

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.53(045)
© Кочетков А. А., 2020

Анализ логистического отображения Фейгенбаума: константы, циклы, бифуркации



Артур Андреевич Кочетков, главный специалист Управления программ развития, Финансовый университет, Москва, Россия
Arthur A. Kochetkov, Chief Specialist, Development Programs Department, Financial University, Moscow, Russia
AKochetkov@fa.ru

АННОТАЦИЯ

В статье проводится анализ логистического отображения Фейгенбаума $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$; выявлены новые зависимости при переходе динамической системы к хаосу. Методологической основой исследования являются концепции теории хаоса, описывающие поведение нелинейных динамических систем. В исследовании использовались методы теоретического исследования, в частности проведено моделирование хаотического поведения одномерных отображений с помощью программы Wolfram Alpha. Высказана гипотеза, что любое унимодальное квадратичное отображение перейдет к хаосу не менее чем за 11 периодов бифуркаций, что является универсальным свойством всех унимодальных квадратичных отображений. Предложена новая константа, показывающая соотношение между шириной «основной ветви» отображения и шириной «узкой ветви». Приведен расчет ряда показателей, характеризующих предел отношений длин логистического отображения в точках бифуркации.

Ключевые слова: логистическое отображение; унимодальное отображение; хаос; бифуркации; удвоение периода; нелинейные системы

Для цитирования: Кочетков А. А. Анализ логистического отображения Фейгенбаума: константы, циклы, бифуркации. *Научные записки молодых исследователей*. 2020;8(3):13-23.

ORIGINAL PAPER

Analysis of the Logistic Fagenbaum Map: Constants, Cycles, Bifurcations

ABSTRACT

The article analyses the Feigenbaum logistic map $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$. The author revealed new dependencies during the transition of a dynamic system to chaos. The methodological basis of the study

Научный руководитель: **Сухарев О.С.**, доктор экономических наук, профессор, заведующий сектором институционального анализа экономической динамики ИЭ РАН, Москва, Россия / Scientific adviser: **Sukharev O.S.**, Doctor of Economics, Professor, Head of the Department of Institutional Analysis of Economic Dynamics, IE RAS, Moscow, Russia.

is the concept of chaos theory, describing the behaviour of nonlinear dynamic systems. The study used methods of theoretical research, in particular, the modelling of chaotic behaviour of one-dimensional maps using the program Wolfram Alpha. The author hypothesised that any unimodal quadratic map would go to chaos in at least 11 bifurcation periods, which is a universal property of all unimodal quadratic maps. The author proposed a new constant that characterises the relationship between the width of the “main branch” of the map and the width of the “narrow branch”. Finally, the author presents the calculation of several indicators characterising the limit of the relations of lengths of the logistic map at bifurcation points.

Keywords: logistic map; unimodal mapping; chaos; bifurcations; period doubling; nonlinear systems

For citation: Kochetkov A. A. Analysis of the logistic Fagenbaum map: Constants, cycles, bifurcations. *Nauchnye zapiski molodykh issledovatelei = Scientific notes of young researchers*. 2020;8(3):13-23.

Введение

Теория хаоса является одной из самых перспективных и быстро развивающихся отраслей математики. Родоначальниками теории хаоса были такие великие столпы математики, как Анри Пуанкаре [1], Адамáр [2] и Ляпунов [3].

Более прикладные модели, пригодные для практических исследований, уже наблюдаются в работах метеоролога Лоренца [4], построившего известный «аттрактор Лоренца», предсказывающий движение воздушных потоков, а также в трудах Фейгенбаума [5], знаменитого своим одномерным логистическим отображением.

Хаос пронизывает все сферы нашей жизни и практически участвует во всех планируемых мероприятиях повседневной деятельности. Температурные колебания, изменения курсов валют, динамика котировок акций и облигаций на бирже, даже психологическое поведение игроков на рынке и т.д. – все эти факторы, которые на первый взгляд кажутся странными и необъяснимыми флуктуациями, на самом деле имеют под собой жесткую детерминистскую основу, подчиняющуюся определенным закономерностям. Выражается это в том, что каждая система может быть описана определенной формулой по теории хаоса – одномерным и двумерным нелинейным отображением, задающим поведение объекта на числовой прямой в форме определенных числовых значений, сменяющих друг друга с определенной периодичностью.

Универсальным свойством всех систем является постоянная скорость перехода к хаосу, которая является константой для всех нелинейных отображений.

Однако нужно заметить, что теория хаоса отличается неполнотой. До сих пор до конца не определены все закономерности перехода отдельных систем к хаосу, и не выявлены полностью все факторы, определяющие количество бифуркаций.

Предметом анализа настоящего исследования является логистическое отображение Фейгенбаума вида

$$x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n), \quad (1)$$

где x_n принимает значения от 0 до 1; λ – управляющий параметр, принимающий значение на отрезке [0,4] [6].

