Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

*Департамент анализа данных,
принятия решений и финансовых технологий*

Л.П. Коннова, А.А. Рылов, И.К. Степанян

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В КЕЙСАХ

Учебное пособие

Москва • 2016

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7
К64

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор Г.С. Жукова
(Финансовый университет)

кандидат экономических наук, доцент Е.П. Моргунова
(Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова)

Коннова Л.П., Рылов А.А., Степанян И.К.

К64 Экономические приложения высшей математики в кейсах: учебное пособие. – М.: Финансовый университет, 2016. – 132 с.

ISBN 978-5-7942-1380-5

Учебное пособие рекомендуется студентам бакалавриата, обучающимся по направлению подготовки «Экономика», и предназначено для изучения дисциплины «Высшая математика» с использованием элемента деятельностных технологий обучения – метода кейс-анализа. Рассматриваются прикладные вопросы основных разделов математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление функций, ряды и дифференциальные уравнения) в финансово-экономической сфере, отдельно выделены темы графического описания экономических процессов и процентных вычислений.

Приведены примеры решения задач, поэтапно подводящих к применению математического аппарата в комплексных задачах экономического содержания, сформулированы рекомендации по решению кейсов различного уровня, приведены задания для самостоятельного решения. Предлагается несколько кейсов, в решении которых применяется математический инструментарий.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-7942-1380-5

Federal State – Funded Educational Institution
of Higher Education

“FINANCIAL UNIVERSITY UNDER THE GOVERNMENT
OF THE RUSSIAN FEDERATION”

Department of Data Analysis,
Decision Making and Financial Technology

Larissa P. Konnova, Alexander A. Rylov,
Irina K. Stepanyan

ECONOMIC APPLICATIONS OF HIGHER MATHEMATICS IN CASE STUDIES

TUTORIAL

Moscow • 2016

UDC 51(075.8)

Reviewers:

Doctor of physico-mathematical Science, Professor *Galina C. Zhukova*
(Financial University)
Candidate of Economic Sciences, Associate Professor *Elena P. Morgunova*
(Plekhanov Russian University of Economics)

Larissa P. Konnova, Alexander A. Rylov, Irina K. Stepanyan
Economic applications of higher mathematics in case studies: tutorial. – M.: Financial University, 2016. – 132 p.

ISBN 978-5-7942-1380-5

Textbook is recommended for bachelor degree students of Economics, it is intended for studying Higher Mathematics with the help of active-learning technologies – a case study method. The authors consider the applied problems of the main sections of mathematical analysis (differential and integral calculus of functions, series and differential equations) in Finance and Economics, Graphic description of economic processes and percentages are emphasized separately.

Examples of step by step solving challenges, which lead to the use of mathematics in the complex economic problems; recommendations for solving the cases of different levels and the task for independent solving are presented in the textbook. Several cases in which the decision requires the application of mathematical tools are also offered.

UDC 51(075.8)

ISBN 978-5-7942-1380-5

ВВЕДЕНИЕ

Важную часть подготовки современных экономистов и финансистов составляют математические дисциплины. Владение математическим инструментарием позволяет выполнять различные расчеты, строить и использовать модели экономических процессов. Конкуренция на рынке труда ставит перед выпускниками экономических университетов серьезные задачи: необходимо не только обладать глубокими знаниями по своей специальности, но и применять их в решении профессиональных проблем, иметь системное и аналитическое мышление, уметь прогнозировать последствия тех или иных решений.

Следует отметить, что объем математических дисциплин в учебных планах подготовки экономистов достаточно высок. Однако не всегда студенты могут уверенно применять математические знания при решении экономических задач. Эти сложности имеют в значительной степени объективный характер: изучить математический аппарат проще, чем суметь применить его для анализа реального экономического явления. Навыки применения полученных знаний в профессиональной деятельности связаны со следующими аспектами: усилением прикладной направленности содержания математических дисциплин; развитием междисциплинарных связей; расширением использования системно-деятельностных образовательных технологий.

В рамках вышеперечисленных аспектов метод кейс-стади (case-study), или кейс-метод, широко используется при подготовке экономистов различного профиля. Более того, в настоящее время все большее число заданий выпускных квалификационных экзаменов экономического бакалавриата носит междисциплинарный характер и направлено на проверку умения комплексно решать поставленную задачу. Такие задания формулируются, как правило, в форме кейсов. Кейс представляет собой ситуацию (case), возникающую в конкретных условиях, близких к реальным, в которой требуется практическое решение определенной проблемы. Поиск решения ведется совместными усилиями группы студентов путем анализа ситуации и выбора алгоритма, наилучшего в рамках поставленной проблемы.

Решение кейса – это достаточно сложный для студента процесс: в него входит структурирование информации, выделение проблемы, формулировка нескольких вариантов решения этой проблемы, выбор наиболее оптимального из них и доказательство его оптимальности. Использование кейсов в экономическом университете обычно начинается при изучении специальных финансовых и экономических дисциплин на старших курсах. Однако эффективному применению математического аппарата при решении экономических задач необходимо обучать с первого курса. В связи с этим авторы данного пособия поставили цель адаптировать кейс-метод для его использования в рамках математических дисциплин на первом курсе. Знакомство первокурсников с кейсами происходит постепенно: от традиционных математических задач с экономическим содержанием к задачам с элементами кейсов и далее – непосредственно к кейсам.

Авторы предприняли попытку усилить прикладную направленность задач, приблизить математические инструменты, изучаемые на первом курсе, к экономическим дисциплинам, с которыми параллельно знакомятся первокурсники. Взяв за основу задачи математического анализа с экономическим содержанием, авторы старались использовать обозначения, применяемые в курсе микроэкономики. Пособие не ставит своей целью научить решать экономические кейсы, для чего у первокурсников еще очень мало знаний и опыта, а призвано продемонстрировать приемы использования математического аппарата высшей математики. Авторы надеются, что решение задач из данного пособия поможет студентам по-новому взглянуть на математику, оценить ее необходимость и приобрести больше уверенности при использовании ее методов.

Остановимся подробнее на структуре предлагаемого пособия. Вводный параграф посвящен краткому знакомству с кейс-технологиями и использованию кейс-метода в обучении. В следующем параграфе рассматриваются задачи на процентные вычисления, поскольку приемы решения таких задач являются некоторым фундаментом для дальнейшего продвижения. Третий параграф посвящен графикам, которые активно используются в микроэкономике. В этом параграфе описывается метод наименьших квадратов, дающий важный способ получения функциональной зависимости между параметрами экономических процессов. В последующих параграфах предлагаются задачи по приложениям традиционных разделов математического анализа:

производная функции одной переменной, интегралы, ряды, дифференциальные уравнения и функции нескольких переменных. Каждый параграф содержит теоретическую справку, примеры решения задач и перечень задач для самостоятельной работы. В отдельном параграфе рассматриваются кейсы, в решении которых применяется математический инструментарий широкого спектра, и предлагаются варианты решений. Авторы не настаивают на единственно возможном решении, что характерно для кейса, а оставляют поле для дискуссий, в ходе которых студенты смогут высказать свои замечания и дополнения.

Многие приведенные авторами задачи сопровождаются подробными решениями, а предложенные для самостоятельной работы – ответами и указаниями. Пособие возможно использовать в преподавании высшей математики на всех экономических специальностях, причем большинство задач может быть дополнено вопросами проблемного характера для дополнительных заданий студентам. Решение кейсов рекомендуется организовывать в групповой форме. В процессе создания пособия авторы приобрели некоторый опыт в подготовке и проведении кейс-чемпионата. В свою очередь, это нашло активную поддержку среди студентов, вследствие чего многие задачи, кейс-задания и кейсы были составлены по материалам самих первокурсников разных лет.

Авторы выражают искреннюю благодарность студентам кредитно-экономического факультета, факультета налогов и налогообложения, факультета государственного управления и финансового контроля Финансового университета за активность и содержательное участие. Особая благодарность авторов – студенту магистратуры факультета менеджмента Финансового университета Г.А. Степаняну за весомую поддержку при составлении кейс-заданий.

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О КЕЙСАХ

Метод кейс-стади – это метод активного обучения на основе реальных ситуаций, требующих соединить теоретическую подготовку и практические умения. Сущность метода заключается в создании учебных ситуаций (кейсов), содержащих некоторую проблему, для разрешения которой обучаемые вынужденно актуализируют комплекс полученных знаний и проявляют творческие способности.

Использование метода началось еще в начале прошлого века в Гарвардской школе бизнеса, и с тех пор метод не раз доказывал свою эффективность, оставаясь популярным до настоящего времени. На сегодняшний день существует достаточное число работ, посвященных вопросам истории возникновения метода кейс-стади, его сути, технологическим особенностям применения и методике написания кейсов. Наиболее часто кейсы используются в преподавании экономических дисциплин, менеджмента, маркетинга [1], [6]. Кроме того, многие российские и международные компании проводят кейс-чемпионаты для поиска новых сотрудников. Среди них наиболее известные Cup Moscow, Cup Russia, Oliver Wyman Impact, KMPG International Case Competition. Интерес к кейсам поддерживают кейс-клубы, созданные практически в каждом университете, и соответствующие интернет-ресурсы. На различных сайтах (см. интернет-ресурсы [1–3]) представлены сами кейсы и рекомендации по их решению.

Несколько лет подряд в Финансовом университете действует студенческий кейс-клуб Management Consulting Club. В 2014 г. клуб занял первое место в номинации «Лучший кейс-клуб России 2014» по итогам голосов от компании Changellenge (национальная лига кейсов). Члены кейс-клуба проводят большую работу по вовлечению первокурсников в кейс-движение: ими разработан курс «Основа основ», посвященный знакомству с кейсами, основам командной работы, правилу оформлению презентаций и т.п. Ежегодно клуб организует кейс-чемпионаты для первокурсников, выявляет лучшие команды и осуществляет коучинг.

Достаточно полную и структурированную информацию о методе кейс-стади в рамках современной технологии профессионально ориентированного обучения можно найти в статье А.М. Долгорукова [4].

Существует несколько типов кейсов. Чаще всего на чемпионатах предлагаются кейсы, представляющие собой объемное описание некоторой экономической ситуации без четкой формулировки проблемы. Такой кейс дается на несколько дней команде, состоящий, как правило, из четырех участников. С другой стороны, во время собеседования может быть предложен кейс, требующий решения в течение нескольких минут. Более простые кейсы содержат в своей формулировке некоторую проблему, которую предлагается решить. Следует помнить, что недостаточно предложить вариант решения кейса, необходимо обязательно обосновать его оптимальность. Разбирая кейс, надо стараться смотреть на проблему широко, привлекая знания из различных областей науки, рассматривать все возможные варианты, включая нестандартные и оригинальные. Формально решение кейса можно разделить на несколько этапов:

- внимательное прочтение кейса;
- формулировка одной или нескольких проблем, осознание цели;
- поиск решения;
- доказательство оптимальности данного решения;
- оформление решения и создание презентации.

Обратим внимание на особенности некоторых этапов. Процесс поиска решений обычно проходит в режиме «мозгового штурма», при котором генерируется большое количество идей. В дальнейшем эти идеи анализируются, комбинируются и совершенствуются.

Огромного внимания требует этап обработки и анализа данных, связанных с поиском решений. Часть данных могут быть представлены непосредственно (например, в таблицах), или присутствуют ссылки на источники, содержащие данные. Необходимо проанализировать представленные массивы данных, вскрыть их экономический и математический смысл, установить связи между различными группами данных и оценить их. При анализе требуется сопоставление данных с известными закономерностями и выявление тех проблемных аспектов, которые не содержат достаточно информации. Отметим, что анализ данных и их обработка предполагают четкое представление о степени определенности в условиях формулируемой проблемы (полная или частичная определенность, условия неопределенности). Далее нужно развернуть поиск дополнительной информации в доступных источниках (статистические сайты, различные отчеты), произвести отбор допустимо возможных данных в рамках их оценок, проведенных ранее. На этапе расчетной обработки и применения математического аппарата крайне важно привести данные к одинаковым (стандартным) единицам измерения и следить за соответствием этих единиц на всех этапах их исследования и дальнейшего использования для получения итоговых численных результатов и выводов.

Большое внимание при оформлении решения уделяется презентации. Здесь существуют строгие ограничения по объему, а также некоторые традиции в представлении результатов. В частности, главный вывод, как правило, выносится на первую страницу, а далее идет обоснование результата.

Популярность кейсов в процессе обучения и в бизнес-среде привела к тому, что сегодня существует большое число публикаций с методиками проведения каждого этапа решения, например, учебные пособия [5, 6, 14]. Подобные рекомендации можно найти также на указанных ранее сайтах, посвященных кейсам.

1

ПРОЦЕНТЫ

Наращение денежной суммы

Пусть S_0 – первоначальная денежная сумма, r – (годовая) процентная ставка. Это означает, что соответствующий прирост величины ΔS денежной суммы по истечении года составляет $r = \frac{\Delta S}{S_0} \cdot 100\%$. Если сумма процента, начисленного за определенное количество периодов, не учитывает сумму процентов за предыдущие периоды, то такая ставка называется *простой процентной ставкой*. Тогда к концу n-го периода начисления денежная сумма составит

$$S_n = S_0 + \left(0,01r \cdot S_0\right) \cdot n = S_0(1 + 0,01r \cdot n).$$

Это значение называется *наращенной денежной суммой*, а нахождение ее по первоначальной сумме S_0 называется наращением исходной денежной суммы. Заметим, что последовательность наращенных сумм $S_1, S_2, ..., S_n$ образует арифметическую прогрессию с разностью $d = 0,01r \cdot S_0$. Наращение денежной суммы по простой процентной ставке выгодно для срока менее одного года, при этом полагают $n = \frac{t}{T}$, где t – число дней периода начисления, T – количество дней в году (обычно считают $T = 365$).

В основе долгосрочных финансовых операций лежит *капитализация процентов*. Это означает, что процент начисляется на постоянно растущую денежную сумму с учетом процентов, начисленных в предыдущие периоды, а соответствующая (годовая) ставка называется *сложной процентной ставкой*. Тогда к концу соответствующих периодов начисления суммы $S_1, S_2, ..., S_n$ при *сложной процентной ставке* примут вид

$$S_1 = S_0(1 + 0,01r),\ S_2 = S_1(1 + 0,01r) = S_0(1 + 0,01r)^2, ..., S_n = S_0(1 + 0,01r)^n.$$

Заметим, что теперь последовательность наращенных сумм образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1 + 0,01r$. Наращение денежной суммы по сложной процентной ставке выгодно для срока более одного года.

Начисление процентов может происходить несколько раз в году (по полугодиям, кварталам, месяцам). Пусть $m -$ число начислений процентов с капитализацией в течение года. Тогда каждое такое начисление происходит по сложной процентной ставке $\frac{r}{m}$, а к концу n-го года начисления наращенная сумма составит

$$S_n(m) = S_0\left(1 + 0,01\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}.$$

Например, при поквартальном начислении к концу n-го года имеем

$$S_n(4) = S_0\left(1 + 0,01\frac{r}{4}\right)^{4n}.$$

Наконец, если считать, что начисление процентов происходит непрерывно, то к концу n-го года начисления наращенная сумма примет вид

$$S_n = \lim_{m\to\infty} S_0\left(1 + 0,01\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n} = S_0 \lim_{m\to\infty}\left(1 + 0,01\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n} = S_0 \cdot e^{0,01 r\cdot n}.$$

При этом непрерывную процентную ставку обычно обозначают через δ и называют *силой роста* (force of interest):

$$S_n = S_0 \cdot e^{\delta \cdot n}.$$

Дисконтирование процентов

Определение стоимостной величины денежной суммы на некоторый момент времени называют ее *приведением*. В частности, если сумма приводится к более позднему моменту времени, то это наращение, а если к более раннему моменту времени, то это *дисконтирование*. Величины, называвшиеся ранее процентными ставками r, теперь будут называться ставками дисконтирования.

Под *математическим дисконтированием* понимают определение первоначальной денежной суммы S_0 через окончательно наращенную сумму S_n. Для случая простых и сложных процентов имеем соответственно

$$S_0 = \frac{S_n}{1+0,01r\cdot n}, \quad S_0 = \frac{S_n}{(1+0,01r)^n}.$$

Примеры решения задач

1. На накопительный счет в банке положено 300 тыс. руб. под 12% годовых (без капитализации). Вычислите размер вклада через: **а)** три года; **б)** пять месяцев; **в)** семь лет и два месяца.

Решение. Используя формулу наращения с простой процентной ставкой, вычисляем:

а) $S_3 = 300\cdot(1+0,12\cdot 3) = 408$ (тыс. руб.);

б) $S_{\frac{5}{12}} = 300\cdot\left(1+0,12\cdot\dfrac{5}{12}\right) = 315$ (тыс. руб.);

в) $S_{7\frac{1}{6}} = 300\cdot\left(1+0,12\cdot\left(7+\dfrac{1}{6}\right)\right) = 558$ (тыс. руб.).

2. Вычислите размер вклада из предыдущей задачи через один год при условии, что каждый месяц на счет добавляется 15 тыс. руб.

Решение. Поскольку счет пополняется каждый месяц, необходимо рассмотреть 12 периодов начисления. При этом проценты начисляются на начальную сумму и на вновь поступающие деньги. Таким образом, в формуле наращения первое слагаемое соответствует начальной сумме, а последующие – добавлениям. Используя формулу наращения с простой процентной ставкой, получим

$$S_1 = 300\cdot\left(1+0,12\cdot\frac{1}{12}\right)+15;$$

$$S_2 = 300\cdot\left(1+0,12\cdot\frac{2}{12}\right)+15\cdot\left(1+0,12\cdot\frac{1}{12}\right)+15;$$

$$S_3 = 300\cdot\left(1+0,12\cdot\frac{3}{12}\right)+15\cdot\left(1+0,12\cdot\frac{2}{12}\right)+15\cdot\left(1+0,12\cdot\frac{1}{12}\right)+15;$$

$$\ldots;$$

$$S_{12} = 300\cdot\left(1+0,12\cdot\frac{12}{12}\right)+15\cdot 11+15\cdot 0,12\cdot\left(\frac{11}{12}+\ldots+\frac{1}{12}\right) = 510,9 \text{ (тыс.руб.)}$$

Замечание: Выражение во второй скобке можно вычислить по формуле суммы членов арифметической прогрессии:

$$\frac{a_1+a_{11}}{2}\cdot 11=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{11}{12}\right)\cdot 11=5,5.$$

3. Вклад в размере 1,5 млн руб. положен в банк под 13% годовых (с ежегодной капитализацией). Рассчитайте сумму вклада через четыре года.

Решение. Используя формулу наращения со сложной процентной ставкой, находим $S_4=1,5\cdot(1+0,13)^4=2,445710$ (млн руб.).

4. Вклад в размере 1 млн руб. положен в банк под 12,5% годовых (с ежемесячной капитализацией). Рассчитайте сумму вклада через три года.

Решение. Учитывая, что начисление процентов происходит ежемесячно ($m=12$) по сложной процентной ставке $\frac{12,5}{12}$, получаем сумму вклада

$$S_3(12)=1\cdot\left(1+0,01\cdot\frac{12,5}{12}\right)^{12\cdot 3}=\left(1+\frac{0,125}{12}\right)^{36}=1,452172 \text{ (млн руб.)}.$$

5. Вклад в размере 500 тыс. руб. положен в банк под 9% годовых (с ежеквартальной капитализацией, возможностью пополнения и снятия). Каждые три месяца вклад пополняется на 50 тыс. руб. Рассчитайте сумму вклада через год и три месяца.

