9(3):1017–1045. DOI: 10.1137/17M1142892
36. Bayer C., Friz P., Gatheral J. Pricing under rough volatility. *Quantitative Finance*. 2016;16(6):887–904. DOI: 10.1080/14697688.2015.1099717
37. Gatheral J., Jaisson T., Rosenbaum M. Volatility is rough. *Quantitative Finance*. 2018;18(6):933–949. DOI: 10.1080/14697688.2017.1393551
38. Comte F., Renault E. Long memory in continuous-time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*. 1998;8(4):291–323. DOI: 10.1111/1467–9965.00057

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / ABOUT THE AUTHORS

Ирина Зотовна Ярыгина — доктор экономических наук, профессор, профессор Департамента мировой экономики и мировых финансов, Финансовый университет, Москва, Россия
Irina Z. Yarygina — Dr. Sci. (Econ.), Professor, Department of World Economy and World Finance, Financial University, Moscow, Russia
jiz4@yandex.ru

Владимир Борисович Гисин — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информационной безопасности, Финансовый университет, Москва, Россия
Vladimir B. Gisin — Cand. Sci. (Math.), Professor, Head of the Chair of Information Security, Financial University, Moscow, Russia
vgisin@fa.ru

Борис Александрович Путко — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, Финансовый университет, Москва, Россия
Boris A. Putko — Cand. Sci. (Math.), Associate Professor, Department of Data Analysis, Decision Making, and Financial Technologies, Financial University, Moscow, Russia
baputko@fa.ru

Заявленный вклад авторов:
Ярыгина И.З. — раскрыты особенности экономического содержания стоимости банковских активов и разработаны рекомендации, направленные на оценку финансовых рисков на базе использования математических методов прогнозирования экономических процессов.
Гисин В.Б. — проанализированы особенности применения фрактального броуновского движения для описания ценовой динамики. Описан метод оценки границ справедливых цен финансовых активов на фрактальном рынке.
Путко Б.А. — наблюдаемая квазицикличность индекса фрактальности применена для построения эконометрической модели с индексом фрактальности в качестве объясняемой переменной и периодических гармоник в качестве объясняющих переменных. На основе этой модели построен долгосрочный прогноз. Приведен результат бэктестирования модели.

Authors' declared contribution:
Yarygina I.Z. — disclosed the features of the economic content of value of bank assets and developed recommendations for assessing financial risks based on mathematical methods for forecasting economic processes.
Gisin V.B. — analyzed the features of fractal Brownian motion to describe price dynamics; described the method for assessing the boundaries of the fair prices of financial assets in the fractal market.
Putko B.A. — used the observed quasicyclicity of the fractality index to construct an econometric model with a fractality index as an explanatory variable and periodic harmonics as explanatory variables. A long-term forecast was based on this model. The result of backtesting the model was given.

Статья поступила в редакцию 30.09.2019; после рецензирования 14.10.2019; принята к публикации 20.10.2019.
Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
The article was submitted on 30.09.2019; revised on 14.10.2019 and accepted for publication on 20.10.2019.
The authors read and approved the final version of the manuscript.