Объектом исследования выступают унимодальные квадратичные отображения вида $x_{n+1} = -\lambda \cdot x_n^2 + \lambda \cdot x_n + c$, а также особенности их перехода к хаосу в соответствии с теорией бифуркации.

Постановка задач.

В рамках настоящей работы планируется решить следующие задачи:

1. Рассчитать точное количество бифуркаций системы до наступления хаоса при помощи имеющихся статистических данных и выявить отдельные особенности перехода к хаосу различных видов унимодальных отображений.

2. Исследовать логистическое отображение $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$ с точки зрения симметрии, численно проверить, сохраняют ли структуру объекта верхние и нижние «вилы» системы, возникающие при каждом удвоении периода. Проверку численных расчетов осуществить с помощью прикладных программ MATLAB и WOLFRAM.

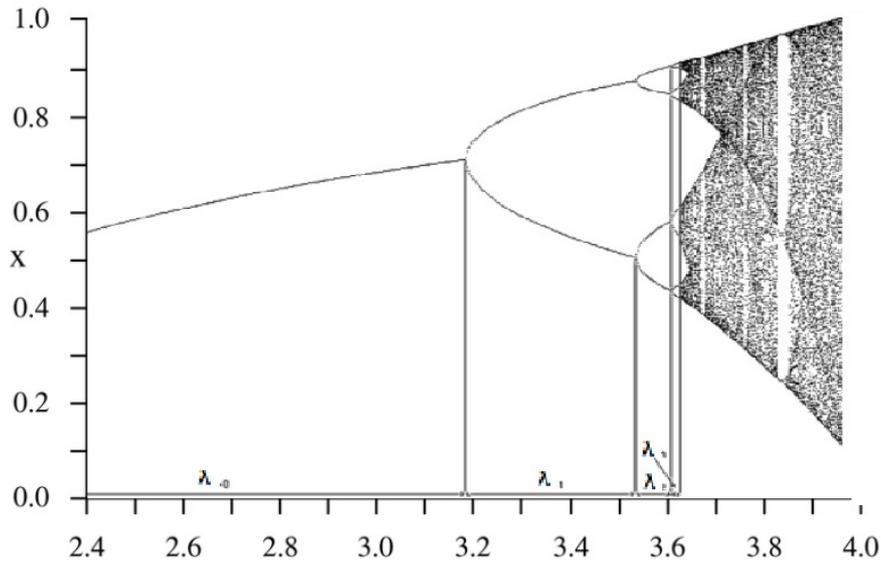


Рис. 1. График логистического отображения $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$

Источник: приведено автором согласно бифуркационной диаграмме. URL: <http://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html> (дата обращения: 08.01.2020).

3. Обосновать значимость полученных результатов на основе величин, отражающих реальные длины между верхней и нижней «ветвями» логистического отображения в точках бифуркации, и соотнести их со «второй константой» Фейгенбаума при помощи программы WOLFRAM.

График отображения приведен на рис. 1.

Анализ логистических отображений по теории бифуркации

Как известно, первая константа Фейгенбаума составляет 4,669, при этом система приходит к хаосу через удвоение периода [7]. Тогда соотношение

длин фрактала равно $\frac{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 4,669$ [8], где

$\lambda_{n-2}, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ – точки бифуркации, для которых происходит удвоение периода (до того как наступит хаос). Также существует предельное значение $\lambda_\infty = 3,569946$ [9], при котором наступает хаос.

Система поведения логистического отображения (1) при переходе к хаосу давно изучена. В табл. 1 приведены значения λ_n в точках бифуркации.

Значения $\lambda_1 - \lambda_5$ – общеизвестны, они приведены во всей справочной литературе по теории хаоса [10]. Значения $\lambda_6 - \lambda_{11}$ – рассчитаны при помощи константы Фейгенбаума с погрешностью в 2–3%. В табл. 1 $\lambda_{11} = \lambda_\infty$, при достижении которого наступает хаос (для данного логистического отображения).

Заметим, что приведенные цифры в четвертой колонке табл. 1 являются геометрической прогрессией со знаменателем 2.

Рассмотрим отношения

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \frac{\lambda_4}{\lambda_3}, \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$$

и приведем их значения в табл. 2.