Решение. Поскольку счет пополняется каждые три месяца, необходимо рассмотреть 5 периодов начисления. Введем коэффициент ежеквартального наращения

$$k=1+0,01\cdot\frac{9}{4}=1+\frac{0,09}{4}.$$

С помощью этого коэффициента последовательность наращенных сумм запишется в более компактном виде

$$S_1=500\cdot\left(1+\frac{0,09}{4}\right)+50=500k+50;$$

$$S_2=\left(500\cdot\left(1+\frac{0,09}{4}\right)+50\right)\left(1+\frac{0,09}{4}\right)+50=(500k+50)k+50;$$

$$\ldots;$$

$$S_5=\Big(\Big(\big(\big(500k+50\big)k+50\big)k+50\Big)k+50\Big)k+50.$$

Раскрывая скобки и преобразуя выражение, получим

$$S_5=500k^5+50(k^4+\ldots+k+1)=$$

$$=500\cdot\left(1+\frac{0,09}{4}\right)^5+50\left(\left(1+\frac{0,09}{4}\right)^4+\ldots+\left(1+\frac{0,09}{4}\right)+1\right)\approx 820,349\ (\text{тыс. руб.})$$

Замечание: Выражение в скобках можно вычислить по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$\frac{b_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{1\left(1-\left(1+\frac{0,09}{4}\right)^5\right)}{1-\left(1+\frac{0,09}{4}\right)}\approx 5,23012.$$

6. Небольшая фирма хочет обновить оборудование и оформляет кредит в банке. Руководитель рассчитал, что сможет отдавать ежемесячно 100 тыс. руб. Какую сумму кредита может позволить себе фирма, если кредит оформляется на три года под 2,5% в месяц?

Решение. Пусть S_0 – сумма кредита. Поскольку кредит оформляется на три года с условием ежемесячных платежей, то фирма должна выплатить сумму $S_0\cdot(1+0,025)^{12\cdot 3}$ за 36 платежей. Введем обозначения:

$k=1+0,025$ – коэффициент ежемесячного наращения,

S_i – сумма остатка кредита после *i*-го платежа $(i=1,\ldots,36)$.

Очевидно, $S_{36}=0$. Тогда получаем последовательность остатков:

$$S_1=S_0\cdot k-100;$$

$$S_2=\left(S_0\cdot k-100\right)\cdot k-100=S_0\cdot k^2-100\cdot(k+1);$$

$$S_3=\left(\left(S_0\cdot k-100\right)\cdot k-100\right)\cdot k-100=S_0\cdot k^3-100\cdot\left(k^2+k+1\right);$$

$$\ldots;$$

$$S_{36}=S_0\cdot k^{36}-100\cdot\left(k^{35}+k^{34}+\ldots+1\right).$$

Из условия $S_{36}=0$ следует, что $S_0\cdot k^{36}=100\cdot\left(k^{35}+k^{34}+...+1\right)$, откуда находим

$$S_0=\frac{100\cdot\left(k^{35}+k^{34}+...+1\right)}{k^{36}}=\frac{100\cdot\left(1-k^{35}\right)}{k^{36}(1-k)}\approx 2258,064 \text{ (тыс. руб.)}$$

7. Для обновления оборудования сборочного цеха руководство завода два года назад решило взять кредит в размере 1,8 млн руб. на условиях ежемесячной выплаты, с равномерным уменьшением долга. Завод погасил кредит через 24 месяца. Вновь назначенный главный бухгалтер просуммировал платежи по кредиту и получил 2,925 млн руб. Чему равнялась процентная ставка с ежемесячными выплатами? Какие выводы мог сделать главный бухгалтер?

Решение. Введем обозначения:

S_0 = 1,8 (млн руб.) – сумма кредита;

S_i – сумма долга в начале i-го месяца $(i=1,...,24)$;

$k=1+0,01r$ – коэффициент ежемесячного наращения;

r – процентная ставка.

Равномерное уменьшение долга означает, что ежемесячно вносилась денежная сумма в размере $\frac{S_0}{24}$. При этом суммарные выплаты составили 2,925 млн руб.

По данным задачи заполним таблицу.

Месяц	*1*	*2*	*3*	...	*24*
Долг в начале месяца S_i	S_0	$\frac{23}{24}S_0$	$\frac{22}{24}S_0$	…	$\frac{1}{24}S_0$
Долг в конце месяца $S_i\cdot k$	$S_0\cdot k$	$\frac{23}{24}S_0\cdot k$	$\frac{22}{24}S_0\cdot k$	…	$\frac{1}{24}S_0\cdot k$

Сумма выплат представляет собой разность между суммарным долгом в конце каждого из 24 месяцев и суммарным долгом в начале каждого из этих месяцев, кроме первого. Вычитая из нижней строки таблицы верхнюю ее строку (кроме значения суммы кредита S_0), получаем

$$S_0\cdot k\cdot\left(1+\frac{23}{24}+\frac{22}{24}+...+\frac{1}{24}\right)-S_0\cdot\left(\frac{23}{24}+\frac{22}{24}+...+\frac{1}{24}\right)=2,925.$$

Выражения в обеих скобках вычисляем по формуле суммы членов арифметической прогрессии

$$\frac{a_1+a_{24}}{2}\cdot 24=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{24}+1\right)\cdot 24=12,5;\quad \frac{a_1+a_{23}}{2}\cdot 23=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{24}+\frac{23}{24}\right)\cdot 23=11,5.$$

Далее решаем полученное уравнение

$$1,8k\cdot 12,5-1,8\cdot 11,5=2,925;$$

$$12,5k-11,5=1,625;$$

$$k=1,05.$$

Таким образом, искомая процентная ставка $r=5\%$. Вывод главного бухгалтера мог быть таким: кредит с ежемесячными выплатами не выгоден в долгосрочном периоде.

Задачи для самостоятельной работы

1.1. Вклад в размере 200 тыс. руб. положен в банк под 11,5% годовых (без капитализации). Рассчитайте сумму вклада через: **а)** два года; **б)** три года восемь месяцев.

1.2. Какую сумму следует положить на счет под 11% годовых (без капитализации), чтобы через три года на счету был 1 млн руб.?

1.3. На накопительный счет в банке положено 500 тыс. руб. под 10% годовых (без капитализации). Вычислите размер вклада через три года при условии, что каждый месяц вклад пополняется на 25 тыс. руб. Оцените выгоду такого вложения.

1.4. Вклад в размере 800 тыс. руб. положен в банк под 11% годовых. Рассчитайте сумму вклада через два года при условии: **а)** ежегодной капитализации; **б)** ежеквартальной капитализации; **в)** ежемесячной капитализации; **г)** ежедневной капитализации; **д)** непрерывной капитализации. Подумайте, возможна ли такая капитализация. Какая капитализация наиболее выгодная? Изучите предложения банков по возможной капитализации.

1.5. Вклад в размере 300 тыс. руб. положен в банк под 10% годовых (с ежегодной капитализацией, возможностью пополнения и снятия). Какую сумму нужно добавлять на счет каждый год, чтобы к началу четвертого года вклад оказался 2 млн руб.?

1.6. Рассчитайте, что выгоднее: открыть вклад на три года без капитализации под 14% годовых или с ежегодной капитализацией под 12% годовых?

1.7. Внести оплату 360 тыс. руб. за учебный год в вузе можно сразу или по 185 тыс. руб. за каждый семестр. Допустим, что на момент оплаты вы обладаете всей необходимой суммой. Рассчитайте, что выгоднее: внести оплату за весь учебный год или только за один семестр, положив оставшуюся часть в банк под 9% годовых.

1.8. Для капитального ремонта помещения предприниматель планирует взять кредит на пять лет в размере 5 млн руб. под 18% годовых. Согласно условиям банка, в начале каждого следующего года долг должен уменьшаться равномерно, на одну и ту же величину после начисления процентов. Сколько млн руб. составит общая сумма выплат после погашения кредита?

1.9. Представьте, что вы хотите открыть вклад на 100 тыс. руб. на один год. Рассмотрите предложения трех крупных банков: «Сбербанка России», Росбанка и «Московского индустриального банка». Выберите из них наиболее выгодное.

1.10. Вы планируете взять кредит на 1 млн руб. на три года. Изучите предложения на рынке и выберите из них наиболее выгодное.

1.11. Предприниматель регистрирует фирму и хочет получить кредит. Изучите предложения на рынке. По какой процентной ставке выгоднее всего взять кредит? Может ли предприниматель рассчитывать на федеральные и (или) региональные программы по поддержке малого предпринимательства?

1.12. Оцените свои возможности. Представьте, что вам очень хочется приобрести какую-то вещь или совершить туристическую поездку. Вы планируете взять кредит на один год, но будучи ответственным, должны рассчитать, какую денежную сумму вы в состоянии отдавать каждый месяц. Сделайте соответствующие прикидки и определите сумму кредита, которую вы можете себе позволить. Вычислите итоговую сумму, которую вам придется отдать, и сделайте выводы.

2

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Функции спроса и предложения

Для анализа динамики экономических процессов важно уметь находить функциональные зависимости соответствующих параметров и графически интерпретировать их. Прежде всего экономистов интересуют основные показатели деятельности компании по мере роста объемов реализации продукции.

Функции *спроса* и *предложения* описывают взаимосвязь между ценой товара, поставляемого на рынок, и количеством потребителей, желающих его купить.

Функция спроса $Q_D(P)$ – это количество товара, которое потребители готовы купить по цене P. *Функция предложения* $Q_S(P)$ – это количество товара, которое поставщики готовы продать по цене P.

В простейших рыночных моделях предполагается, что функции спроса и предложения линейны, например, $Q_D(P) = b_1 + a_1 P$, $Q_S(P) = b_2 + a_2 P$. При этом считается, что функция спроса, как правило, является убывающей функцией, т.е. $a_1 < 0$, а функция предложения – возрастающей, т.е. $a_2 > 0$. Графики функций спроса и предложения называются соответственно *кривой спроса* и *кривой предложения*. В экономических исследованиях цену P принято откладывать по оси ординат, а количество товара Q – по оси абсцисс. Это означает, что кривые спроса и предложения будут выглядеть как графики обратных функций.

Как правило, кривые спроса и предложения изображают как прямые или монотонные кривые. На самом деле реальные графики этих функций могут быть любой формы. Но для исследований достаточно знать общий вид кривых, а не их точную траекторию.

Точка пересечения графиков функций соответствует состоянию рынка, когда *спрос равен предложению*. При этом установилась такая цена P_0, что количество товара $Q_D(P_0)$, которое потребители готовы приобрести по данной цене P_0, равно количеству товара $Q_S(P_0)$, которое поставщики готовы продать по этой же цене. Точка (P_0, Q_0) называется *точкой равновесия*, цена P_0 – *равновесной ценой*, а величина Q_0 – *равновесным количеством*. Для нахождения точки равновесия необходимо либо решить уравнение $Q_D(P) = Q_S(P)$, либо построить графики функций в одной системе координат и определить координаты точки пересечения.

Если обе функции линейны, точка равновесия (P_0, Q_0) единственна, но в общем случае может оказаться более одной точки равновесия.

Метод наименьших квадратов (МНК)

Чтобы иметь возможность применять математический аппарат для исследования и анализа различных процессов, прогнозирования их развития, необходимо научиться выводить функциональную зависимость между экономическими показателями и параметрами. Другими словами, надо уметь «вручную» выводить формулы для соответствующих функций, опираясь на экспериментальные данные, представленные в табличной форме. Обратимся к методу наименьших квадратов (МНК).

Предположим, что зависимость между двумя переменными получена опытным путем в виде таблицы:

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, называются ***эмпирическими формулами,*** или ***эмпирическими функциями***.

Задача нахождения эмпирической функции состоит из двух этапов:

- установить вид зависимости (линейная, квадратичная, показательная и т.д.);
- определить неизвестные параметры (коэффициенты) этой функции.

Если $y = f(x)$ – предполагаемая эмпирическая функция, то $\delta_i = f(x_i) - y_i$ – ***невязка*** или отклонение теоретического значения функции от опытного для каждого значения $i = 1, 2, ..., n$.

Введем обозначение суммы для большого числа слагаемых:

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i .$$

Если число слагаемых при преобразованиях не меняется, то запись можно упростить: $\sum u_i$.

Суть МНК: найти такие параметры эмпирической функции, для которых сумма квадратов невязок является наименьшей:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i) \right)^2 \to \min .$$

Пусть $y = ax + b$ – искомая линейная эмпирическая функция.

Чтобы найти коэффициенты a и b линейной зависимости, при которых функция двух переменных $F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b) \right)^2$ принимает наименьшее значение, данная функция исследуется на экстремумы с помощью частных производных.

Формулы для нахождения коэффициентов искомой линейной функции имеют вид

$$\begin{cases} a = \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2}, \\ b = \dfrac{\sum y_i - a\sum x_i}{n}. \end{cases}$$

На практике суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ рекомендуется вычислять отдельно. Коэффициент b находят после вычисления коэффициента a.

Примеры решения задач

1. На одном чертеже постройте графики кривых спроса и предложения, если $Q_D(P) = 36 - 4P$, $Q_S(P) = 6 + 2P$.

Решение. Воспользуемся приложением EXCEL для построения графиков. Еще раз отметим, что в экономической теории цена P откладыватся по оси ординат, а количество товара Q – по оси абсцисс. Поэтому для построения двух графиков в одной системе координат необходимо для каждой функции выразить переменную P через Q_D и Q_S. Получим две соответствующие обратные функции:

$$P_D(Q) = 9 - \frac{Q}{4} \quad \text{и} \quad P_S(Q) = -3 + \frac{1}{2}Q.$$

Подберем значения свободной переменной Q таким образом, чтобы значения обеих функций были целочисленными, например, $Q_1 = 8, Q_2 = 32$. Это удобно для заполнения таблицы в EXCEL. На рис. 1 показана заполненная таблица для данных функций. Построенные в EXCEL графики показаны на рис. 2.

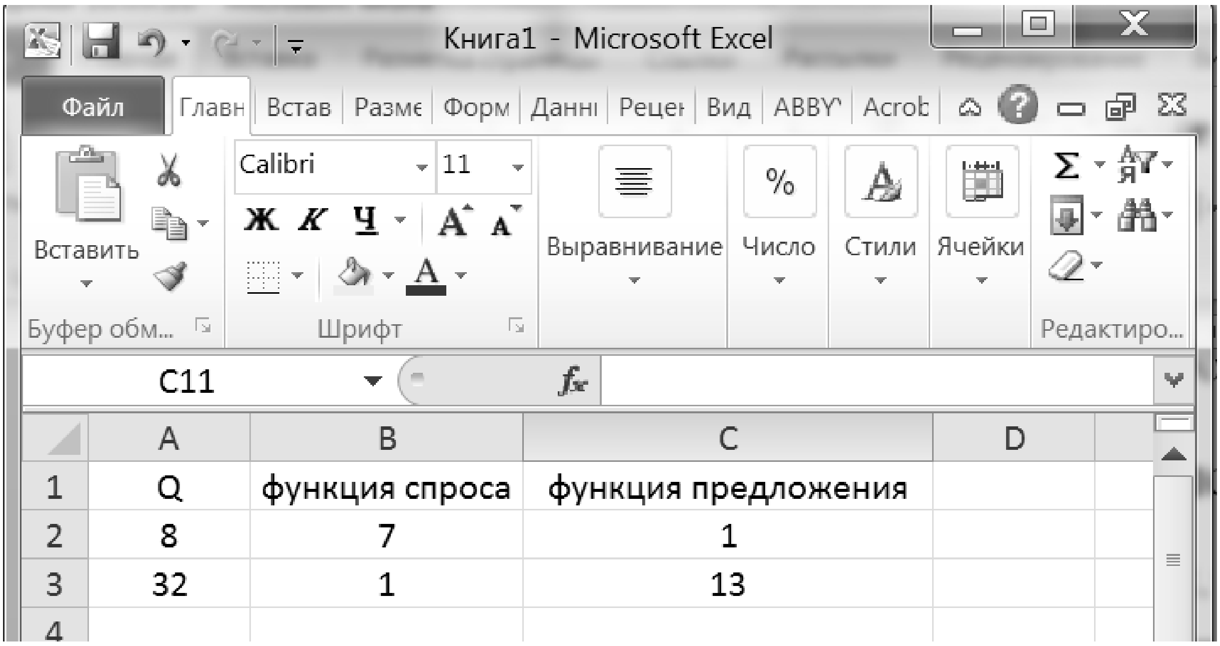


Рис. 1. Значения функций спроса и предложения

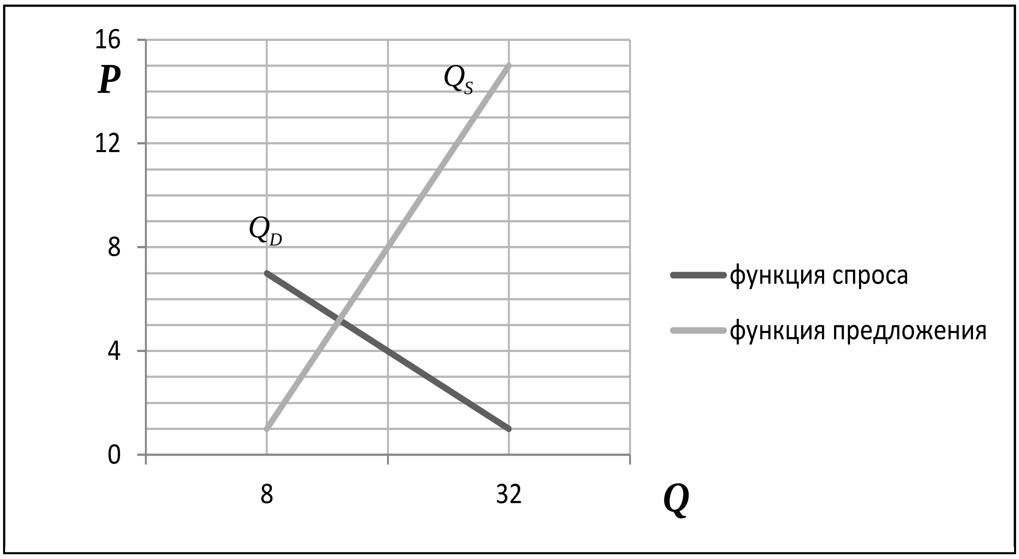


Рис. 2. Графики функций спроса и предложения

В случае нелинейных функций спроса и предложения графики также можно строить в EXCEL, учитывая особенность расположения координатных осей.

2. В таблице 2.1 представлены данные опроса студентов о времени их подготовки к экзамену по высшей математике.

Таблица 2.1

Студент	Часы	Оценка
1	19	58
2	3	15
3	10	31
4	17	60
5	15	40
6	4	33

Используя метод наименьших квадратов, аппроксимируйте эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найдите параметры a и b). Сделайте выводы.

Решение. Обозначим через x количество часов, затраченное на подготовку к экзамену, а через y – суммарное количество баллов. По данным задачи заполним расширенную таблицу 2.2.