Утверждение 1. Отношения значений λ во всех точках бифуркаций стремятся к 1, т.е. выполняется соотношение:

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \rightarrow 1, n = 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство. Начальное соотношение согласно константе Фейгенбаума имеет вид

$$\frac{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 4,669201\dots \quad (2)$$

В силу характера геометрической прогрессии можем предположить:

$$\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} \cdot q, \lambda_n = \lambda_{n-1} \cdot q,$$

где q – знаменатель геометрической прогрессии, удовлетворяющий условию (2). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 4,669 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} = (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdot 4,669. &\quad (3) \end{aligned}$$

Таблица 1

Каскад бифуркаций отображения $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$

Кол-во бифуркаций (N)	λ	Значения λ , при которых происходит удвоение периода	Колебания между значениями
1	2	3	4
1	λ_1	3	2
2	λ_2	3,449	4
3	λ_3	3,54409	8
4	λ_4	3,5644	16
5	λ_5	3,568759	32
6	λ_6	3,569692564	64
7	λ_7	3,569892505	128
8	λ_8	3,569935327	256
9	λ_9	3,569944498	512
10	λ_{10}	3,569946462	1024
11	λ_{11}	3,569946882	2048

Источник: Хаос в одномерных системах. URL: http://www.iki.rssi.ru/people/avasiliiev/lectures/Lecture_9.pdf (дата обращения 01.02.2020).

Таблица 2

Значение соотношений $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ отображения $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$

N	$\lambda_{n+1} / \lambda_n$
1	1,149667
2	1,02757
3	1,005731
4	1,001223
5	1,000262
6	1,000056
7	1,000012
8	1,000003
9	1,000001
10	1

Источник: рассчитано автором на основе данных бифуркаций одномерного отображения.

Разделив выражение (3) на λ_{n-1} , получаем

$$1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} = 4,669 \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right). \quad (4)$$

Заметим, что в силу геометрической прогрессии

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = q \text{ и } \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} = \frac{1}{q}.$$

Подставляя знаменатель в соотношение (4), получаем новое выражение относительно q :

$$1 - \frac{1}{q} = 4,669 \cdot (1 - q),$$

откуда приходим к квадратному уравнению вида

$$4,669 \cdot q^2 - 3,669 \cdot q - 1 = 0.$$

Один из корней уравнения равен 1, а другой – отрицательный, который нам не подходит. Таким образом, наша геометрическая прогрессия имеет

место, при том, что $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = q = 1$, и с учетом не-

противоречия соотношению (3) при условии, что $n \rightarrow \infty$.

Итак, доказано, что соотношение

$\frac{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 4,669$ выполняется при $q = 1$. Это значит, что $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \rightarrow 1$. Хаос как раз наступает, ког-

да q максимально приближается к значению 1.

Логистическое отображение $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$ достигает такого значения для λ_{11} , приблизительно равном 3,5699 при условии, что $\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{10}} \rightarrow 1$.

Значит, число периодов бифуркации $N = 11$.

Замечание. Утверждение $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \rightarrow 1$ не проти-

воречит порядку Шарковского [11], согласно которому $\lambda[1] \leq \lambda[2] \leq \lambda[2^1] \leq \lambda[2^2] \leq \lambda[2^3] \leq \dots \ll \dots$, где 2 – период удвоения цикла.

Заметим, что количество значений x , между которыми колеблется система, составляет геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Это числа 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048.

Обратим внимание на следующее: система пришла к хаосу за **11 удвоений периода**, т.е. при $N = 11$, где N – количество удвоений периода.

Утверждение 2.

Все унимодальные квадратичные отображения¹ переходят к хаосу через удвоение периода, пройдя 11 циклов бифуркации: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_\infty$, ($N = 11$).

Пример: логистическое отображение вида $x_{n+1} = 1 - \lambda \cdot x^2$.

Приведем расчетную табл. 3.

Исходя из табл. 3 мы видим, что $\lambda_{11} = \lambda_\infty = 1,40115518909$ при $N = 11$, где N – количество бифуркаций до того, как наступит хаос.

Таким же образом это правило «одиннадцати бифуркаций до хаоса» распространяется на другие унимодальные квадратичные отображения. В частности, на такие отображения, как $x_{n+1} = \lambda \cdot \sin(\pi x_n)$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq \lambda \leq 4$) и $x_{n+1} = x_n \cdot e^{\lambda \cdot (1 - x_n)}$.

Расчеты показывают, что оба отображения $x_{n+1} = \lambda \cdot \sin(\pi x_n)$ и $x_{n+1} = x_n \cdot e^{\lambda \cdot (1 - x_n)}$ переходят к хаосу за 11 периодов бифуркаций.

Практическая значимость вышеуказанного правила состоит в том, что мы можем заранее знать число периодов бифуркаций системы до ее перехода к хаосу. (Заметим, что число периодов со значением $\log_2 2024$, которое также равняется 11; 2024 – количество значений, между которыми колеблется система до начала хаоса).

Анализ второй константы Фейгенбаума

Обратимся теперь к анализу второй константы Фейгенбаума, которая демонстрирует ширину между ветвями.

Вторая константа Фейгенбаума равна $d \approx 2,505907 \dots$ [12]. Нужно обратить внимание на то, что в реальности логистическое отображение не является полностью симметричным. Верхняя «ветвь» гораздо более узкая, чем нижняя «ветвь». В этом можно убедиться, посмотрев на аттрактор логистического отображения (рис. 2).