Таблица 2.2

Студент	Часы x	Оценка y	$x \cdot y$	x^2
1	19	55	1102	381
2	3	15	45	9
3	10	31	310	100
4	17	29	493	289
5	15	42	630	225
6	4	21	84	16
	Σ = 68	Σ = 193	Σ = 2664	Σ = 1020

Выполним вычисления, используя суммарные значения в последней строке:

$$\begin{cases} a = \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \dfrac{6 \cdot 2664 - 68 \cdot 193}{6 \cdot 1020 - 68^2} = 1{,}91 \\ b = \dfrac{\sum y_i - a\sum x_i}{n} = \dfrac{193 - 1{,}91 \cdot 68}{6} = 10{,}52 \end{cases}.$$

Теперь из уравнения «наилучшей прямой» $y = 1{,}91 \cdot x + 10{,}52$ сделаем выводы:

- Увеличение времени подготовки на один час приводит к улучшению результата примерно на 2 балла.
- Чтобы улучшить результат на 10 баллов, нужно заниматься более чем на пять часов больше.
- Если не заниматься вообще (x = 0), то получишь 10,5 баллов.
- Чтобы получить 60 баллов (y = 60), нужно заниматься 25,9 часа.

Оказывается, два последних вывода некорректны, поскольку в третьем и четвертом случае мы вышли за границу анализируемой области: часы изменяются от 3 до 19 и оценки от 15 до 55. Интерполяция на внешнюю область может приводить к необоснованным заключениям [7].

3. В таблице 2.3 представлены заранее обработанные статистические данные спроса и предложения в компании ОАО «Аэрофлот – Российские авиалинии» за 2001–2015 гг. [11], где P – средняя цена за пассажиро-километр, Q – пассажирооборот (количество проданных мест). Найдите функции спроса и предложения, изобразите их графически.

Таблица 2.3

Табличная зависимость цены и объема для спроса и предложения

	Спрос		*Предложение*	
	P	Q_D	P	Q_S
2001	6,84	$1{,}89\cdot10^{10}$	1,71	$5{,}04\cdot10^{10}$
2002	6,88	$1{,}76\cdot10^{10}$	1,99	$5{,}04\cdot10^{10}$
2003	6,44	$1{,}82\cdot10^{10}$	2,09	$5{,}82\cdot10^{10}$
2004	5,91	$2{,}06\cdot10^{10}$	2,14	$6{,}66\cdot10^{10}$
2005	6,19	$2{,}07\cdot10^{10}$	2,50	$7{,}37\cdot10^{10}$
2006	6,08	$2{,}24\cdot10^{10}$	2,67	$6{,}89\cdot10^{10}$
2007	6,10	$2{,}27\cdot10^{10}$	2,99	$8{,}32\cdot10^{10}$
2008	5,90	$2{,}72\cdot10^{10}$	3,29	$8{,}13\cdot10^{10}$
2009	5,22	$2{,}60\cdot10^{10}$	3,18	$6{,}14\cdot10^{10}$
2010	4,52	$3{,}48\cdot10^{10}$	2,98	$8{,}17\cdot10^{10}$
2011	4,16	$4{,}20\cdot10^{10}$	2,92	$8{,}49\cdot10^{10}$
2012	5,55	$5{,}05\cdot10^{10}$	4,15	$8{,}65\cdot10^{10}$
2013	5,15	$6{,}02\cdot10^{10}$	4,11	$8{,}86\cdot10^{10}$
2014	4,60	$6{,}71\cdot10^{10}$	4,00	$8{,}89\cdot10^{10}$
2015	4,71	$7{,}41\cdot10^{10}$	4,71	$9{,}35\cdot10^{10}$

Решение. Чтобы получить функции спроса и предложения из вышеприведенной таблицы зависимости, воспользуемся методом наименьших квадратов, который сгладит отклонения данных от общей тенденции. Будем считать, что объем спроса и предложения линейно зависит от цены: $Q(P) = aP + b$

Найдем коэффициенты a и b для функции спроса $Q_D(P) = aP + b$. По данным задачи заполним расширенную таблицу 2.4.

Таблица 2.4

Дополнение табличной зависимости суммами для вывода функции спроса методом наименьших квадратов

	P_i	Q_i	P_i^2	$P_i \cdot Q_i$
2001	6,84	$1{,}89 \cdot 10^{10}$	46,84	$1{,}29 \cdot 10^{10}$
2002	6,88	$1{,}76 \cdot 10^{10}$	47,45	$1{,}22 \cdot 10^{10}$
…	…			
2015	4,71	$7{,}41 \cdot 10^{10}$	22,24	$3{,}49 \cdot 10^{10}$
Суммы	84,31	$5{,}25 \cdot 10^{10}$	484,19	$2{,}78 \cdot 10^{10}$

Рассчитаем коэффициенты линейной зависимости по соответствующим формулам:

$$\begin{cases} a = \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \dfrac{15 \cdot 2,78 \cdot 10^{12} - 84,31 \cdot 5,25 \cdot 10^{11}}{6 \cdot 79 - 19^2} = -1,64 \cdot 10^{10} \\ b = \dfrac{\sum y_i - a\sum x_i}{n} = \dfrac{5,25 \cdot 10^{11} + 1,64 \cdot 10^{10} \cdot 84,31}{15} = 1,27 \cdot 10^{10} \end{cases}.$$

Получаем $Q_D(P) = -1,64 \cdot 10^{10} P + 1,27 \cdot 10^{10}$.

Аналогичный расчет сделаем для функции предложения (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Дополнение табличной зависимости суммами для вывода функции предложения методом наименьших квадратов

	P_i	Q_i	P_i^2	$P_i \cdot Q_i$
2001	1,71	$5{,}18 \cdot 10^{10}$	2,95	$8{,}89 \cdot 10^{10}$
2002	1,99	$5{,}04 \cdot 10^{10}$	3,96	$1{,}01 \cdot 10^{10}$
…	…			
2015	4,71	$9{,}35 \cdot 10^{10}$	22,24	$4{,}41 \cdot 10^{10}$
Суммы	45,51	$1{,}12 \cdot 10^{10}$	149,28	$3{,}55 \cdot 10^{10}$

$$\begin{cases} a = 1,36 \cdot 10^{10} \\ b = 3,33 \cdot 10^{10} \end{cases}.$$

Окончательно, $Q_S(P) = 1,36 \cdot 10^{10} P + 3,33 \cdot 10^{10}$.

Найденные функции спроса и предложения изобразим графически (рис. 3):

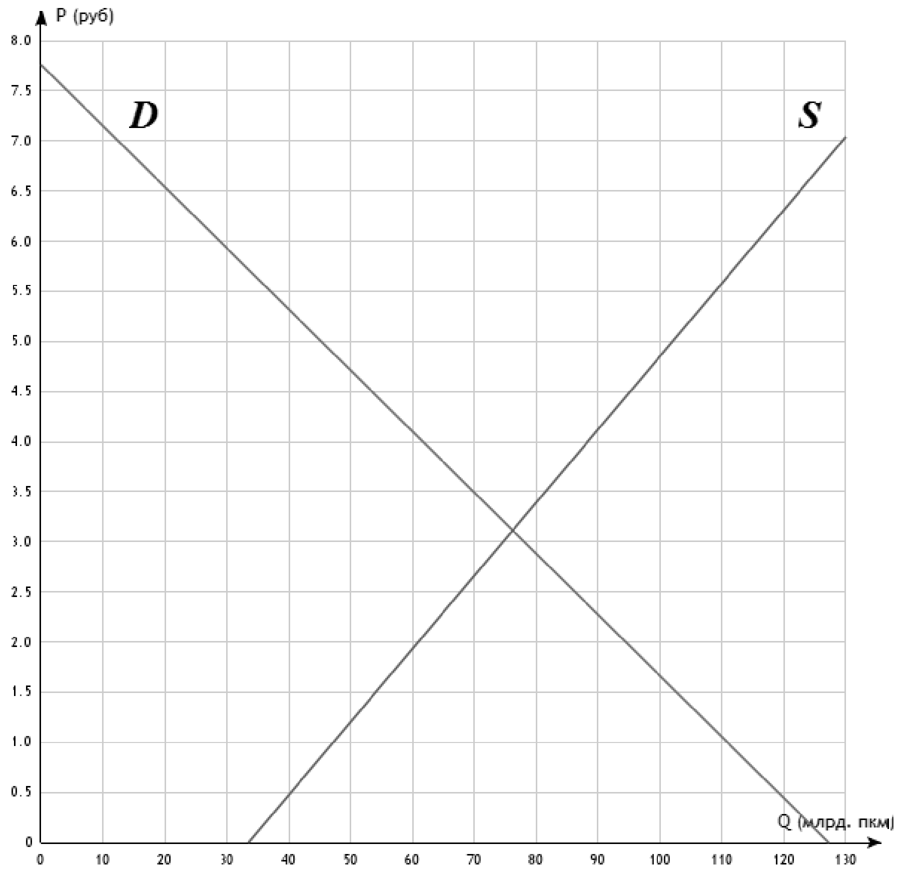


Рис. 3. Функции спроса и предложения

4. Закупочная цена пшеницы составляет 10 тыс. руб. за 1 тонну, а цена реализации зерна – 10,5 тыс. руб. за 1 тонну. Ниже приведены данные зависимости урожайности пшеницы (y) от количества кг засеянной данной культуры на 1 гектар (x):

n	x	y
1	70	500
2	80	700
3	90	800
4	100	950
5	110	1100
6	120	1300
7	130	1600

n	x	y
8	140	1835
9	150	2021
10	160	2000
11	170	1950
12	180	1900
13	190	1790
14	200	1740

n	x	y
15	210	1600
16	220	1480
17	230	1350
18	240	1320
19	250	1290
20	260	1100
21	270	800

Рассчитайте максимально возможный доход от продажи урожая, предварительно определив оптимальное количество зерна, которое необходимо приобрести для проведения посевной кампании на площади 25 га.

Решение. Изобразим табличные данные о зависимости урожайности пшеницы (y) от количества засеянного зерна на 1 га (x) графически (рис. 4).

Как видно из рисунка, точки уложились в линию, напоминающую параболу. Это позволяет предположить, что искомая зависимость является квадратичной функцией $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Воспользуемся методом наименьших квадратов для нахождения ее коэффициентов.

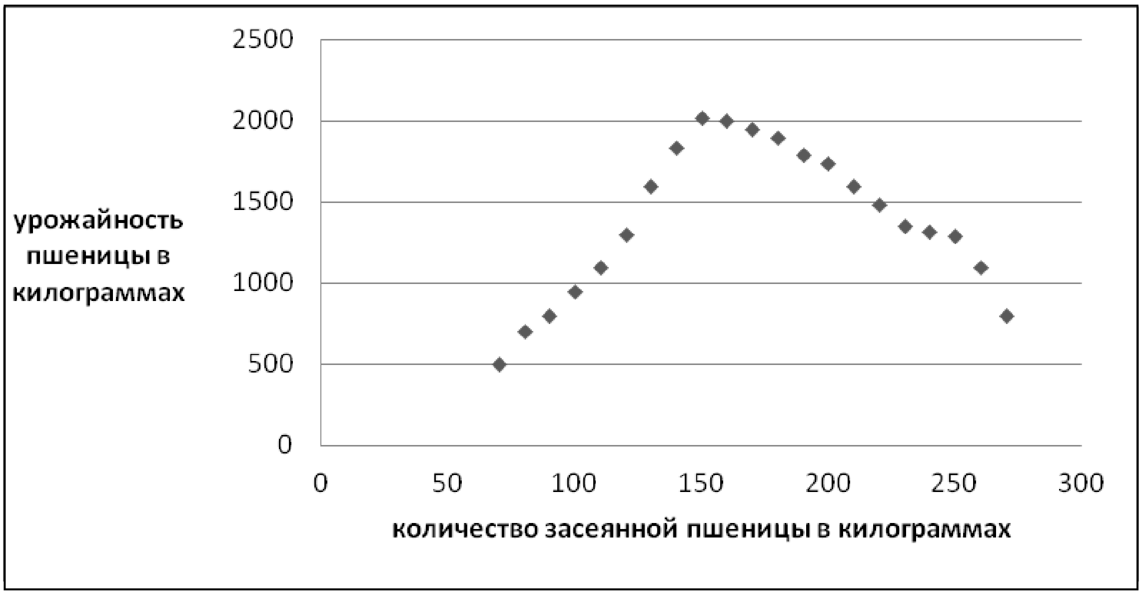


Рис. 4. Зависимость урожайности пшеницы на 1 га

Формулы для нахождения коэффициентов квадратичной функции имеют вид

$$\begin{cases} a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i; \\ a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + n a_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

В таблице 2.6 приведены промежуточные расчеты для нахождения коэффициентов a_0, a_1 и a_2.

Таблица 2.6

n	x	y	x^4	x^3	x^2	$x^2 \cdot y$	$x \cdot y$
1	70	500	$2{,}4 \cdot 10^7$	$3{,}4 \cdot 10^5$	$4{,}9 \cdot 10^3$	$2{,}5 \cdot 10^6$	$3{,}5 \cdot 10^4$
2	80	700	$4 \cdot 10^7$	$5{,}1 \cdot 10^5$	$6{,}4 \cdot 10^3$	$4{,}5 \cdot 10^6$	$5{,}6 \cdot 10^4$
…	…	…	…	…	…	…	…
21	270	800	$5{,}3 \cdot 10^9$	$1{,}9 \cdot 10^7$	$7{,}3 \cdot 10^4$	$5{,}8 \cdot 10^7$	$2{,}2 \cdot 10^5$
Σ	3570	29126	$3{,}1 \cdot 10^{10}$	$1{,}4 \cdot 10^8$	$6{,}8 \cdot 10^5$	$9{,}6 \cdot 10^8$	$5{,}1 \cdot 10^6$

Система уравнений относительно a_0, a_1 и a_2 принимает вид

$$\begin{cases} 3{,}1 \cdot 10^{10} \cdot a_2 + 1{,}4 \cdot 10^8 \cdot a_1 + 6{,}8 \cdot 10^5 \cdot a_0 = 9{,}6 \cdot 10^8; \\ 1{,}4 \cdot 10^8 \cdot a_2 + 6{,}8 \cdot 10^5 \cdot a_1 + 3570 \cdot a_0 = 5{,}1 \cdot 10^6; \\ 6{,}8 \cdot 10^5 \cdot a_2 + 3570 \cdot a_1 + 21 \cdot a_0 = 29126. \end{cases}$$

Решив данную систему линейных уравнений, например, по формулам Крамера, получаем коэффициенты:

$$a_0 = -2164{,}5; \; a_1 = 45{,}395; \; a_2 = -0{,}128.$$

Следовательно, квадратичная функция имеет вид

$$y = -2164{,}5 + 45{,}395x - 0{,}128x^2.$$

На рисунке 5 эмпирический и теоретический графики построены в одной системе координат. По данным аппроксимирующей функции находим точку максимума и максимальное значение:

$$x_{\max} = 180; \; y_{\max} = y(180) = 1859{,}4.$$

Доход рассчитаем по формуле $TR = y_{\max} \cdot n_{\text{га}} \cdot P$, где $n_{\text{га}} = 25$ га – количество засеваемых гектар, $P = 10{,}5$ руб. – цена реализации 1 кг пшеницы. Таким образом, $TR = 488100$ руб. – возможный максимальный доход.

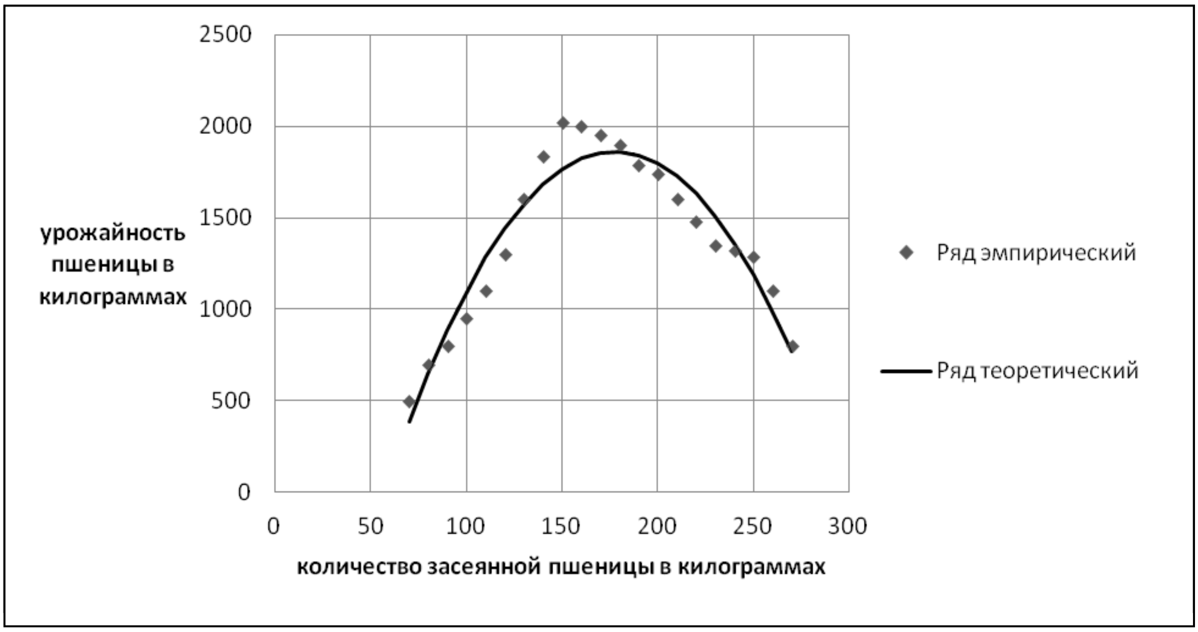


Рис. 5. Сравнение эмпирического и теоретического графиков

Задачи для самостоятельной работы

2.1. Для функции спроса $Q_D(P) = 22 - 2P$ и функции предложения $Q_S(P) = \frac{1}{4}P - 5$ постройте графики, найдите равновесную цену P_0 и равновесное количество товара Q_0.

2.2. Исходя из данных Федеральной службы государственной статистики о численности населения России в современных границах, методом наименьших квадратов найдите линейную функцию $y = ax + b$, аппроксимирующую следующие данные[1]:

x (год)	1917	1926	1939	1959	1970	1990	2010	2016
y (млн чел.)	91,0	92,7	108,4	117,2	129,9	147,7	142,8	146,5

Что вы можете сказать о численности населения в России: **а)** в 2000 году, **б)** в 2020 году? Насколько выводы достоверны?

[1] URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/population (дата обращения: 10.10.2016).

3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Эластичность

Важным вопросом при прогнозировании экономической ситуации является реакция потребительского спроса на изменение цены. Количественно оценить степень изменения одной величины вследствие изменения другой позволяет использование понятия ***эластичность***.

Эластичность – это отношение процентного изменения зависимой переменной к процентному изменению независимой переменной.

Наиболее часто при анализе используется эластичность спроса по цене. В этом случае спрос рассматривается как функция цены: $D_P = Q_D\left(P\right)$, тогда

$$E_{D,P} = \frac{\dfrac{\Delta Q_D}{Q_D}\cdot 100\%}{\dfrac{\Delta P}{P}\cdot 100\%}.$$

При непрерывном изменении цены и спроса обычно переходят к пределу

$$E_{D,P} = \lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta Q_D}{\Delta P}\cdot\frac{P}{Q_D}.$$

Используя определение производной, получим

$$E_{D,P} = \frac{Q_D'}{Q_D}\cdot P, \text{ или } E_{D,P} = \left(\ln Q_D\right)'\cdot P.$$

Заметим, что кроме цены в качестве аргумента может быть использована любая характеристика, от которой зависит спрос: доход, цены других товаров, рекламные вложения.