Методология исследования

Построение изображения логистического отображения в настоящее время выполняется различ-

¹ Математические заметки. URL: <http://www.mathnet.ru/links/93ac734e8de049ff444fe6380d32cb9a/mzm1334.pdf> (дата обращения: 01.02.2020).

Таблица 3

Каскад бифуркаций отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda \cdot x^2$

Кол-во бифуркаций N	λ	Значения λ , при которых происходит удвоение периода	Отношение $\lambda_{n+1} / \lambda_n$
1	2	3	4
1	λ_1	0,75	
2	λ_2	1,25	1,6666666667
3	λ_3	1,39404615660	1,0944791515
4	λ_4	1,39404615660	1,0189658917
5	λ_5	1,39963123887	1,0040063833
6	λ_6	1,40082874237	1,0008555850
7	λ_7	1,40108527126	1,0001831265
8	λ_8	1,40114021470	1,0000392149
9	λ_9	1,40115198203	1,0000083984
10	λ_{10}	1,40115450224	1,0000017987
11	λ_{11}	1,40115518909	1

Источник: Кузнецов С.П. Динамический хаос. URL: <http://www.sgtnd.narod.ru/pabl/rus/dc.htm> (дата обращения: 01.04.2020).

ными прикладными программами. В частности, наиболее точное моделирование выполняют программы MATLAB² и WOLFRAM³, программирующие более 1000 итераций.

При детальном рассмотрении можно сделать вывод, что константа Фейгенбаума будет выполняться только в отношении нижней широкой «ветви».

С помощью программы WOLFRAM можно получить уточненные значения по длинам фрактала. Реализуем соответствующее моделирование, приведенное на диаграмме 1.

Обратим внимание на то, что получаем данные в соответствующих точках x при $\lambda = 3,22$: на диаграмме отражена секущая красная линия, которая соответствует точкам, расстояние между которыми равняется ширине основной ветви. Значение $\lambda \approx 3,22$ соответствует половине длины второго периода бифуркации.

Вычислить ширину «основной ветви» помогают значения в точках x_1 и x_2 , равные соответственно 0,505662 и 0,804897 (данные итераций в диаграмме 1, период 2). Таким образом, ширина основной ветви составляет:

$$d_1 = 0,804897 - 0,505662 = 0,299235.$$

Точно так же можно найти значения для ширины широкой и узкой «ветвей». (см. диаграмму 2).

Получаем, что ширина широкой «ветви» $d_2 = 0,500884 - 0,38282 = 0,118064$, а ширина узкой «ветви» $d_3 = 0,874997 - 0,8269941 = 0,048056$.

Проверяем частное

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{0,299235}{0,118064} \approx 2,534515.$$

Это значение совпадает со значением второй общепринятой константы Фейгенбаума с учетом погрешности 1–2%.

(Примечание: значение второй константы Фейгенбаума, равное 2,505907..., подтверждено программой WOLFRAM и получилось равным приблизительно 2,534515).

Далее вычислим отношение между основной и узкой «ветвями». Оно равно

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{0,299235}{0,048056} \approx 6,226797902.$$

Это значение можно назвать **третьей константой Фейгенбаума**, которая связывает отношение ширины между основной ветвью и узкой «ветвями».

² URL: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html> (дата обращения: 11.11.2019).

³ URL: <https://www.wolframalpha.com/> (дата обращения: 11.11.2019).

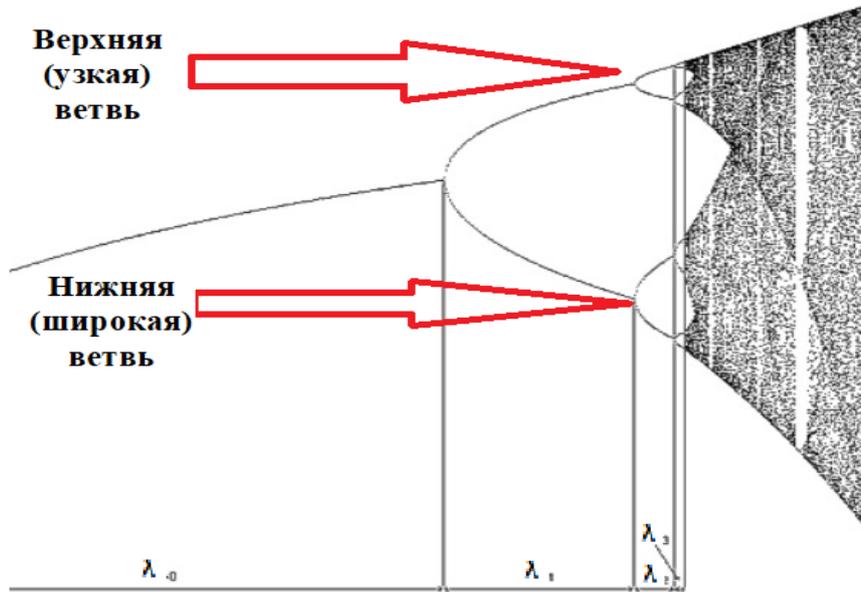


Рис. 2. Ветви логистического отображения

Источник: отображение приведено из программы WOFLRAM.

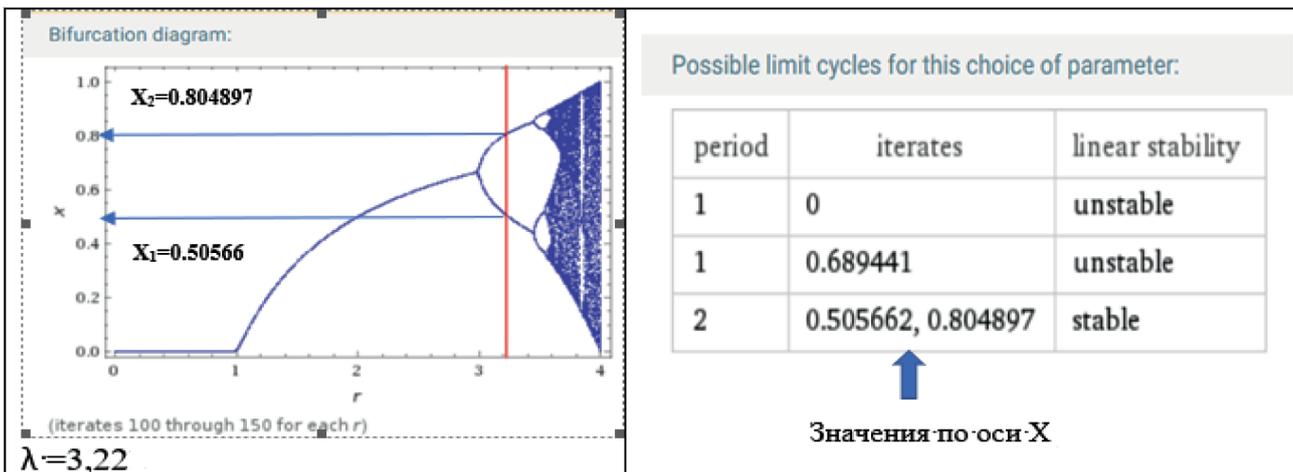


Диаграмма 1. Бифуркационная диаграмма $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$

Источник: данные программы WOLFRAM.

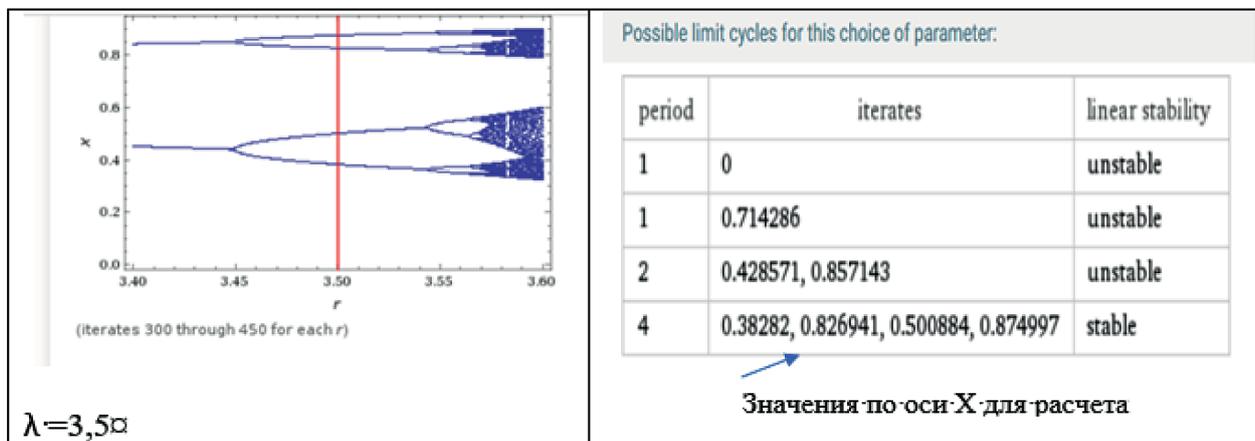


Диаграмма 2. Бифуркационная диаграмма $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$

Источник: данные программы WOLFRAM.