Спрос называется ***эластичным,*** если $\left|E_{D,P}\right|>1$. В этом случае незначительное увеличение (уменьшение) цены приводит к существенному уменьшению (увеличению) объема продаж. Если $\left|E_{D,P}\right|<1$, спрос называется ***неэластичным,*** в этом случае изменение цены не приводит к существенному изменению объема продаж (подробнее об эластичности см., например, [13, с. 95]).

Поскольку функция спроса, как правило, убывающая $\left(D'<0\right)$, то эластичность спроса является отрицательной величиной. Следовательно, при решении неравенства $\left|E_{D,P}\right|>1$ достаточно рассмотреть случай $E_{D,P}<-1$.

Причиной изменения спроса на товар может быть изменение цен на другие товары. Наличие связи между товарами может быть установлено с помощью вычисления перекрестной эластичности.

Перекрестная эластичность спроса на товар *A* по цене товара *B* равна отношению процентного изменения спроса на товар *A* к процентному изменению цены на товар *B*:

$$E_{cross}=\frac{\dfrac{\Delta Q_A}{Q_A}}{\dfrac{\Delta P_B}{P_B}}.$$

Если $E_{cross}>0$, то при увеличении цены на товар *A* растет спрос на товар *B*. В этом случае речь идет о взаимозаменяемости товаров. Если $E_{cross}<0$, то увеличение цены на товар *A* приводит к снижению спроса на товар *B* (для взаимодополняющих товаров).

Наряду с эластичностью спроса важное значение имеет вычисление эластичности предложения по цене, которая показывает изменение количества предлагаемого к реализации товара в зависимости от изменения цены на него:

$$E_{S,P}=\frac{\dfrac{\Delta Q_S}{Q_S}}{\dfrac{\Delta P}{P}}, \text{ или } E_{D,P}=\frac{Q_S'}{Q_S}\cdot P \text{ (для непрерывных моделей).}$$

Распределение налогового бремени

Налоги являются неотъемлемой характеристикой любого государства. При введении дополнительного налога равновесная цена изменяется и, как правило, потребитель вынужден платить за товар более высокую цену, а производитель при этом получает меньшую прибыль. Рассмотрим, в каком отношении налоговое бремя ложится на потребителя и производителя [10].

Пусть P_0 – равновесная цена до введения налога, P_T – цена товара после введения налога T, $\Delta P = P_T - P_0$ – изменение равновесной цены после введения налога. Именно на величину ΔP увеличиваются расходы потребителя на приобретение единицы продукции. Производитель при этом от новой цены P_T будет вынужден отдать величину налога T и его доход уменьшится на величину $T - \Delta P$ при реализации каждой единицы продукции.

Считая величины ΔP и T достаточно малыми по сравнению с P_0 и используя формулу приближенных вычислений

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

можно записать

$$Q_D(P_0 + \Delta P) \approx Q_D(P_0) + Q_D{}'(P_0)\Delta P;$$

$$Q_S(P_0 + \Delta P - T) \approx Q_S(P_0) + Q_S{}'(P_0)(\Delta P - T).$$

Приравнивая эти величины, исходя из условия равновесия, получим формулу распределения налогового бремени между потребителем и производителем после введения налога и формулу изменения цены, вызванного введением дополнительного налога T:

$$\frac{\Delta P}{T - \Delta P} = -\frac{Q'_S(P_0)}{Q'_D(P_0)}, \ \Delta P \approx \frac{Q'_S(P_0) \cdot T}{Q_S{}'(P_0) - Q'_D(P_0)}.$$

В экономике при анализе распределения налогового бремени часто используют геометрическую интерпретацию. На рис. 6 отрезок $P_T P_S$ делится точкой P_0 как раз в отношении распределения налогового бремени $\dfrac{\Delta P}{T - \Delta P}$:

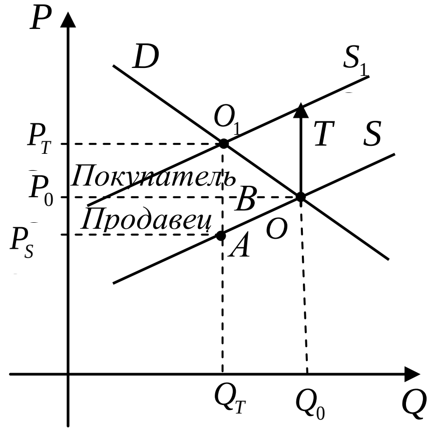


Рис. 6

$$\Delta P = P_T - P_0 \text{ и } P_0 P_S = P_0 - P_s = P_0 - (P_0 + \Delta P - T) = T - \Delta P.$$

При этом общая сумма налоговых поступлений $Q_T \cdot T$ будет равна площади прямоугольника $P_T O_1 A P_S$. Распределение этих поступлений между потребителем и поставщиком отмечено на рис. 6.

Предельные величины. Условие максимизации прибыли

При построении экономических прогнозов достаточно часто используются *предельные величины*. Наиболее важные из них – предельный доход, предельные издержки, предельная полезность. Эти величины находятся через отношение изменения зависимой величины к изменению независимой при условии, что изменение независимой величины достаточно мало. В теории часто переходят к непрерывным переменным и предельные величины вычисляются через производную функции. Так, например, предельные издержки MC находятся по формуле

$$MC = C'(Q) \text{ или } MC = \left(TC\right)',$$

где TC – общие издержки. Предельные издержки показывают изменение переменных (а значит и общих) издержек при производстве дополнительной единицы продукции. Знание предельных издержек помогает прогнозировать положение дел при изменении объема производства.

С предельными величинами связано и решение важного вопроса о получении максимальной прибыли. Так как прибыль предприятия равна разности общего дохода и общих издержек: $\pi = TR - TC$, то максимум прибыли будет получен при условии $\pi' = 0$, т.е.

$$\left(TR\right)' = \left(TC\right)', \text{ или } MR = MC.$$

Таким образом, максимум прибыли достигается при равенстве предельного дохода предельным издержкам.

Закон убывающей эффективности

Закон убывающей эффективности, или закон убывающей производительности (см., например, [13, с. 186]), говорит о том, что постоянное добавление переменного ресурса (труда или капитала) к постоянному ресурсу неизбежно приводит к тому, что каждая следующая добавленная единица переменного ресурса увеличивает валовой продукт меньше, чем предыдущая. График такой функции представляет собой S-образную кривую (рис. 7). Слева от точки перегиба функция является выпуклой и дополнительные вложения приводят к быстрому росту валового продукта, а справа от точки перегиба функция вогнута и дополнительные вложения уже не вызывают значительного роста объема выпускаемой продукции.

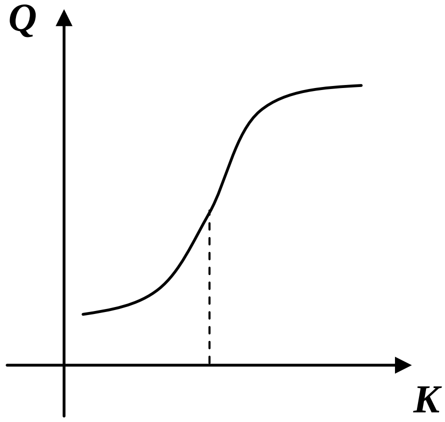


Рис. 7

Примеры решения задач

1. Долговременный спрос на светодиодные лампы задается функцией $Q_D = 16{,}3 - 1{,}3P$, а долговременное предложение функцией $Q_S = 6{,}1 + 2{,}1P$. Найдите точку рыночного равновесия и определите, будет ли спрос в этой точке эластичным.

Решение. Из условия $Q_D = Q_S$ находим точку рыночного равновесия $P_0 = 3$. Тогда эластичность $E_{D,P}(3) = -\dfrac{3{,}9}{12{,}4} \approx -0{,}3145$ и $\left|E_{D,P}\right| < 1$, следовательно, спрос неэластичен.

2. Кратковременный спрос на пляжную обувь описывается функцией $Q_D = 2240 - 16P$. В настоящий момент такая обувь продается по цене 100 руб. за пару. Найдите все значения цены, при которых спрос на эту продукцию эластичен. Имеет ли смысл компании снизить цену для увеличения числа продаж?

Решение. Эластичность $E_{D,P} = -\dfrac{16P}{2240 - 16P}$. Функция эластична $\Leftrightarrow \left|E_{D,P}\right| > 1$. Так как эластичность спроса отрицательна, то достаточно рассмотреть случай $E_{D,P} < -1$. Решая неравенство $\dfrac{16P}{2240-16P} > 1$, получим $P \in (70;140)$. Таким образом, спрос при цене 100 руб. является эластичным, поэтому снижение цены (не более чем до 70 руб.) приведет к увеличению объема продаж.

3. Спрос на шариковые авторучки задается прямой, изображенном на рис. 8. Найдите эластичность спроса при цене 30 руб. за штуку.

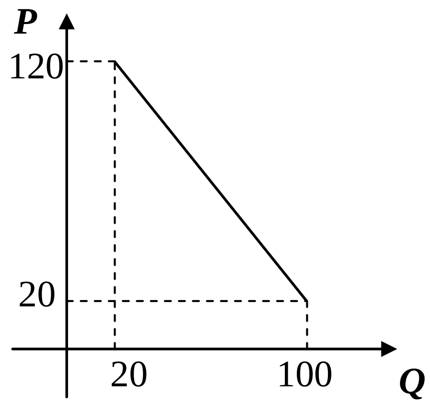


Рис. 8

Решение. Используя уравнение прямой $y = kx + b$, составим систему:

$$\begin{cases} 120 = 20k + b \\ 20 = 100k + b \end{cases}.$$

Ее решение: $k = -0,8; b = 100$. Тогда уравнение прямой имеет вид $y = -0,8x + 100$, или $P = -0,8Q + 100$. Выразив переменную Q через P, получим функцию спроса $Q_D = 125 - 1,25P$. Эластичность спроса по цене $E_{D,P}(30) = -\dfrac{37,5}{87,5} = -0,42$.

4. Найдите распределение налогового бремени между потребителем и поставщиком, если функции спроса и предложения имеют вид $Q_D = \dfrac{64}{P}$, $Q_S = 8P - 16$, а величина налога достаточно мала по сравнению с равновесной ценой.

Решение. Решая уравнение $\dfrac{64}{P} = 8P - 16$, найдем равновесную цену $P_0 = 4$. Производные в точке равновесия: $Q'_D = -\dfrac{64}{P^2}$, $Q'_D(4) = -4$, $Q'_S = Q'_S(4) = 8$. Следовательно, распределение налогового бремени $-\dfrac{Q'_S(P_0)}{Q'_D(P_0)} = -\dfrac{8}{-4} = \dfrac{2}{1}$. Таким образом, при введении налога потребители будут вынуждены потратить в два раза больше, чем поставщики.

5. Функции спроса и предложения на стрижки в салоне красоты имеют линейный вид и заданы формулами: $Q_D = 600 - 4P$,

$Q_S = 6P - 400$. Государство устанавливает налог 32,5 руб. на каждую стрижку. Рассмотрев изменение равновесной цены, определите общую сумму налога и вычислите налоговое бремя покупателя и продавца. Оцените изменение валового дохода после введения налога.

Решение. Решая уравнение $600 - 4P = 6P - 400$, найдем равновесную цену $P_0 = 100$. При этом $Q_0 = 200$. После введения налога функция предложения будет иметь вид: $Q_S = 6(P - 32{,}5) - 400$, так как с каждой единицы проданной услуги придется заплатить сумму налога. Пересчитав равновесную цену, получим

$$600 - 4P_1 = 6(P_1 - 32{,}5) - 400,\ P_1 = 119{,}5,\ Q_1 = 600 - 4 \cdot 119{,}5 = 122.$$

Таким образом, общая сумма налога будет равна 122 · 32,5=3965 (руб.).

Рассмотрим графическую иллюстрацию данной задачи (рис. 9).

Найдем координаты точки A из уравнения: $6P - 400 = 122,\ P = 87$. Налоговое бремя клиента салона будет равно площади прямоугольника со сторонами $119{,}5 - 100$ и 122: $19{,}5 \cdot 122 = 2379$ (руб.), а налоговое бремя салона красоты равно площади прямоугольника со сторонами $100 - 87$ и 122: $13 \cdot 122 = 1586$ (руб.).

Распределение налогового бремени при этом будет следующее:

$$\frac{O_1B}{BA} = \frac{19{,}5}{13} = \frac{3}{2},$$

или

$$-\frac{Q_S'(P_0)}{Q_D'(P_0)} = -\frac{6}{-4} = \frac{3}{2}.$$

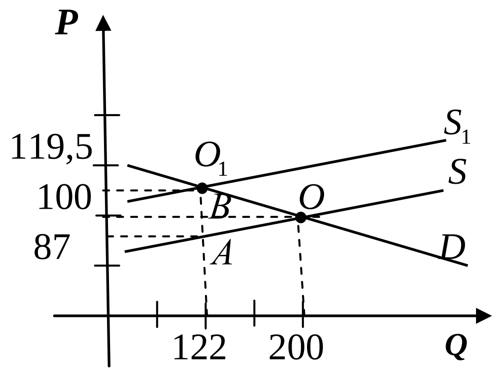


Рис. 9

Таким образом, большая часть налогового бремени ляжет на клиента. Сравним валовой доход $TR = P \cdot Q$ салона красоты до и после введения налога; $TR_0 = 100 \cdot 200 = 20000$ (руб.), $TR_1 = 119{,}5 \cdot 122 = 14579$ (руб.). Значит, доход салона также снизится примерно на 27%.

6. Фирма продает высокотехнологичные станки по цене 20 тыс. руб. за штуку. На настоящий момент ей удается производить 16 станков в год. Переменные издержки предприятия описываются функцией $VC = 0{,}6Q^2 - 4Q$, постоянные издержки равны 130 тыс. руб. Оцените, является ли существующий на сегодняшний день объем производства оптимальным для максимизации прибыли. Если нет, подберите наиболее выгодный вариант для расширения площадей. Рассматриваются два предложения: обе бригады строителей готовы выполнить работу за два года. При этом первая бригада просит за свою работу предоплату 100 тыс. руб. в начале первого года и 120 тыс. руб. в начале второго года. Вторая бригада также просит предоплату 100 тыс. руб. и 150 тыс. руб. в конце работы, т.е. в конце второго года. Найдите приведенные стоимости проектов, считая ставку дисконтирования 12,5%. Хватит ли прибыли фирмы за один год для финансирования расширения?

Решение. Если объем производства не зависит от цены, то $MR = (TR)' = (P \cdot Q)' = P$. Далее $MC = (TC)' = (VC + FC)' = 1,2Q - 4$, где $FC = \text{const}$ – постоянные издержки. Решая уравнение $1,2Q - 4 = 20$, получим $Q = 20$ станков. Следовательно, для максимизации прибыли фирме необходимо расширять производство.

Оценим предложенные проекты, используя формулу текущей стоимости будущего дохода $PDV = \sum_{n=1}^{2} \frac{TR_n}{(1+r)^n}$ [13, с. 465].

$$PDV_1 = \frac{100}{(1+0,125)^0} + \frac{120}{(1+0,125)^1} \approx 206,67,$$

$$PDV_2 = \frac{100}{(1+0,125)^0} + \frac{150}{(1+0,125)^2} \approx 218,52.$$

Таким образом, первое предложение выгоднее.

Найдем прибыль предприятия за один год: $\pi = TR - TC = PQ - (0,6Q^2 - 4Q + 130)$. Подставив значения $P = 20$, $Q = 16$, получим прибыль $\pi = 100,4$ тыс. руб. Следовательно, прибыли за один год хватит на оплату первого транша. Однако для второго платежа в начале второго года прибыли будет недостаточно. В таком случае фирме, возможно, выгоднее выбрать второй вариант. Кроме этого, его преимущество в оплате по окончанию работ.

7. Государство вводит дополнительный налог на определенный вид продукции. Рассчитайте максимальный налог на данную продукцию, если общие издержки фирмы по ее производству равны $TC = 2Q^2 - 62Q + 3$, а общая прибыль – $TR = 54Q - 3Q^2$. Какие убытки понесет фирма при введении дополнительного налога?

Решение. Общая величина налога в данном случае будет равна $T = tQ$, где t – величина налога на единицу продукции. Тогда $\pi = TR - TC - tQ = -5Q^2 + 116Q - 3 - tQ$. Максимальная прибыль находится из условия $\pi' = -10Q + 116 - t = 0$ (так как график функции прибыли – парабола, у которой ветви направлены вниз, речь идет о максимуме). Выражая из данного уравнения Q, получим $Q = 11{,}6 - 0{,}1t$. Далее исследуем функцию общего налога на максимум: $T = tQ = 11{,}6t - 0{,}1t^2$; $T' = 11{,}6 - 0{,}2t = 0$; $t = 58$. При этом $Q = 11{,}6 - 0{,}1 \cdot 58 = 5{,}8$ – количество продукции, $T = 58 \cdot 5{,}8 = 336{,}4$ – общая сумма налога, $\pi = -5(5{,}8)^2 + 116 \cdot 5{,}8 - 3 - 336{,}4 = 165{,}2$.

Рассчитаем возможную прибыль без введения налога

$$\pi' = -10Q + 116 = 0,\ Q = 11{,}6,\ \pi = -5(11{,}6)^2 + 116 \cdot 11{,}6 - 3 = 669{,}8.$$

8. Стоимость фармацевтической компании растет в соответствии с законом $V = Ce^{\sqrt[4]{t}}$, где C – стоимость компании на настоящий момент, t – некоторый момент времени. Собственник решает, в какой момент выгоднее всего продать компанию и положить полученную сумму в банк под 12% годовых (проценты начисляются непрерывно). Рассчитайте этот момент времени.

Решение. Обозначим через t_0 момент времени, в который выгоднее всего продать компанию, через r – процентную ставку (рис. 10).

Стоимость компании в момент времени t_0: $V_0 = Ce^{\sqrt[4]{t_0}}$. Составим функцию переменной t_0, описывающую изменение стоимости при вложении денег на депозит: $f(t_0) = Ce^{\sqrt[4]{t_0}}(1+r)^{t-t_0}$.

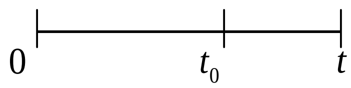


Рис. 10

Исследуем эту функцию на максимум. Для упрощения вычислений преобразуем функцию

$$\ln f(t_0) = \ln\left(Ce^{\sqrt[4]{t_0}}(1+r)^{t-t_0}\right) = \ln C + \ln e^{\sqrt[4]{t_0}} + \ln(1+r)^{t-t_0} =$$

$$= \ln C + \sqrt[4]{t_0} + (t - t_0)\ln(1+r);$$

$$\left(\ln f(t_0)\right)' = \frac{1}{4\sqrt[4]{t_0^3}} + \ln(1+r)(-1);$$

$$f'(t_0) = f(t_0)\left(\ln f(t_0)\right)' =$$

$$= Ce^{\sqrt[4]{t_0}}(1+r)^{t-t_0}\left(\frac{1}{4\sqrt[4]{t_0^3}} - \ln(1+r)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\sqrt[4]{t_0^3}} = \ln(1+r).$$

Используя равенство $\ln(1+r) \approx r,$ получим $t_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(4\cdot 0{,}12\right)^4}} \approx 2{,}66.$

Итак, искомый момент – через 2,66 года.

9. Инвестор хочет оценить оптимальный объем инвестиций в производство. Расширение площадей пока не планируется. Зависимость объема производства от капиталовложений задается функцией $Q = \ln(K^3 + 864)$. Найдите объем капиталовложений (в млн руб.), начиная с которого рост производства будет незначителен.

Решение. Последовательно вычисляем производные

$$Q' = \frac{3K^2}{(K^3+864)}, \quad Q'' = \frac{6K(K^3+864) - 3K^2\cdot 3K^2}{(K^3+864)^2} = \frac{3K(1728-K^3)}{(K^3+864)^2}.$$

Для нахождения точки перегиба функции решим уравнение $Q'' = 0,$ откуда $K = 12$ (так как $K = 0$ не имеет экономического смысла) (рис. 11).

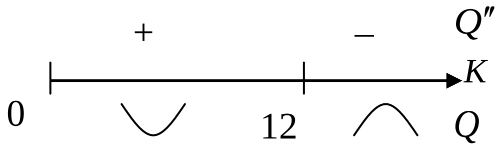


Рис. 11

Таким образом, начиная с величины $K = 12$ млн руб., эффективность капиталовложений падает.

Задачи для самостоятельной работы

3.1. Кратковременный спрос на посадочный материал задается функцией $Q_D = 15{,}6 - 1{,}2P$, а кратковременное предложение функцией $Q_S = 9 + 3{,}2P$. Найдите точку рыночного равновесия и определите, будет ли предложение в этой точке эластичным.

3.2. Экономисты российской компании «Рис ОПТ», которая занимается поставками риса, к концу первого квартала 2016 г. обнаружили неожиданное снижение спроса на свой продукт. Для того чтобы узнать связь спроса и цены, экономисты решают выяснить эластичность спроса по цене. Им известны функция спроса $Q_D = 400 - 2P$ и функция предложения $Q_S = 250 + P$. Определите, имеет ли смысл компании снизить цену ниже равновесной.

3.3. Фирма «Sony» решила повысить цены на производимые фотокамеры. Проведя маркетинговые исследования российского рынка, аналитики компании построили функцию спроса на данный товар $Q_D = \dfrac{1500 - P}{P - 150}$. При текущих производственных мощностях предложение фирмы выражается формулой $Q_S = P - 10$. Используя понятие эластичности спроса по цене, выясните, повлечет ли повышение цен на фотокамеры массовый отток покупателей данной продукции.

3.4. Долговременный спрос на дизельное топливо задается прямой, изображенной на рис. 12. Найдите, при какой цене спрос на данный продукт будет эластичным.

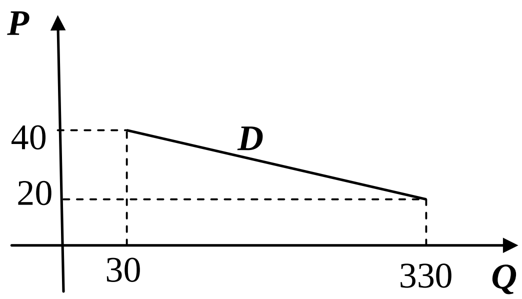


Рис. 12

3.5. Функции спроса и предложения некоторого продукта заданы формулами $Q_D = \dfrac{1290}{9 + P}$, $Q_S = 10 + \ln\dfrac{P}{120}$. Оцените изменение равновесной цены при введении дополнительного налога 10 руб. на единицу продукции.

3.6. Государство вводит дополнительный налог на добычу поделочного камня в размере 5% на цену 1 тонны. Рассчитайте величину налога, который придется заплатить артели, если функция спроса описывается формулой $Q_D = 10 - 1{,}2P$, а данные по предложению собраны в следующей таблице:

P (тыс. руб.)	1	2	3	4	5
Q (т)	6	14	8	6	16

Определите, какую часть налогового бремени придется платить добывающей компании.

3.7. Найдите, как изменится цена на единицу продукции при введении налога в размере 20 у.е. на единицу продукции, если эластичность спроса в точке рыночного равновесия равна $E_{D,P}(P_0) = -3$, а эластичность предложения в этой точке $E_{S,P}(P_0) = -5$.

3.8. Частное предприятие производит инновационные подшипники для двигателей и является монополистом в этой области. Функция спроса на продукцию описывается выражением $Q_D = 60 - 0,6P$, предельные издержки равны 15 руб. Фирма хочет максимизировать прибыль. Найдите оптимальный объем выпуска и оптимальную цену.

3.9. В Лондоне действует компания «Метрополитен», функция спроса на услуги которой представлена в виде $Q_D = 50 - P$, общие издержки $TC = 30 + 14Q + 2Q^2$. Данная фирма является монополистом. В последнее время наблюдалось сильное увеличение цен на билеты. Правительство решает вмешаться и установить регулируемый уровень цен: например на билет, предоставляющий возможность поездок на лондонском метрополитене в течении трех месяцев, уровень цен был ограничен до 37 фунтов стерлингов. Какую сумму потеряет компания после подобного государственного вмешательства (применительно к указанному виду билетов)? Что в этой ситуации посоветовать предпринять руководству компании?

3.10. Рассчитайте максимальную прибыль и максимальную величину налога для некоторой автомобильной компании, если прибыль предприятия описывается формулой $TR = 4000Q - 2Q^2$ руб., средние переменные издержки $AVC = Q - 2000$, а постоянные издержки равны 50 700 руб.

3.11. Молодые предприниматели запускают стартап: они разработали качественные персональные компьютеры. На рынке потребительской электроники открывается новая фирма. Известны общие издержки фирмы: $TC = \frac{Q^4}{4} - \frac{220}{3}Q^3 + 441666,66Q + 100299750$ и предельный доход фирмы $MR = 1296,66 - 3Q$. Производство выгодно только при Q, превышающем 100 единиц продукции. Для создания и дальнейшего развития проекта необходим первоначальный инвестиционный капитал. Инвестор решил вложиться в данный проект, и размер инвестиций составил 40 тыс. долларов. Согласно бизнес-плану фирмы норма дисконтирования $r = 30\%$, количество лет $n = 5$. Оцените инвестиционный проект.

3.12. Владелец цеха по производству тротуарной плитки рассматривает вопрос о возможной продаже предприятия. Спрос на его продукцию растет, и стоимость цеха увеличивается со временем по закону $V = Ce^{\sqrt[3]{t}}$, где C – стоимость на настоящий момент. В какой момент выгоднее всего продать производство и положить полученную сумму в банк под 9% годовых (проценты начисляются непрерывно), если стоимость цеха на настоящий момент оценивается 2,5 млн руб.

3.13. Предприниматель, владеющий яблоневым садом, строит бизнес-план. В этом году было собрано 500 т яблок. Спрос на яблоки описывается функцией $P = 32 - 0,05Q$. За аренду участка приходится платить 50 тыс. руб. в год, на объекте работают 5 человек с зарплатой 240 тыс. руб. в год на каждого. Технического инвентаря было закуплено на 200 тыс. руб. Для выращивания каждой тонны яблок требуются: вода (стоимостью 600 руб. за 1 т), удобрения и ядохимикаты (стоимостью 800 руб. за 1 т). Необходимо найти объем производства, при котором достигается максимум прибыли. Если яблок будет выращено больше, то предприниматель планирует построить хранилище и перерабатывающий цех. Для этого в течение трех лет он намерен откладывать прибыль (предполагается, что объем продукции сохранится). Какой из вариантов будет наиболее выгодным: каждый год, продав яблоки сразу после сбора урожая, класть прибыль в банк, добавляя ее на счет под 9% годовых, или продавать яблоки зимой, когда их стоимость возрастет в 1,5 раза и после этого класть прибыль на счет? При этом следует иметь в виду, что придется на четыре месяца арендовать хранилище для яблок за 10 тыс. руб. в месяц. Накопив нужную сумму, предприниматель планирует делать из излишков продукции сок, яблочную пастилу, детское питание или яблочный уксус. Попробуйте оценить, какое производство будет наиболее выгодным и какие виды производства можно внедрять одновременно. При каких условиях предприниматель вправе рассчитывать на государственные льготы и преференции?

3.14. Владелец небольшой хлебопекарни решает вопрос о расширении штата. Производство хлеба растет, и владелец думает в помощь к трем работникам пригласить еще два-три человека, не меняя при этом оборудования. Функция зависимости объема производства от трудового ресурса имеет вид $Q = \dfrac{5e^L}{200 + e^L}$. Рассчитайте, имеет ли смысл владельцу нанимать еще троих человек.

4

ИНТЕГРАЛЫ

Общие, средние и предельные экономические величины

Пусть TC – общие издержки для достижения уровня объема Q выпуска продукции, тогда $TC = TFC + TVC$ – сумма постоянных и переменных издержек, т.е. зависящих от объема выпуска. Обозначим соответствующие средние издержки через

$$AFC = \frac{TFC}{Q}, \quad AVC = \frac{TVC}{Q}, \quad AC = \frac{TC}{Q}.$$

Значит, $ATC = AFC + AVC.$

Как было отмечено ранее, предельные издержки MC задаются производной функции общих издержек TC. Поскольку слагаемое постоянных издержек не зависит от объема Q выпуска, то имеем $TFC'(Q) = 0,$ следовательно,

$$MC = TC'(Q) = TVC'(Q).$$

В свою очередь, функция общих издержек задается неопределенным интегралом от функции предельных издержек

$$TC = \int MC \cdot dQ = TVC + \underset{\text{const}}{TFC}.$$

При этом для переменных издержек $TVC(0) = 0$.

Аналогично средний доход от реализации единицы продукции выражается через общий доход формулой $AR = \dfrac{TR}{Q}$, а предельный доход задается производной функции общего дохода $MR = TR'(Q)$. Следовательно, функция общего дохода $TR = \int MR \cdot dQ.$

Экономические интерпретации площади криволинейной трапеции

Известная из экономики *кривая Лоренца* [13, с. 25] позволяет интерпретировать степень неравенства распределения доходов в обществе (рис. 13).

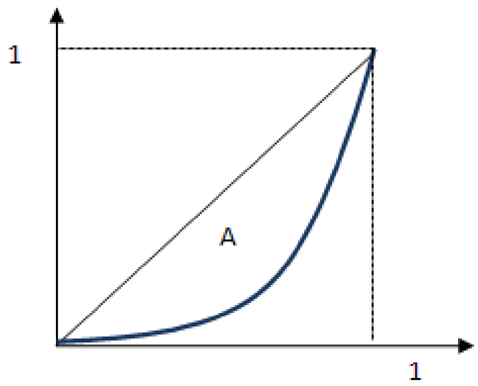


Рис. 13. Кривая Лоренца и коэффициент Джини

Точка A этой кривой имеет координаты (x_A, y_A), где x_A – доля населения, y_A – доля общего дохода граждан соответствующей доли населения. Кривая Лоренца всегда расположена ниже биссектрисы OB единичного квадрата, являющейся отрезком *абсолютного равенства доходов* в обществе, и чем ниже, тем менее справедливым является распределение доходов. Обычно кривую Лоренца задают формулой $y = L(x),\ x \in [0;1]$.

Величину отклонения фактического распределения доходов населения от равномерного распределения характеризует *коэффициент Джини* $G = \dfrac{S_{OAB}}{S_{OBC}}$ [13, с. 26]. Очевидно, $0 < G < 1$, и при более равномерном распределении доходов коэффициент Джини уменьшается, приближаясь к нулю. Поскольку площадь «полуквадрата» $S_{OBC} = 0,5$, а площадь криволинейной трапеции, заключенной между биссектрисой и кривой Лоренца $S_{OAB} = 0,5 - \int_0^1 L(x)dx,$ то коэффициент Джини принимает вид

$$G = \frac{0,5 - \int_0^1 L(x)dx}{0,5} = 1 - 2\int_0^1 L(x)dx.$$

С участком кривых спроса $P_D(Q)$ и предложения $P_S(Q)$ до точки равновесия $M(P_0, Q_0)$ связаны понятия излишка потребителя и излишка производителя [13, с. 94] (рис. 14).

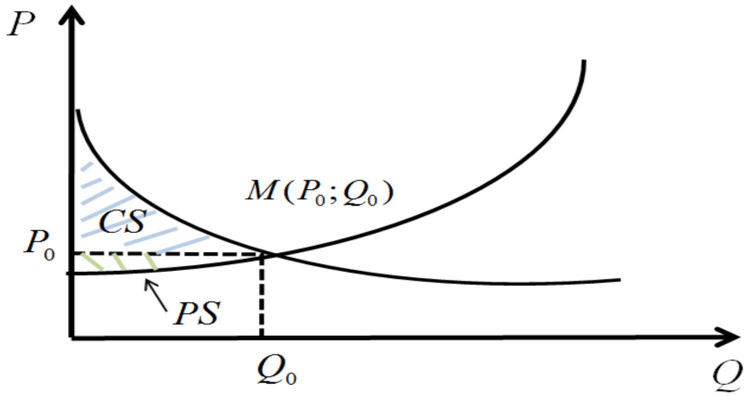


Рис. 14. Излишки потребителя и производителя

Излишек (добавочная выгода) *потребителя* CS – это разность между денежной суммой, которую потребитель готов уплатить за продукцию (по цене выше равновесной), и его реальными расходами на продукцию по равновесной цене. Величина CS совпадает с площадью криволинейной трапеции $P_0P_{\max}M$, ограниченной сверху (или справа) кривой спроса, а снизу – отрезком P_0M. Следовательно,

$$CS = S_{P_0P_{\max}M} = S_{OP_{\max}MQ_0} - S_{OP_0MQ_0} = \int\limits_0^{Q_0} P_D(Q)dQ - P_0 \cdot Q_0 = \int\limits_{P_0}^{P_{\max}} Q_D(P)dP.$$

С другой стороны, *излишек* (добавочная выгода) *производителя* PS – это разность между реальным доходом производителя от продукции по равновесной цене и денежной суммой, за которую потребитель был готов продать продукцию (по цене ниже равновесной). В свою очередь, величину PS интерпретирует площадь криволинейной трапеции $P_{\min}P_0M$, ограниченной сверху отрезком P_0M, а снизу (или справа) – кривой предложения. Таким образом,

$$PS = S_{P_{\min}P_0M} = S_{OP_0MQ_0} - S_{OP_{\min}MQ_0} = P_0 \cdot Q_0 - \int\limits_0^{Q_0} P_S(Q)dQ = \int\limits_{P_{\min}}^{P_0} Q_S(P)dP.$$

Непрерывные процессы накопления величин и интегрирование

Если происходит некоторый процесс накопления величины со скоростью $v(t)$, меняющейся во времени, то суммарная величина S, накопленная на промежутке времени $[t_1;t_2]$, вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница для определенного интеграла

$$S\left[t_1,t_2\right]=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Формулы такого вида используют, например,

- при нахождении объема выполненной работы по закономерности изменения производительности ее выполнения;
- при вычислении суммарных затрат на осуществленные услуги в зависимости от меняющегося тарифа.

Пусть объем капиталовложений $K(t)$ компании меняется непрерывно: например, вклады в банк, инвестиции в пенсионный фонд поступают в каждый момент времени t. Под *плотностью потока инвестиций* $I(t)$ понимают денежную сумму, поступающую на счет компании в единицу времени. Поток $I(t)$ может принимать и отрицательные значения, если вместе с инвестициями рассматривать и расходы компании. Тогда общая сумма капитала вычисляется по формуле неопределенного интеграла

$$K=\int I(t)dt=K(t)+C,$$

где константа C определяется исходя из известного начального капитала $K(0)=K_0$ на момент времени $t=0$. Расчет денежных накоплений на промежутке времени $[t_1;t_2]$ проводят по формуле

$$K\left[t_1,t_2\right]=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt=K(t_2)-K(t_1).$$

При начислении процентов на денежные накопления по сложной процентной ставке r наращенная на момент T сумма вычисляется также с помощью определенного интеграла

$$S_T=\int_0^T I(t)(1+0,01r)^{T-t}\,dt\,.$$

Тогда первоначальная сумма (т.е. приведенная на момент времени $T = 0$) имеет вид

$$S_0 = \int_0^T I(t)(1+0,01r)^{-t}\,dt.$$

Иными словами, это дисконтированное значение денежных накоплений, для которого получаем $S_0 = \dfrac{S_T}{(1+0,01r)^T}$.

При непрерывном начислении процентов с силой роста δ приведенные выше формулы наращенного и дисконтированного значений запишутся следующим образом:

$$S_T = \int_0^T I(t)\cdot e^{\delta(T-t)}dt, \quad S_0 = \int_0^T I(t)\cdot e^{-\delta\cdot t}dt.$$

Следовательно, выражение наращенных денежных накоплений на момент T через первоначальную сумму имеет вид

$$S_T = S_0 \cdot e^{\delta\cdot T},$$

где $e^{\delta\cdot T}$ – коэффициент наращения к моменту T. Дисконтированное значение денежных накоплений выражаем в виде $S_0 = S_T \cdot e^{-\delta\cdot T}$.

Если же, в свою очередь, сила роста зависит от времени $\delta(t)$, то коэффициент наращения находится интегрированием: $e^{\int_0^T \delta(t)dt}$.

Примеры решения задач

1. Найдите общие издержки, переменные издержки и средние издержки по выпуску объема Q продукции при условии, что постоянные издержки составляют 5,5 млн руб. и известна функция предельных издержек $MC(Q) = 2,5 + 3Q - 1,8Q^2$.

Решение. Поскольку функция общих издержек задается интегралом

$$TC = \int\left(2,5 + 3Q - 1,8Q^2\right)dQ = 2,5Q + 1,5Q^2 - 0,6Q^3 + C,$$

для переменных издержек $TVC(0) = 0$, а постоянные издержки $TFC = 5,5$, то общие издержки представляются функцией

$$TC(Q) = 2,5Q + 1,5Q^2 - 0,6Q^3 + 5,5 \text{ (млн руб.)}$$

Тогда переменные и средние издержки

$$TVC(Q) = 2,5Q + 1,5Q^2 - 0,6Q^3 \text{ (млн руб.)},$$

$$AC(Q) = \frac{TC}{Q} = 2,5 + 1,5Q - 0,6Q^2 + \frac{5,5}{Q} \text{ (млн руб.)}$$

2. Найдите общую себестоимость выпуска 15 агрегатов, если стоимость 4 пилотных агрегатов составляет 6,02 млн руб., а предельная себестоимость производства Q единиц продукции задана функцией $MC(Q) = 1 - \frac{1}{(Q+1)^3}$.

Решение. Функция общей себестоимости задается интегралом

$$TC = \int MC \cdot dQ = \int \left(1 - \frac{1}{(Q+1)^3}\right) dQ = Q + \frac{1}{2(Q+1)^2} + C,$$

в котором константу интегрирования находим исходя из условия $TC(4) = 6,02$, т.е. $4 + \frac{1}{50} + C = 6\frac{1}{50}$. Значит, $C = 2$. Тогда себестоимость выпуска 15 агрегатов рассчитывается по формуле $TC(15) = 15 + \frac{1}{512} + 2 = 17,00195$ (млн руб.)

3. Найдите добавочную выгоду потребителя и производителя продукции фирмы меховых изделий, если известны функции цены спроса и цены предложения на продукцию

$$P_D = \frac{500}{Q-5}, \quad P_S = Q - 45.$$

Рассчитайте, как изменится добавочная выгода потребителя при введении на продукцию налога в размере $\frac{100}{9}$% с изделия.