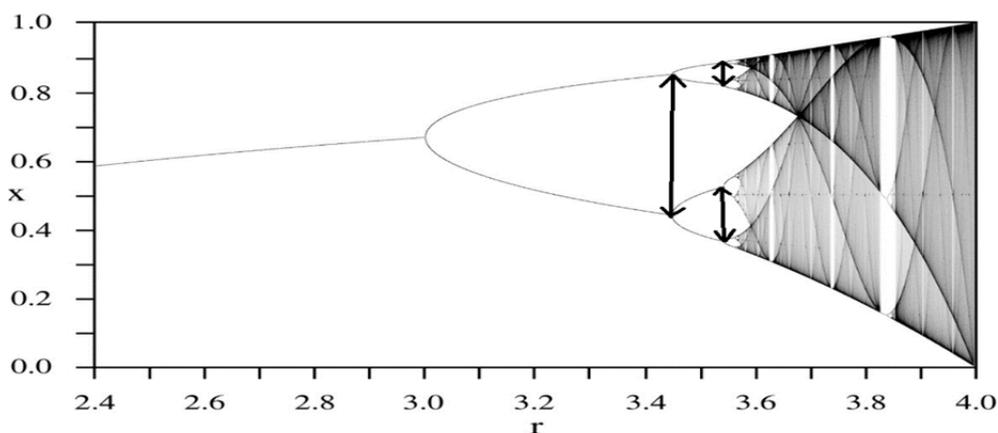


Рис. 3. Расстояние между точками бифуркации

Источник: составлено автором по данным программы WOLFRAM.

Нахождение расстояния между точками бифуркации

Теперь представляется целесообразным рассчитать ширину не только между ветвями, а непосредственно между началом «вил», т.е. между точками удвоения периода по оси x (рис. 3).

Для расчета получаем необходимые данные из программы WOLFRAM в соответствующих точках бифуркации (диаграмма 3).

Заметим, что те же значения x можно найти аналитически в точках бифуркации диаграммы при помощи известного выражения:

$$x_{1,2} = \frac{1 + \lambda + \sqrt{(\lambda - 3) \cdot (\lambda + 1)}}{2\lambda}.$$

Значения x получаются совпадающими с приведенными в диаграмме 3:

$$x_1 = 0,849864 \text{ и } x_2 = 0,440075.$$

В этом легко убедиться, сделав соответствующие числовые расчеты.

Для нахождения длины расстояния вычитаем x_1 из x_2 .

Расстояние между точками бифуркаций по оси x равно 0,4097898328. Это и есть искомая величина, обозначим ее через D . Точно так же находим расстояние между другими точками бифуркаций, задав нужный параметр λ .

Длины широкой и узкой ветвей определяются следующим образом:

$$D_1 = 0,523555 - 0,363324 = 0,160231;$$

$$D_2 = 0,884034 - 0,819797 = 0,064237.$$

Теперь выводим следующие соотношения длин:

$$K = \frac{D}{D_1} = \frac{0,409789833}{0,160231} \approx 2,557494073;$$

$$K_2 = \frac{D}{D_2} = \frac{0,409789833}{0,064237} \approx 6,379342634.$$

Заметим, что значение величины K с погрешностью всего 1–2% равно второй константе Фейгенбаума.

Анализ полученных результатов

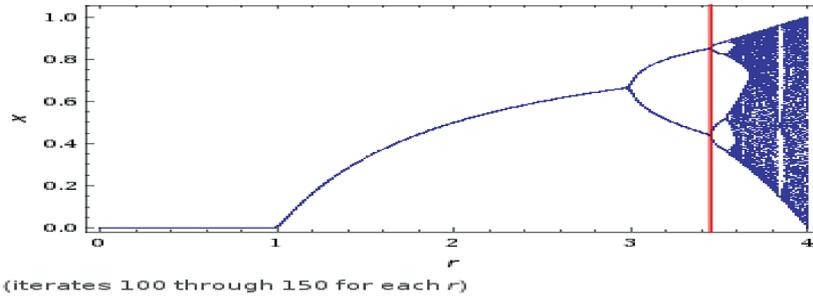
Константы K и K_2 интереснее для анализа с той точки зрения, что они «отражают» расстояние между «вилами» бифуркаций.

Найденные числовые константы в однопараметрическом семействе унимодальных отображений при переходе от регулярного поведения к хаотическому являются универсальными и не зависят от выбора конкретного семейства логистических отображений.

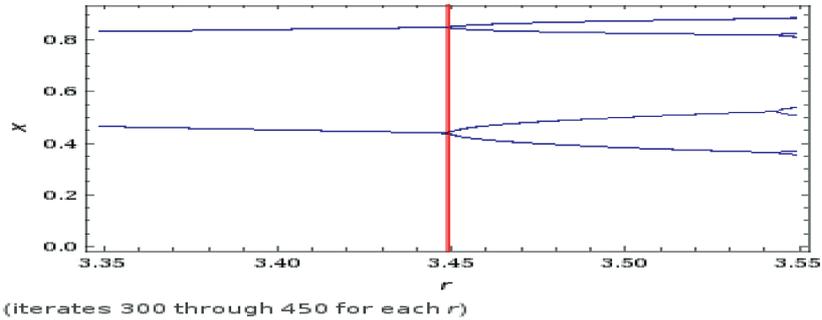
Практическая значимость этих констант состоит в том, что они могут быть использованы в теории турбулентности и теории бифуркации при анализе поведения одномерных и двумерных отображений при переходе к хаосу.