Решение. Находим точку равновесия из условия $P_D = P_S$:

$$\frac{500}{Q-5} = Q - 45; \quad Q^2 - 50Q - 275 = 0.$$

Положительный корень квадратного уравнения $Q_1 = 55$ $(Q_2 = -5 < 0)$ дает значение точке равновесия: $Q_0 = 55,\ P_0 = 10$.

Добавочную выгоду потребителя при покупке 55 экземпляров по цене 10 тыс. руб. находим с помощью интеграла от функции цены спроса

$$CS = \int_0^{Q_0} P_D(Q)dQ - P_0 \cdot Q_0 = \int_0^{55} \frac{500}{Q-5} dQ - 10 \cdot 55 = 500 \ln |Q-5| \Big|_0^{55} - 550 =$$

$$= 500 \ln \frac{50}{5} - 550 \approx 500 \cdot 2{,}3026 - 550 = 601{,}3 \text{ тыс. руб.}$$

С другой стороны, добавочную выгоду производителя при продаже тех же 55 изделий получаем с помощью интеграла от функции цены предложения

$$PS = P_0 \cdot Q_0 - \int_0^{Q_0} P_S(Q)dQ = 550 - \int_0^{55} (Q-45)dQ = 550 - \left(0{,}5Q^2 - 45Q\right)\Big|_0^{55} =$$

$$= 550 - 1512{,}5 + 2475 = 1512{,}5 = 1 \text{ млн } 512{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

При введении на продукцию налога T в размере $\frac{100}{9}$% с каждого мехового изделия, исходя из функции спроса $Q_D = \frac{500}{P_D} + 5$, получаем

$$P_T = P_0 \left(1 + 0{,}01 \cdot \frac{100}{9}\right) = 10 \cdot \left(1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{100}{9}, \quad Q_T = \frac{500}{P_\tau} + 5 = 50.$$

Значит, изменение добавочной выгоды потребителя можно найти с помощью интеграла от функции спроса

$$\Delta CS = \int_{P_0}^{P_\tau} Q_D(P)dP = \int_{10}^{\frac{100}{9}} \left(\frac{500}{P} + 5\right) dP = \left(500 \ln P + 5P\right)\Big|_{10}^{\frac{100}{9}} =$$

$$= 500 \ln \frac{10}{9} + \frac{50}{9} \approx 58{,}3 \text{ тыс. руб.}$$

4. Производительность труда рабочего в течение 8-часовой смены зависит от времени t по закону $P(t) = 64t - 6t^2$. Каков недельный (за 6 рабочих смен) объем выпуска продукции цехом из 45 рабочих?

Решение. Объем выпуска продукции Q_1 одним рабочим за смену находим с помощью интеграла

$$Q_1 = \int_0^8 P(t)dt = \int_0^8 (64t - 6t^2)dt = \left(32t^2 - 2t^3\right)\Big|_0^8 = 1024.$$

Таким образом, за 6 смен цех из 45 рабочих выпустит продукции объемом

$$Q = 45 \cdot 6Q_1 = 276480 \text{ ед.}$$

5. Зависимость потребляемой предприятием электроэнергии в течение суток зависит от времени t по закону $W(t) = 64 + \sin\frac{\pi}{4}(t+5)$. Найдите суммарный расход электроэнергии за сутки. Какова месячная стоимость электроэнергии, потребляемой в дневное время (с 10 до 17 ч), если согласно используемому тарифу 1 кВт·ч стоит 5 руб.?

Решение. Суммарный расход электроэнергии за сутки находим с помощью интеграла на отрезке $t \in [0; 24]$

$$E[0,24] = \int_0^{24} W(t)dt = \int_0^{24} (64 + \sin\frac{\pi}{4}(t+5))dt = \left(64t - \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}(t+5)\right)\Bigg|_0^{24} =$$

$$= 1536 + \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4} = 1536 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

Тогда в дневное время расходуется электроэнергии объемом

$$E[10,17] = \int_{10}^{17} (64 + \sin\frac{\pi}{4}(t+5))dt = \left(64t - \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}(t+5)\right)\Bigg|_{10}^{17} =$$

$$= 448 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 449 \text{ кВт} \cdot \text{ч},$$

а месячная стоимость потребляемой в дневное время электроэнергии равна

$$P \approx 5 \cdot 30 \cdot 449 = 67350 \text{ руб.}$$

6. Общий объем оборудования, производимого в филиале предприятия со времени открытия филиала, растет с относительным темпом 25% в месяц. Каков объем оборудования произведен филиалом за период в 22 месяца, если на момент открытия филиала он составлял 15 пилотных образцов?

Решение. Введем обозначение: $Q(t)-$ зависимость произведенного оборудования от времени t. Тогда $Q(0) = 15$. Относительный темп роста в 25% означает, что при малом промежутке времени Δt имеет место соотношение

$$\frac{\Delta Q}{Q}=0,25\Delta t.$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем по определению логарифмической производной

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{Q\cdot\Delta t}=0,25,\quad \frac{1}{Q}\cdot Q'=0,25,\quad (\ln Q)'=0,25.$$

Интегрируем обе части равенства $(\ln Q)'=0,25$ на отрезке $t\in[0;T]$

$$\int_0^T(\ln Q(t))'dt=\int_0^T 0,25dt,\quad \ln Q(t)\Big|_0^T=0,25t\Big|_0^T,\quad \ln\frac{Q(T)}{Q(0)}=0,25\cdot T,$$

откуда находим

$$\frac{Q(T)}{15}=e^{0,25T},\quad Q(T)=15\cdot e^{0,25T}.$$

Значит, объем оборудования, произведенного филиалом за 22 месяца составляет

$$Q_{22}=\int_0^{22}15\cdot e^{0,25t}dt=15\left.\frac{e^{0,25t}}{0,25}\right|_0^{22}=60(e^{5,5}-1)\approx 60\cdot 243,7=14622\text{ ед.}$$

7. Найдите сумму денежных накоплений за время с 1-й по 27-ю неделю, если известна плотность денежного потока $I(t)=40\sqrt[3]{t}$ от времени t и начальное значение накопления $K_0=25$ тыс. руб.

Решение. Интегрируя, имеем

$$K(t)=40\int t^{\frac{1}{3}}dt=40\cdot\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C=30\sqrt[3]{t^4}+C.$$

Константу интегрирования получаем из условия: $K_0=0+C\Rightarrow C=25$. Таким образом, общая сумма накоплений $K(t)=30\sqrt[3]{t^4}+25$. Искомое значение суммы накоплений с 1-й по 27-ю неделю:

$$K[1;27]=\left.\left(30\sqrt[3]{t^4}+25\right)\right|_1^{27}=30\cdot 3^4-30\cdot 1=2400\text{ = 2 млн 400 тыс. руб.}$$

8. Ежедневный доход торгово-развлекательного центра равномерно растет от 0,8 до 0,9 млн руб. в день. Оцените годовой доход центра, если на вырученные деньги происходит непрерывное начисление процентов исходя из годовой ставки 12%. Сравните его с наращенной суммой при непрерывном потоке постоянного ежедневного дохода 0,85 млн руб. при той же годовой ставке.

Решение. Исходя из годовой ставки 12%, вычислим силу роста:

$$1+0,01\cdot 12=e^{\delta}, \quad \delta=\ln 1,12\approx 0,11333.$$

Плотность денежного дохода за день описывается возрастающей функцией от времени: $0,8+0,1t,\ t\in[0;1]$. Следовательно, годовой доход (за 365 дней) можно оценить интегрированием по частям:

$$S_1=\int_0^1 I(t)\cdot e^{\delta(1-t)}dt=\int_0^1 365(0,8+0,1t)\cdot e^{0,11333(1-t)}dt=$$

$$=365e^{0,11333}\cdot\int_0^1(0,8+0,1t)\cdot e^{-0,11333t}dt=$$

$$=\begin{bmatrix} u=0,8+0,1t\Rightarrow & du=0,1dt \\ dv=e^{-0,11333t}dt\Rightarrow & v=-\dfrac{e^{-0,11333t}}{0,11333}\end{bmatrix}=$$

$$=-365e^{0,11333}\left((0,8+0,1t)\left.\frac{e^{-0,11333t}}{0,11333}\right|_0^1-\frac{0,1}{0,11333}\int_0^1 e^{-0,11333t}dt\right)=$$

$$=-365\frac{e^{0,11333}}{0,11333}\left(\left(0,9+\frac{0,1}{0,11333}\right)e^{-0,11333}-0,8-\frac{0,1}{0,11333}\right)=$$

$$=328\text{ млн }187,6\text{ тыс. руб.}$$

Для сравнения с наращенной за год суммой при непрерывном потоке постоянного ежедневного дохода 0,85 млн руб. при годовой ставке 12% находим

$$S_1=\int_0^1 I(t)(1+0,01r)^{1-t}dt=\int_0^1 365\cdot 0,85\cdot(1+0,12)^{1-t}dt=$$

$$=365\cdot 0,85\cdot 1,12\int_0^1 1,12^{-t}dt=310,25\cdot 1,12\left.\left(-\frac{1}{\ln 1,12\cdot 1,12^{t}}\right)\right|_0^1\approx$$

$$\approx 310,25\cdot\frac{0,12}{0,11333}=328\text{ млн. }509,7\text{ тыс. руб.}$$

Задачи для самостоятельной работы

4.1. Найдите общие издержки, переменные издержки и средние издержки по выпуску объема Q продукции при условии, что постоянные издержки составляют 10 млн руб., начальные издержки – 3 млн руб. и известна функция предельных издержек $MC(Q) = 2Q + 3Q^2 + e^{0,5Q}$.

4.2. Найдите общую себестоимость выпуска 25 высокоточных аппаратов, если начальные затраты равны 810 тыс. руб., а предельная себестоимость производства Q единиц продукции задана функцией $MC(Q) = e^{0,4Q}$.

4.3. Найдите функцию общего дохода и максимальную прибыль от реализации продукции объема Q, если предельный доход и общие издержки: $MR(Q) = 50000 - 20Q^2, TC(Q) = 200Q^2 + 2000Q + 20.$ Рассчитайте средней доход (в млн руб.) от реализации единицы продукции при условии получения максимальной прибыли.

4.4. Выручка салона от продажи одного дизайнерского изделия обратно пропорциональна количеству q предложенной продукции согласно формуле $r(q) = \dfrac{10}{q+2}$. Найдите зависимость общей выручки от количества Q предлагаемых для продажи изделий. Чему равна общая выручка от 100 дизайнерских изделий?

4.5. На основании социологического исследования имеются кривые Лоренца распределения доходов населения в трех соседних провинциях западноевропейского государства: $L_1(x) = 0,36x^2 + 0,64x$; $L_2(x) = 0,24x^2 + 0,76x$; $L_3(x) = 0,27x^2 + 0,73x$. Рассчитайте коэффициенты Джини распределения доходов в каждой провинции. В какой из провинций доходы распределяются более равномерно?

4.6. Найдите излишки потребителя и производителя продукции фирмы бытовой химии, если известны функции спроса и предложения на продукцию: $Q_D = 400 - P, \quad Q_S = 2P - 200.$

4.7. Вычислите дневную выработку мастера-стеклодува за 8-часовой рабочий день, если производительность труда мастера в течение дня зависит от времени t по закону $P(t) = 3 + 0,2t - 0,1e^{-0,1t}$.

4.8. Тариф на перевозку продукции (т.е. стоимость перевозки 1 т продукции на 1 км) убывает в зависимости от расстояния s по закону

$p(s)=\dfrac{50}{s+100}\,\dfrac{\text{руб.}}{\text{км}}$. Какова стоимость перевозки 350 т продукции на расстояние 800 км?

4.9. Зависимость потребляемой предприятием электроэнергии в дневное время зависит от времени t по закону $W(t)=4000+65t-3t^2$; $t\in[10;17]$. Какова месячная экономия (в тыс. руб.) часового отключения электроэнергии во время обеденного перерыва (с 12 до 13 ч), если согласно используемому тарифу 1 кВт·ч стоит 4,5 руб.? Подумайте, выгодна ли такая экономия.

4.10. Объем оборудования для нефтедобычи, производимого предприятием после контракта с Роснефтью, растет с относительным темпом 5%. Рассчитайте объем оборудования с перспективой на 10 лет, если на момент подписания контракта он составлял четыре единицы.

4.11. Найдите сумму денежных накоплений за время с 8-й по 32-ю неделю, если известна плотность денежного потока $I(t)=\dfrac{10}{\sqrt[3]{t^2}}$ от времени t и начальное значение накопления $K_0=20$ тыс. руб.

4.12. Найдите коэффициент наращения денежной суммы за квартал, если в течение года сила роста равномерно возрастает от 9 до 11%.

4.13. Сравните коэффициент наращения непрерывного потока денежных накоплений за 5 лет при начальном уровне силы роста 8% в двух случаях: **а)** сила роста ежегодно увеличивается на 5%; **б)** сила роста имеет годовой прирост 20%.

4.14. Для непрерывного денежного потока с постоянной плотностью 1 млн руб. в год сравните дисконтированные значения в течение следующих сроков для указанных непрерывных процентов: **а)** 2 года и 5%; **б)** 3 года и 4%; **в)** 5 лет и 2%.

4.15. Проанализируйте наращенное и дисконтированное значение стоимостного объема выпуска филиала автомобильного концерна, если базовый уровень выпуска выражается 10 млрд руб., в течение последующих трех лет намечается ежегодное увеличение стоимостного объема выпуска на 1 млрд руб., а начисление процентов происходит непрерывно с силой роста 8%.

4.16. Вам нужно осуществить перевозку 2500 тонн продукции из Нижнего Новгорода в Ростов-на-Дону. Какие возможности по разным видам транспорта предлагаются на рынке перевозок? Проанализируйте тарифы и рассчитайте различные варианты стоимости перевозок.

4.17. Представьте себе, что вы входите в группу коллег-партнеров, которые имеют капитал в 15 млн руб. В настоящий момент вы стоите перед выбором на ближайшие четыре года: вложить весь капитал в банк под 10% годовых или продолжить бизнес, от прибыли которого ежегодно отчислять на банковский счет по 5 млн руб.? По прогнозам инвестиционных аналитиков, инфляция в рассматриваемый период будет составлять в среднем 7%. Приведите соответствующие расчеты и сделайте выводы.

5

РЯДЫ

Математический аппарат рядов часто используется в экономике для анализа финансовых потоков. Как правило, рассматриваются бесконечные потоки.

Дискретным финансовым потоком называется последовательность финансовых событий $CF = \{(t_0, C_0); (t_1, C_1); ...(t_n, C_n); ...\}$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ – суммы платежей в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$. Сумма платежей по сложной процентной ставке r, приведенная к некоторому моменту времени t, называется *приведенным значением потока*

$$PV_t = \frac{C_0}{(1+r)^{t_0-t}} + \frac{C_1}{(1+r)^{t_1-t}} + ... + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n-t}} + ...$$

Финансовый поток, у которого платежи поступают через равные промежутки времени, называется ***рентой*** (см., например, [3]). Если все платежи величиной R одинаковы, то речь идет о *постоянной ренте*: $CF = \{(0,0); (1,R); (2,R), ...(n,R); ...\}$. Если каждый следующий платеж отличается от предыдущего на одну и ту же величину Q, то такой поток называется *арифметической рентой*

$$CF = \{(1,R); (2, R+Q); (3, R+2Q), ...(n, R+(n-1)Q; ...\}.$$

Если каждый следующий платеж отличается от предыдущего на одно и то же число процентов q, то поток называется *геометрической рентой*

$$CF = \left\{(1,R); (2, R(1+q)); (3, R(1+q)^2), ...(n, R(1+q)^{n-1}); ...\right\}.$$

Примеры решения задач

1. Вычислите, какую сумму необходимо положить на депозит под 10% годовых, чтобы ежегодно бессрочно получать доход 30 тыс. руб.

Решение. Пусть x – размер первоначального вклада. Тогда для обеспечения ежегодных выплат необходимо положительное значение текущей стоимости потока

$$PV = x - \frac{30}{(1+0,1)^1} - \frac{30}{(1+0,1)^2} - \ldots - \frac{30}{(1+0,1)^n} - \ldots = x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{(1+0,1)^n} > 0.$$

Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{(1+0,1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{(1,1)^n} = 30\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1,1)^n} = 30\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{11}\right)^n$$

находится по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$, т.е. $S = \dfrac{\frac{10}{11}}{1-\frac{10}{11}} = 10.$

Итак, $x > \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{30}{(1+0,1)^n} = 300$. Значит, на счет необходимо положить не менее 300 тыс. руб.

2. Арендатор имеет возможность выкупить складские помещения, за которые на данный момент он платит 200 тыс. руб. в год. Рассчитайте выкупную стоимость при процентной ставке 9% годовых. Хватит ли средств на покупку, если будет закрыт банковский счет, на который 5 лет назад было положено 1,5 млн руб. под 11% годовых?

Решение. Находим выкупную стоимость при ставке 9% годовых

$$PV = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200}{(1+0,09)^n} = 200\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{100}{109}\right)^n = 200\frac{\frac{100}{109}}{1-\frac{100}{109}} = \frac{200}{0,09} \approx 2222,222.$$

Вычислим теперь размер вклада: $S = 1,5(1+0,11)^5 \approx 2,527587$ млн руб. Таким образом, денег на покупку хватит.

Найдем сумму ряда в данной задаче в общем виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{(1+r)^n}=R\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^n=R\cdot\frac{\frac{1}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{R}{r}.$$

3. Фирма арендует складские помещения за 600 тыс. руб. в год. По договору каждый год стоимость аренды увеличивается на 50 тыс. руб. в месяц. Найдите текущую стоимость при ставке 8%.

Решение. Находим текущую стоимость

$$PV=\frac{600}{(1+0,08)^1}+\frac{600+50}{(1+0,08)^2}+\frac{600+2\cdot 50}{(1+0,08)^2}...+\frac{600+(n-1)\cdot 50}{(1+0,08)^n}+...=$$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{600}{(1+0,08)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\cdot 50}{(1+0,08)^n}$. Сначала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{600}{(1+0,08)^n}=\frac{600}{0,08}=7500$.

Чтобы найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\cdot 50}{(1+0,08)^n}$, сделаем замену: $t=\frac{1}{1+0,08}$ и получим $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)t^n=t^2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)t^{n-2}$. Обозначив $k=n-1$, имеем $\sum_{n=1}^{\infty}kt^{k-1}$. Поскольку выражение kt^{k-1} является производной выражения t^k, используем теорему о почленном дифференцировании рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}kt^{k-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^k\right)'=\left(\frac{1}{1-t}\right)'=\frac{1}{(1-t)^2}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$50\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{(1+0,08)^n}=\frac{50}{(1-1-0,08)^2}=\frac{50}{0,08^2}=\left[\frac{Q}{r^2}\right]=7812,5.$$

В итоге получаем $7500+7812,5=15$ млн $312,5$ тыс. руб.

Задачи для самостоятельной работы

5.1. Рассчитайте, какую сумму нужно положить в банк под 12% годовых, чтобы иметь возможность каждый год снимать 100 тыс. руб.

5.2. Собственник сдает в бессрочную аренду помещение, получая за него 500 тыс. руб. в год при ставке 10% годовых. Процентная ставка увеличивается на 1%. На сколько следует поднять арендную плату, чтобы приведенная стоимость потока не изменилась?

5.3. Владелец делового центра решает сдать его в бессрочную аренду при ставке 11% годовых. Рассматриваются три варианта: 1) с арендной платой 3 млн руб. в год; 2) с арендной платой 1,2 млн руб. в год при условии, что арендная ставка возрастает каждый год на 200 тыс. руб.; 3) с арендной платой 1 млн руб. в год при условии, что арендная ставка возрастает каждый год на 7%. Выберите наиболее выгодный вариант.

5.4. Представьте, что вы владеете небольшим помещением под кафе площадью 250 кв. м внутри бульварного кольца г. Москвы и решаете сдать его в аренду. Изучите арендные ставки на данный вид недвижимости. Рассмотрите несколько привлекательных вариантов и выберете из них самый выгодный. (При принятии решения имеет смысл учесть не только приведенную текущую стоимость, но и другие важные, на ваш взгляд, аспекты.)

6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения естественного и логистического роста

Модели экономической динамики зависимых от времени t величин без ограничений описываются уравнением *естественного роста*: например, рост цен при постоянном темпе инфляции или увеличение интенсивности выпуска продукции при условии ненасыщаемости потребителя. Такое дифференциальное уравнение имеет вид

$$y' = k \cdot y,$$

где $y = y(t)$ – искомая функциональная зависимость, y' – скорость ее изменения, k – некоторый множитель пропорциональности.

Общее решение этого линейного однородного уравнения первого порядка с постоянным коэффициентом $y = Ce^{kt}$. Семейство функций носит экспоненциальный характер (рис. 15): при $k > 0$ – экспоненциальный рост, при $k < 0$ – экспоненциальное снижение.

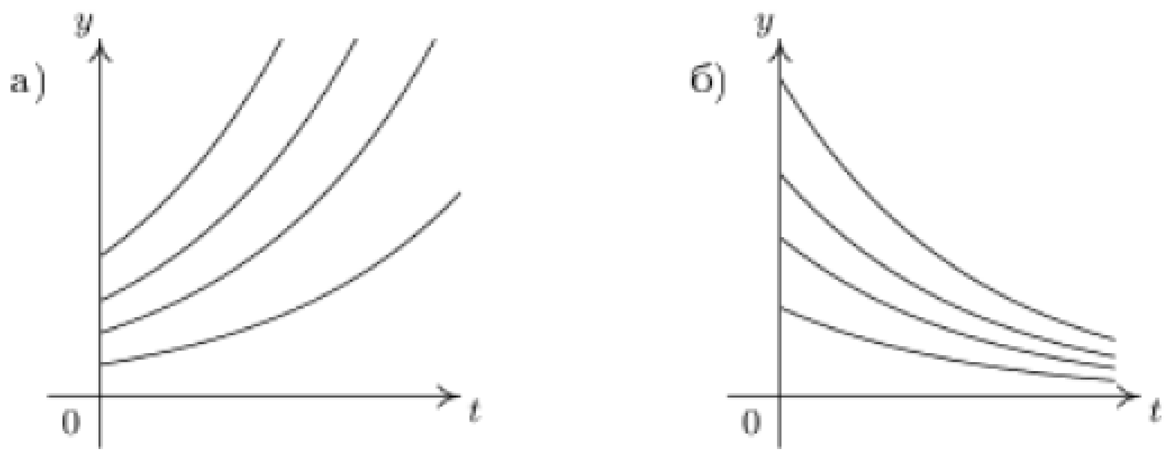


Рис. 15. Экспоненциальный рост и экспоненциальное снижение

При наличии естественных ограничений, например, при увеличении интенсивности выпуска продукции в условиях насыщения рынка или в процессе распространения рекламы, уравнение роста имеет дополнительный множитель

$$y' = k \cdot h(y) \cdot y,$$

где $y = y(t)$ – искомая зависимость, $h(y)$ – убывающая функция.

Частным случаем является уравнение *логистического роста*

$$y' = k \cdot (a - by) \cdot y; \quad a, b > 0.$$

Очевидно, постоянные функции $y = 0$, $y = \dfrac{a}{b}$ – стационарные решения. Общий интеграл этого уравнения получаем разделением переменных

$$\frac{dy}{(a-by)y} = k \cdot dt$$

и почленным интегрированием

$$\int \left(\frac{b}{a(a-by)} + \frac{1}{ay} \right) dy = \int k \cdot dt; \quad \frac{1}{a}\left(-\ln|a-by| + \ln|y|\right) = k \cdot t + \ln C;$$

$$\ln\left|\frac{y}{a-by}\right| = ak \cdot t + \ln C; \quad \frac{y}{a-by} = C \cdot e^{ak \cdot t} \ (C \neq 0).$$

Объединяя полученный результат со стационарными решениями, запишем общий интеграл уравнения логистического роста (рис. 16):

$$\frac{y}{a-by} = C \cdot e^{ak \cdot t}, \quad y = \frac{a}{b}.$$

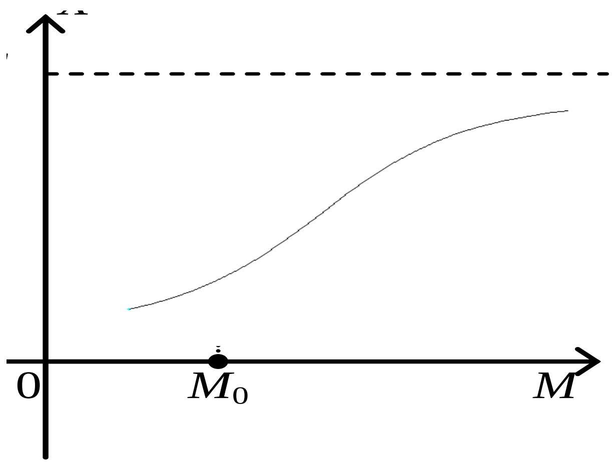


Рис. 16. Логистический рост

Определение функции спроса $Q_D(P)$ по заданной эластичности спроса

$$E_{D,P} = \frac{P}{Q_D(P)} \cdot Q'_D(P)$$

также приводит к решению уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные Q_D и P, получаем

$$\frac{dQ_D}{Q_D} = E_{D,P} \cdot \frac{dP}{P},$$

откуда находим общий интеграл в виде семейства показательных функций

$$\ln Q_D = E_{D,P} \ln P + \ln C; \quad Q_D(P) = C \cdot P^{E_{D,P}} \ (C \neq 0).$$

Динамика функций спроса, предложения и цен

В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависящими только от текущей цены на товар. Однако в реальных ситуациях они зависят также от тенденции ценообразования и темпов изменения цены, т.е. связаны с моментом времени t. Тогда их динамика определяется функциональными зависимостями $P(t), Q_S(t)$, $Q_D(t)$, причем на эту динамику могут оказывать влияние скорости изменения цен $P'(t)$ и темпы этого изменения $P''(t)$. Следовательно, такая динамика может описываться дифференциальными уравнениями первого и второго порядка, в частности линейными с постоянными коэффициентами.

В модели *адаптации рыночной цены* предполагается, что рынок не находится в равновесии, $P(t)-$цена товара в момент времени t. Разность $Q_D(P)-Q_S(P)$ называется *функцией избыточного спроса*. Предположение (Л. Вальрас), что прирост текущего уровня цены определяется избыточным спросом, приводит к дифференциальному уравнению

$$P' = \alpha\left(Q_D(P) - Q_S(P)\right),$$

где коэффициент $\alpha > 0-$ параметр адаптации цен к дисбалансу рынка. При линейных функциях спроса и предложения имеем линейное дифференциальное уравнение.

К уравнению представленного типа относится динамика процентной ставки, или *нормы процента* $r(t)$, движение которой в условиях рынка свободной конкуренции может обеспечить равенство объемов инвестиций и сбережений

$$r' = \alpha\big(I(r) - S(r)\big),$$

где $\alpha > 0 -$ коэффициент адаптации нормы процента, $I(r) -$ убывающая функция инвестиций, $S(r) -$ возрастающая функция сбережений.

Примеры решения задач

1. Опишите динамику роста средней цены на сырое молоко на текущий год при постоянном темпе инфляции 12%, если к началу года средняя цена на молоко составляла 22 руб. за килограмм.

Решение. Скорость роста цены $P'(t)$ при постоянном темпе инфляции описывается уравнением естественного роста

$$P' = r \cdot P,$$

где $r = 0{,}12 -$ норма инфляции. При заданном начальном условии $P(0) = 22$ имеем задачу Коши, общее решение которой запишется в виде

$$P = Ce^{0{,}12t}.$$

Константу C находим из начального условия: $22 = C \cdot e^0, C = 22$. Значит, искомая динамика роста средней цены на молоко:

$$P(t) = 22 \cdot e^{0{,}12t}.$$

2. В городе с населением в 1 млн человек открылся новый торгово-развлекательный центр. Каждый четвертый увидел рекламу нового центра по местному ТВ, и каждый второй передал информацию своим знакомым. Дальнейший обмен информацией происходит посредством общения. Какая часть населения узнает о новом торгово-развлекательном центре через неделю?

Решение. Предположим, что скорость изменения численности населения $y(t)$, владеющей информацией к моменту времени *t*, пропорциональна числу контактов между знающими и незнающими. Коэффициент эффективности рекламы положим равным 0,5. Тогда имеем уравнение логистического роста

$$y' = 0,5\left(1-y\right)y$$

с начальным условием $y\left(0\right)=\dfrac{1}{4}$. Общий интеграл запишется в виде $\dfrac{y}{1-y}=Ce^{t/2}$. С учетом начального условия получаем $\dfrac{1}{4}:\dfrac{3}{4}=C\cdot e^{0}$, $C=\dfrac{1}{3}$. Значит, решение задачи Коши принимает вид

$$\frac{y}{1-y}=\frac{e^{t/2}}{3};\quad y=\frac{e^{t/2}}{e^{t/2}+3}.$$

Итак, через неделю информацию о торгово-развлекательном центре будут иметь $y\left(7\right)=\dfrac{e^{3,5}}{e^{3,5}+3}\approx 0,916933$ (млн чел.), что составляет 91,63% населения города.

3. Начальная стоимость коттеджа базовой комплектации новой строительной компании – 2 млн руб. Функции спроса и предложения на продукцию компании имеют следующий вид: $Q_D(P)=100-10P$ и $Q_S(P)=10+20P$. Оцените динамику стоимости коттеджей $P(t)$ на длительный срок, если скорость ее изменения пропорциональна функции избыточного спроса.

Решение. Находим точку равновесия из условия $Q_D=Q_S$:

$$100-10P=10+20P;\quad P_0=3.$$

Поскольку функция избыточного спроса $Q_D(P)-Q_S(P)=90-30\cdot P,$ то динамика стоимости коттеджей $P(t)$ описывается уравнением

$$P'=\alpha\cdot(90-30\cdot P),\quad \alpha>0.$$

Приведем его к виду линейного уравнения с постоянным коэффициентом

$$P'+30\alpha\cdot P=90\alpha.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения: $P_{00}=C\cdot e^{-30\alpha\cdot t}$, а частным решением неоднородного можно считать равновесную цену $P_0 = 3$. Следовательно, общим решением линейного уравнения является функция

$$P = 3 + C \cdot e^{-30\alpha \cdot t}.$$

Из начального условия $P(0) = 2$ находим $2 = 3 + C \cdot e^0$; $\quad C = -1$.

Таким образом, динамика стоимости коттеджей $P(t)$ описывается функцией

$$P(t) = 3 - e^{-30\alpha \cdot t},$$

т.е. возрастает с начальной стоимости в 2 млн руб. к равновесной цене в 3 млн руб.

4. Функции спроса и предложения на военные вертолеты «Ночной охотник» за предшествующий период имели вид $Q_D(P) = 950 - 35P$, $Q_S(P) = 350 + 25P$. Ряд внешнеполитических факторов внес коррективы в указанные зависимости, и новая функция спроса приобрела вид $Q_D(P) = 1250 - 25P - 3P'$, а функция предложения увеличилась на величину $2P'$. Следующее количество единиц военной техники было продано по национальным валютам: в Сирию – 7, в Иран – 12, в Египет – 10 и в КНР – 24. Рассчитайте прежнюю равновесную цену на военные вертолеты (в млн долл. США), максимально возможную прогнозную цену и суммарную прогнозную выручку от международной торговли (в млн руб.). Таможенными пошлинами пренебречь и считать 1 долл. США = 67 руб.

Решение. Находим точку равновесия в предшествующем периоде из условия $Q_D = Q_S$:

$$950 - 35P = 350 + 25P; \quad P_0 = 10 \text{ млн. долл. США}.$$

В новых условиях равновесная цена является решением уравнения

$$1250 - 25P - 3P' = 350 + 25P + 2P'; \quad P' + 10P = 180.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения: $P_{00} = C \cdot e^{-10t}$, а частное решение неоднородного находим подстановкой константы: $0 + 10c = 180$, $c = 18$. Следовательно, общим решением линейного уравнения является функция

$$P = 18 + C \cdot e^{-10t}.$$

Начальное условие для нового этапа рынка военных вертолетов возьмем в виде $P(0) = 10$. Тогда имеем $10 = 18 + C \cdot e^0$; $\quad C = -8$.

Значит, динамика цены вертолета $P(t)$ описывается функцией $P(t) = 18 - 8e^{-10t}$, т.е. максимально возможная прогнозная цена $P_{\max} = 18$ млн долл. США.

Стоимость единицы техники составляет $67 \cdot 18 = 1206$ млн руб. Введем обозначения: $P_{nv} = (0,3; 0,002; 7,5; 10,2)$ – вектор национальных валют в рублевом эквиваленте, $N = (7; 12; 10; 24)$ – вектор единиц проданной техники. Тогда суммарную прогнозную выручку от международной торговли военными вертолетами можно вычислить с помощью скалярного произведения

$$1206 \cdot (P_{nv}, N) = 1206 \cdot 321,924 = 388 \text{ млрд } 240 \text{ млн } 344 \text{ тыс. руб.}$$

5. Эксперты спроса на прогулочные катера установили, что функции спроса и предложения на продукцию зависят не только от средней цены единицы продукции, но и от темпов ее изменения: $Q_D(P) = 10 - P - P' + 2P''$ и $Q_S(P) = 6 + P + P' + 3P''$. В момент выхода продукции на рынок один катер обходился в 3 млн руб.. Рассчитайте прогнозные значения средней цены прогулочного катера: **а)** через год, **б)** через два года.

Указание. Положите в начальный момент $P'(0) = 0$.

Решение. Находим точку равновесия из условия $Q_D = Q_S$

$$10 - P - P' + 2P'' = 6 + P + P' + 3P''; \quad P'' + 2P' + 2P = 4.$$

Таким образом, динамика средней цены прогулочного катера является общим решением линейного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Для решения соответствующего однородного уравнения получаем комплексные корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 : \lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Тогда общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$P_{00} = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Частное решение неоднородного находим подстановкой константы: $0 + 0 + 2c = 4,\ c = 2$. Следовательно, общим решением линейного уравнения является функция циклического характера

$$P = 2 + e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Продифференцируем эту функцию:

$$P' = -e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{-t}(-C_1\sin t + C_2\cos t) =$$
$$= e^{-t}\left((C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t\right)$$

и подставим начальные условия $P(0) = 3,\ P'(0) = 0$:

$$\begin{cases} 3 = 2 + C_1; \\ 0 = C_2 - C_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, динамика средней цены катера описывается функцией

$$P(t) = 2 + e^{-t}(\cos t + \sin t).$$

Вычисляем прогнозные значения средней цены катера:

а) $P(1) = 2 + e^{-1}(\cos 1 + \sin 1) \approx 2$ млн 508326 руб.;

б) $P(2) = 2 + e^{-2}(\cos 2 + \sin 2) \approx 2$ млн 66743 руб.

Задачи для самостоятельной работы

6.1. Интенсивность выпуска продукции при условии ненасыщаемости потребителя удовлетворяет уравнению естественного роста. Каков должен быть ежемесячный рост выпуска продукции, чтобы за год он составил не менее 25%?

6.2. Недельный спрос на бутилированную минеральную воду составляет 2 тыс. литровых бутылок по цене 50 руб. Опишите функцию спроса на минеральную воду, если его эластичность по цене постоянна и равна $-0,5$.

6.3. Найдите функцию месячного спроса на гидроустановки, если в пределах 100 установок эластичность спроса выражается зависимостью $E_{D,P} = \dfrac{Q_D - 100}{Q_D}$, а при цене 90 тыс. руб. спрос составляет 10 единиц.

6.4. Найдите функцию дневного спроса на смартфоны стоимостью до 40 тыс. руб. в салоне связи, если эластичность спроса выражается зависимостью $E_{D,P} = \dfrac{P}{P - 40}$, а при цене смартфона 10 тыс. руб. спрос составляет 3 единицы.

6.5. На стадии освоения нового оборудования в цехе инновационной продукции затраты на ее производство и цена продукции линейно зависят от объема выпуска: $C = 20Q - 16$ и $P = 20 + Q$, а скорость изменения выпуска продукции пропорциональна прибыли: $Q' = 0,5\left(P \cdot Q - C\right)$. Опишите общий вид динамики выпуска инновационной продукции, считая нулевым ее выпуск в начальный момент.

6.6. Представьте, что вы осуществляете экспертизу динамики равновесной цены стратегической продукции в целях продвижения ее на международном рынке. Маркетологи представили зависимости спроса и предложения продукции от ее цены (в млн долл. США): $Q_D(P) = 600 - 100P,\quad Q_S(P) = 150 + 50P.$ Сотрудники лаборатории прогноза скорректировали эти зависимости с учетом влияния экономических санкций против РФ: $Q_D(P) = 700 - 40P - 3P',$ $Q_S(P) = 350 + 30P + 2P'.$ Дайте экспертное заключение о тенденции поведения равновесной цены продукции.

7

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Количественную зависимость между объемом выпуска и факторами производства, такими как затраты ресурсов, уровень технологий, называют *производственной функцией*. Значение производственной функции равно объему продукции, который может быть изготовлен из ресурсов $X_1, X_2, ..., X_n$, взятых соответственно в количестве $x_1, x_2, ..., x_n$.

Если $n = 1$, то функция Q называется *однофакторной*, если $n > 1$, то – *многофакторной*. Заметим, что и значения переменных x_i, и значения производственной функции $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ неотрицательны согласно экономическому смыслу.

Производственные функции используются для анализа, планирования и прогноза деятельности отдельной организации, корпорации, отрасли, региона и даже целой страны.

Частными случаями двухфакторной производственной функции являются *линейная* производственная функция

$$Q(K, L) = A \cdot K + B \cdot L,$$

где $A > 0, B > 0$, *функция Кобба–Дугласа*

$$Q(K, L) = A \cdot K^{\beta} L^{1-\beta},$$

где $A > 0$, $0 < \beta < 1$, которые отражают взаимосвязь объема производства Q с объемом используемого капитала K и затратами труда L.