Универсальность констант K и K_2 может быть также объяснена на основе теории ренормализации R на пространстве унимодальных отображений [13]. В рамках указанной теории доказано, что асимптотическая скорость, с которой моменты бифуркаций удвоения периода λ_n приближаются к предельному значению λ_∞ — экспоненциаль-

Bifurcation diagram:



Zoomed in:



Possible limit cycles for this choice of parameter:

period	iterates	linear stability
1	0	unstable
1	0.710061	unstable
2	0.440075, 0.849864	stable

Диаграмма 3. Бифуркационная диаграмма $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$ для $\lambda = 3,449$

Источник: данные программы WOLFRAM.

Bifurcation diagram:

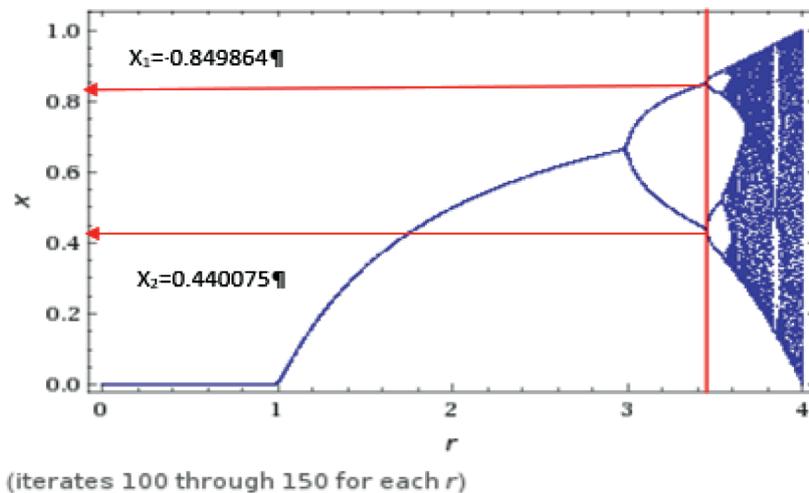
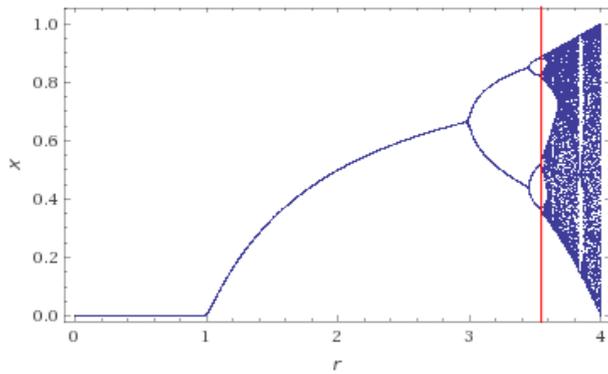


Диаграмма 4. Бифуркационная диаграмма $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$ для $\lambda = 3,449$

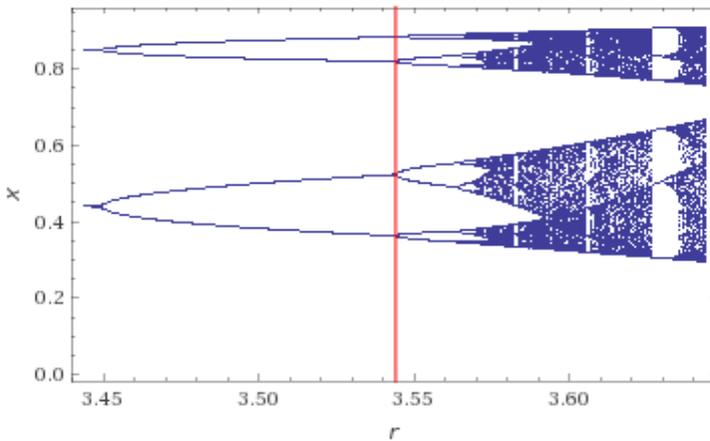
Источник: данные программы WOLFRAM.

Bifurcation diagram:



(iterates 100 through 150 for each r)

Zoomed in:



(iterates 300 through 450 for each r)

Possible limit cycles for this choice of parameter:

period	iterates	linear stability
1	0	unstable
1	0.717833	unstable
2	0.419266, 0.862901	unstable
4	0.363324, 0.819797, 0.523555, 0.884034	stable

Диаграмма 5. Бифуркационная диаграмма $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1 - x_n)$ для $\lambda = 3,544$.

Источник: данные программы WOLFRAM.

ная, со знаменателем, обратным собственному значению линеаризации R в точке g (g — единственная неподвижная точка g ренормализации преобразования R). Отсюда следует объяснение универсальности: асимптотическая скорость определяется собственным значением линеаризации R и не зависит от выбора однопараметрического вида логистического отображения.

Выводы

1. В любом унимодальном квадратичном отображении вида

$$x_{n+1} = -\lambda \cdot x_n^2 + \lambda \cdot x_n + c$$

переход к хаосу осуществляется через удвоение периода через **11** циклов бифуркации: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_\infty$, ($N = 11$), (N — количество бифуркаций системы

до перехода к хаосу). Практическая значимость состоит в универсальности этого свойства для всех унимодальных квадратичных отображений, а также отображений вида $x_{n+1} = \lambda \cdot \sin(\pi x_n)$ и $x_{n+1} = x_n \cdot e^{\lambda \cdot (1-x_n)}$.

2. Логистическое отображение $x_{n+1} = x_n \cdot \lambda \cdot (1-x_n)$ не является полностью симметричным, оно имеет основную «ветвь» и две побочные ветви, которые различаются друг от друга шириной между «вилами». Предлагается дополнительная константа, отражающая соотношение ширины между «вилами»

(основной и узкой), которая равна $\approx 6,226797902$. Указанная константа может быть полезной при характеристике поведения одномерных и двумерных отображений.

3. Определены расстояния между точками бифуркации по оси x и рассчитаны соответствующие константы, отражающие предел соотношения между длинами «вил»: $K \approx 2,557494073$; $K_2 \approx 6,379342634$.

Указанные константы являются универсальными для всех видов однопараметрических унимодальных отображений.

Список источников

1. Пуанкаре А. Теория вероятностей. М.: НИЦ; 1999. 280 с.
2. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть первая. Планиметрия. Изд. 3-е. М.: ОГИЗ; 1948. 608 с.
3. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР; 1954. 446 с.
4. Лоренц Э. Детерминированное непериодическое движение. *Странные аттракторы*. 1981;(1):88–116.
5. Feigenbaum M. Universal Behavior in Nonlinear Systems. *Los Alamos Science*. 1980;(1):4–27.
6. Думачев В.Н., Родин В.А. Эволюция антагонистически взаимодействующих популяций на базе двумерной модели Ферхюльста-Пирла. *Математическое моделирование*. 2005;(7):11–22.
7. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение. М.: Мир; 1989. 240 с.
8. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет; 2000. 352 с.
9. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2007. 324 с.
10. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: URSS; 2009. 312 с.
11. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя. *Украинский математический журнал*. 1964;(1):61–71.
12. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2006. 356 с.
13. Couillet P., Tresser C. Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation. *Journal de Physique Colloques*. 1978;(5):25–28.

References

1. Poincare A. Probability theory. Moscow: SIC; 1999. (In Russ.).
2. Hadamard J. Elementary geometry. Part one. Planimetry. Moscow: OGIZ; 1948. (In Russ.).
3. Lyapunov A.M. Collected works. Moscow: Publishing house of the USSR Academy of Sciences; 1954. (In Russ.).
4. Lorenz E. Deterministic non-periodic motion. *Strannye attractori*. 1981;(1):88–116. (In Russ.).
5. Feigenbaum M. Universal Behavior in Nonlinear Systems. *Los Alamos Science*. 1980;(1):4–27.
6. Dumachev V.N., Rodin V.A. Evolution of antagonistically interacting populations based on the two-dimensional Ferhulst-Pearl model. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2005;(7):11–22. (In Russ.).
7. Schuster G. Deterministic chaos: An introduction. Moscow: Mir; 1989. (In Russ.).
8. Kronover R.M. Fractals and chaos in dynamic systems. Fundamentals of the theory. Moscow: Postmarket; 2000. (In Russ.).
9. Anikin V.M., Golubentsev A.F. Analytical models of deterministic chaos. Moscow: FIZMATLIT; 2007. (In Russ.).
10. Malinetskii G.G. Mathematical foundations of synergetics: Chaos, structures, computational experiment. Moscow: URSS; 2009. (In Russ.).
11. Sharkovsky A.N. Coexistence of cycles of continuous transformation of a straight line into itself. *Ukrainian mathematical journal*. 1964;(1):61–71. (In Russ.).
12. Kuznetsov S.P. Dynamic chaos. Moscow: FIZMATLIT; 2006. (In Russ.).
13. Couillet P., Tresser C. Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation. *Journal de Physique Colloques*. 1978;(5):25–28.