Мультипликативную производственную функцию иногда называют функцией Кобба–Дугласа общего вида

$$Q(K, L) = AK^{\alpha} L^{\beta},$$

где $A > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$

Другой важный пример – *производственная функция* CES (*с постоянной эластичностью замещения*):

$$Q(K, L) = A\left((1-\alpha)\cdot K^{-\rho} + \alpha \cdot L^{-\rho}\right)^{\frac{\beta}{\rho}},$$

где $A > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ \beta > 0,\ \rho > -1.$

Для анализа предпочтений потребителей на рынке товаров в экономике часто используется *функция полезности* $U(x_1, x_2, ..., x_n)$. Она рассматривается на множестве наборов товаров $X_1, X_2, ..., X_n$, причем аргументы $x_1, x_2, ..., x_n$ – это количества соответствующих товаров. Функция $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ показывает предпочтения потребителя: чем больше значение функции, тем предпочтительнее данный набор товаров.

Используя частные производные, можно вычислить *предельную полезность* произвольного товара (ресурса) X_k

$$U'_{x_k} = \frac{\partial U}{\partial x_k}.$$

Предельная полезность товара равна скорости изменения полезности набора товаров $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ при незначительном изменении количества товара X_k.

Чтобы полезность набора осталась прежней при изменении количества какого-либо товара или ресурса, приходится изменять количество другого. *Предельной нормой замещения товара* X_k *товаром* X_l называется отношение предельных полезностей товаров X_k и X_l

$$\mathrm{MRS}_{X_k, X_l}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{U'_{x_k}(x_1, x_2, ..., x_n)}{U'_{x_l}(x_1, x_2, ..., x_n)}.$$

Предельная норма замещения $MRS_{X_k X_l}$ приблизительно равна количеству единиц товара X_l, который может заменить единицу товара X_k. В числителе этой формулы находится предельная полезность того товара, *который* замещают, а в знаменателе – товара, *на* который замещают.

Для производственного плана, который при данном уровне производства обладает наименьшими издержками (с линейной функцией издержек), предельная норма замещения одного ресурса другим равна отношению цен $P_1 : P_2$ на эти ресурсы. При этом набор из двух товаров (x_1, x_2) оптимален тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{MRS}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{P_1}{P_2}.$$

Понятие эластичности функции нескольких переменных по одному из аргументов определяется аналогично эластичности функции одной переменной

$$E_{f,x_1}=\frac{f'_{x_1}\cdot x_1}{f};\quad E_{f,x_2}=\frac{f'_{x_2}\cdot x_2}{f};\ \ldots;E_{f,x_n}=\frac{f'_{x_n}\cdot x_n}{f}.$$

Свойства эластичности функции нескольких переменных в целом тоже аналогичны случаю одной переменной. Можно показать, что функция Кобба–Дугласа имеет постоянную эластичность выпуска по факторам производства.

Задачи экономического содержания, связанные с нахождением экстремумов, опираются на свойства выпуклых/вогнутых функций, используют определение знака квадратичной формы второго дифференциала. Для нахождения экстремумов в условиях с бюджетными ограничениями используют функцию Лагранжа.

Примеры решения задач

1. Вычислите предельную норму замещения ресурса K ресурсом L для следующих функций полезности: **а)** $U(K,L)=\alpha K+\beta L$; **б)** $U(K,L)=\left(5K^{-2}+3L^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ в точке $K_0=1, L_0=3$.

Решение. **а)** Найдем предельные полезности ресурсов K и L: $U'_K=\alpha$; $U'_L=\beta$. Тогда искомая предельная норма замещения равна $\mathrm{MRS}_{KL}=\dfrac{U'_K}{U'_L}=\dfrac{\alpha}{\beta}$. **б)** Аналогично

$$\left.\begin{aligned} U'_K &= 5\left(5K^{-2}+3L^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot K^{-3} \\ U'_L &= 3\left(5K^{-2}+3L^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot L^{-3} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad \mathrm{MRS}_{KL}=\frac{U'_K}{U'_L}=\frac{5\left(5K^{-2}+3L^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot K^{-3}}{3\left(5K^{-2}+3L^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot L^{-3}};$$

$$\mathrm{MRS}_{KL}=\frac{5L^3}{3K^3}.$$

Вычислим предельную норму замещения при $K_0=1, L_0=3$

$$\mathrm{MRS}_{KL}(1,3)=\frac{5\cdot 3^3}{3\cdot 1^3}=45.$$

2. Покажите, что функция Кобба–Дугласа $Q(K,L)=A\cdot K^{\beta}L^{1-\beta}$, где $A>0,\ \ 0<\beta<1$, имеет постоянную эластичность выпуска по факторам производства. Вычислите эластичность выпуска по фондам K для производственной функции Кобба–Дугласа $Q(K,L)=17K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{3}{5}}$.

Решение. Эластичности выпуска по ресурсам и труду функции Кобба–Дугласа имеют вид [15]

$$E_{Q,K}(K,L)=\frac{Q'_K\cdot K}{Q}=\frac{A\cdot\beta\cdot K^{\beta-1}L^{1-\beta}\cdot K}{AK^{\beta}L^{1-\beta}}=\beta,$$

$$E_{Q,L}(K,L)=\frac{Q'_L\cdot L}{Q}=\frac{A\cdot K^{\beta}\cdot(1-\beta)L^{-\beta}\cdot L}{AK^{\beta}L^{1-\beta}}=1-\beta.$$

Таким образом, эластичность выпуска по K (капитальным ресурсам или фондам) равна показателю степени соответствующей переменной $E_{Q,K}(K,L)=\dfrac{2}{5}$.

3. На мебельной фабрике в сборочном цехе работает 64 человека. В среднем один сборщик производит готовой для продажи продукции на 21 тыс. руб. в месяц. Клиент предлагает директору заключить контракт на поставку мебели на сумму 1 млн 700 тыс. руб., который надо выполнить в течение следующего месяца. Директор фабрики советуется с главным экономистом, чтобы определить, возможно ли такой объем работы выполнить в поставленные сроки. Директор считает, что производственные фонды (оборудование, материалы, площади сборочных цехов и т.д.), которые в настоящий момент составляют 3 млн 200 тыс. руб., можно оперативно увеличить в 1,5 раза; при этом он утверждает, что увеличение основных фондов на 1% дает прирост продукции на 2%. Возможное увеличение производственных ресурсов повлечет необходимость найма нескольких дополнительных рабочих. Главный экономист возражает, что выпуск продукции описывается мультипликативной производственной функцией, и утверждает, что прием одного дополнительного работника приводит к увеличению общего объема продукции лишь на 10,5 тыс. руб., поэтому потребуется значительное количество квалифицированных работников. В свою очередь, осуществить это в ближайшем населенном пункте за короткий срок представляется сомнительным.

Выполните поручение директора фабрики определить, сколько дополнительных работников надо привлечь для выполнения заказа.

Решение. Мультипликативная производственная функция имеет вид [15]

$$Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

где $A > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$

Поскольку стоимость продукции, производимой за месяц, в расчете на одного работника равна 21 тыс. руб., значит

$$\frac{Q(K,L)}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = AK^{\alpha}L^{1-\beta} = 21000\,(\text{руб.}). \qquad (1)$$

Увеличение продукции после найма одного дополнительного работника соответствует предельной производительности

$$Q'_L(K,L) = A\cdot K^{\alpha}\cdot\beta L^{\beta-1} = 10500\,(\text{руб.}). \qquad (2)$$

Прирост производства продукции после увеличения основных фондов на 1% по условию равен $Q'_K(K,L)\cdot 0,01K = 0,02Q,$ или

$$A\cdot\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}\cdot 0,01K = 0,02\,A\cdot K^{\alpha}L^{\beta}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1–3) получаем систему:

$$\begin{cases} A\cdot K^{\alpha}L^{\beta-1} = 21000, \\ A\cdot K^{\alpha}\cdot\beta L^{\beta-1} = 10500, \\ A\cdot\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}\cdot 0,01K = 0,02\,A\cdot K^{\alpha}L^{\beta}, \end{cases}$$

решение которой: $\alpha = \frac{1}{5}; \beta = \frac{1}{2}$. Подставим в первое уравнение найденные значения α, β, $L = 64$ и $K = 3200000$ и вычислим коэффициент A:

$$A \cdot 3200000^{\frac{1}{5}} \cdot 64^{-\frac{1}{2}} = 21000, \; A = 8\,400.$$

Производственная функция имеет вид $Q(K, L) = 8400 K^{\frac{1}{5}} L^{\frac{1}{2}}$.

Если основные фонды увеличить в 1,5 раза, то имеем $K = 1{,}5 \cdot 3200000 = 4800000$. Пусть ΔL – количество дополнительных работников, тогда $L = 64 + \Delta L$. Поскольку надо обеспечить выпуск продукции на сумму 1 700 000 руб., получаем уравнение

$$8400 \cdot 4800000^{\frac{1}{5}} \cdot (64 + \Delta L)^{\frac{1}{2}} = 1700000.$$

Решив его, получаем $\Delta L \approx 23{,}06$, т.е. необходимо нанять 24 работника. Таким образом, руководству фабрики придется обеспечить существенное дополнительное количество квалифицированного персонала в сборочный цех, чтобы гарантировать выполнение заказа за один месяц.

4. Найдите оптимальный план для получения максимальной прибыли, если выпуск продукции компании задан производственной функцией $Q(K,L) = \left(K^{-1} + 4L^{-1} \right)^{-\frac{1}{5}}$, цена единицы продукции $P = 25$, стоимость единиц капитальных и трудовых ресурсов $P_K = 2$ и $P_L = 1$ соответственно.

Решение. Функция прибыли имеет вид [15]

$$\pi(K, L) = P\,Q(K, L) - P_K \cdot K - P_L\, L = 25 \cdot \left(K^{-1} + 4L^{-1} \right)^{-\frac{1}{5}} - 2K - L.$$

Найдем первые частные производные функции прибыли

$$\pi'_K = 5\left(K^{-1} + 4L^{-1} \right)^{-\frac{6}{5}} \cdot K^{-2} - 2, \quad \pi'_L = 20\left(K^{-1} + 4L^{-1} \right)^{-\frac{6}{5}} \cdot L^{-2} - 1.$$

Приравнивая их к нулю, получаем систему, определяющую стационарные точки,

$$\begin{cases} 5\left(K^{-1}+4L^{-1}\right)^{-\frac{6}{5}}\cdot K^{-2}=2, \\ 20\left(K^{-1}+4L^{-1}\right)^{-\frac{6}{5}}\cdot L^{-2}=1. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим $L=8^{\frac{1}{2}}K$. Далее подставим полученное выражение в первое уравнение и выразим K

$$5\left(K^{-1}+\frac{4}{\sqrt{8}}\cdot K^{-1}\right)^{-\frac{6}{5}}\cdot K^{-2}=2 \quad\Rightarrow\quad K\approx 0,84 \text{ и } L=8^{\frac{1}{2}}K\approx 2,37.$$

Найдем вторые частные производные и вычислим их значения в стационарной точке

$$\pi''_{KK}=6\left(K^{-1}+4L^{-1}\right)^{-\frac{11}{5}}K^{-4}-10\left(K^{-1}+4L^{-1}\right)^{-\frac{6}{5}}K^{-3};$$
$$\pi''_{KK}\left(0,84;2,37\right)\approx -3,89;$$

$$\pi''_{KL}=24\left(K^{-1}+4L^{-1}\right)^{-\frac{11}{5}}K^{-2}L^{-2};$$
$$\pi''_{KL}\left(0,84;2,37\right)\approx 0,59;$$

$$\pi''_{LL}=96\left(K^{-1}+4L^{-1}\right)^{-\frac{11}{5}}\cdot L^{-4}-40\left(K^{-1}+4L^{-1}\right)^{-\frac{6}{5}}\cdot L^{-3};$$
$$\pi''_{LL}\left(0,84;2,37\right)\approx -0,88.$$

Рассмотрим матрицу квадратичной формы второго дифференциала и воспользуемся критерием Сильвестра

$$H=\begin{pmatrix} -3,89 & 0,59 \\ 0,59 & -0,88 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} \Delta_1\approx -3,89<0, \\ \Delta_2\approx 2,76>0. \end{matrix}$$

Поскольку второй дифференциал – отрицательно определенная квадратичная форма, то найденная точка является точкой максимума.

Вычислим максимальную прибыль:

$$\pi\left(K,L\right)=25\cdot\left(K^{-1}+4L^{-1}\right)^{-\frac{1}{5}}-2K-L\Rightarrow \pi_{\max}\left(0,84;2,37\right)\approx 16,2.$$

5. Компания De Beers, долгое время считавшаяся монополистом в сфере добычи алмазов (наиболее известна широкой публике рекламной кампанией A Diamond Is Forever), продает алмазы ювелирам на рынках трех стран, экономики которых независимы друг от друга. Функции спроса на этих рынках линейны и имеют вид $Q_1(P_1) = 14,35 - 0,36P_1$, $Q_2(P_2) = 21,65 - 0,48P_2$, $Q_3(P_3) = 10,5 - 0,25P_3$. При этом издержки компании на реализацию алмазов едины для рынков всех стран, а добыча ведется на одном месторождении в ЮАР. Таким образом, возможно построить единую функцию издержек $C(Q) = 64 + 18Q$. Определите цены P_1, P_2, P_3 (в у.е.) на каждом из рынков, при которых компания De Beers получит максимальную прибыль, и вычислите ожидаемую прибыль.

Решение. В условиях данного примера функция прибыли имеет вид [15]

$$\pi(P_1, P_2, P_3) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3 - C(Q_1 + Q_2 + Q_3) =$$

$$P_1(13,45 - 0,37P_1) + P_2(26,15 - 0,45P_2) + P_3(12,3 - 0,27P_3) -$$

$$-64 - 18(13,45 - 0,37P_1 + 26,15 - 0,45P_2 + 12,3 - 0,27P_3) =$$

$$= -0,37P_1^2 - 0,45P_2^2 - 0,27P_3^2 + 20,11P_1 + 34,25P_2 + 17,16P_3 - 998,2.$$

Вычислим первые частные производные функции прибыли

$$\pi'_{P_1} = -0,74P_1 + 20,11, \pi'_{P_2} = -0,9P_2 + 34,25, \pi'_{P_3} = -0,54P_3 + 17,16.$$

Приравняв их к нулю и решив систему, получим стационарную точку: $P_1 \approx 27,18;\quad P_2 \approx 38,06;\quad P_3 \approx 32,59$. При найденных ценах прибыль составит $\pi(27,18; 38,06; 32,59) = 199,23$.

Проверим, является ли найденная точка точкой максимума. Вычислим вторые частные производные и исследуем квадратичную форму второго дифференциала на знакоопределенность по критерию Сильвестра

$$\pi''_{P_1P_1} = -0,74,\quad \pi''_{P_2P_2} = -0,9,\quad \pi''_{P_3P_3} = -0,54,\quad \pi''_{P_1P_2} = \pi''_{P_1P_3} = \pi''_{P_2P_3} = 0;$$

$$\Rightarrow\quad H = \begin{pmatrix} -0,74 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9 & 0 \\ 0 & 0 & -0,54 \end{pmatrix}; \qquad \begin{aligned} \Delta_1 &= -0,3 < 0, \\ \Delta_2 &= (-0,74)\cdot(-0,9) > 0, \\ \Delta_3 &= (-0,74)\cdot(-0,9)\cdot(-0,54) < 0. \end{aligned}$$

Поскольку второй дифференциал – отрицательно определенная квадратичная форма, то стационарная точка $(27,18; 38,06; 32,59)$ дает оптимальное распределение цен.

Задачи для самостоятельной работы

7.1. Предположим, что выпуск iPhone 7 можно описать производственной функцией $Q(K,L)=\dfrac{L^3\cdot 5^K}{1+5^K}$, где Q – количество произведенных смартфонов, K – объем производственных фондов (капитал), L – объем трудовых ресурсов.

Найдите предельную фондоотдачу компании Apple, предельную производительность труда рабочих, предельную норму замещения труда капиталом, эластичности выпуска по фондам и по труду при K_0 = 7 у.е., L_0 = 100 у.е.

7.2. Для функции полезности $U\left(x_1,x_2\right)=17\,x_1^{\frac{2}{5}}x_2^{\frac{3}{5}}$ проверьте, какой из производственных планов $(1;6)$ или $(3,8)$ является самым дешевым при условии линейной функции издержек, если стоимости данных товаров составляют $P_1=36$ и $P_2=144$ соответственно.

7.3. Белоруссия продает тракторы двум странам – КНДР и Ирану. Предположим, иных способов получить данный товар у этих двух стран нет, перепродажа тракторов между этими странами также невозможна по политическим причинам. Функции спроса имеют вид $Q_1=1260-2P_1$ тыс. ед. для КНДР и $Q_2=420-\dfrac{1}{2}P_2$ тыс. ед. для Ирана. Издержки на производство и транспортировку Q тракторов равны $C\left(Q\right)=Q^2$. Определите объемы продаж на каждом из рынков, при которых Белоруссия получит максимальную прибыль при заключении долгосрочных контрактов на поставку тракторов в эти страны.

7.4. Представьте, что вы – управляющий предприятия по производству бытовой техники, на котором в последнем периоде времени произошло существенное снижение выручки. Главный инженер предприятия доработал процесс производства так, что теперь выпуск продукции задан производственной функцией

$$Q\left(K,L\right)=100\left(2K^{-2}+L^{-2}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Затраты на одну условную единицу капитала K за месяц равны 150 тыс. руб. Зарплата группе цеховых рабочих за месяц, принятая за условную единицу L, равна 200 тыс. руб. При этом предприятие реализует свою продукцию по средней цене 5 тыс. руб. за единицу товара.

Распределите ресурсы между трудом и капиталом для оптимального плана выпуска продукции, который не допускает убыточного производства.

7.5. В российском городе N, отдаленном от ближайших населенных пунктов настолько, что экономику города можно считать независимой от российской экономики (условное предположение), одаренный местный житель Иван Петрович в подвале собирает реплики телефонов iPhone 6 и наушников Beats by Dr. Dre. Кроме него в городе N этим никто не занимается. Иван Петрович рассчитал, что телефоны он может продавать по цене $P_1 = 10$ тыс. руб. за штуку, а наушники за $P_2 = 2$ тыс. руб. за штуку; при этом функция издержек имеет вид $C = Q_1^2 + Q_2^2$, где Q_1 и Q_2 – количество телефонов и наушников соответственно. На издержки Иван Петрович готов потратить 104 тыс. руб.

Помогите ему вычислить максимальную прибыль «фирмы» и составить соответствующий производственный план.

8

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ КЕЙСОВ

Кейс 1. Мини-программа семейной финансовой поддержки

Кейс разработан на основе статьи А.М. Кумыкова, Н.А. Максимова «Методы линейной оптимизации в размещении персональных вкладов» [9].

Вы ведете активную деловую жизнь в Москве, но успешное развитие вашего бизнеса на востоке страны приводит к необходимости срочного переезда во Владивосток. В связи с этим вы продумываете мини-программу семейной финансовой поддержки из трех этапов и обсуждаете ее в целях оптимизации финансового результата:

1-й этап. Вы решили закрыть оба счета дебетовых карт БинБанка (остаток 40 тыс. руб.) и АрксБанка (остаток 130 тыс. руб.), затем перевести эту сумму денег следующим образом: на счета сыновей-студентов по 60 тыс. руб. (один учится в Москве, другой – в Санкт-Петербурге), а оставшуюся часть – родителям, проживающим в Минске. *Как сделать переводы, чтобы минимизировать ваши затраты?*

2-й этап. Вы продаете автомобиль за 700 тыс. руб. и садовый участок за 1,3 млн руб., а вырученные средства собираетесь положить на отдельные счета ФИНАМБанка и банка ПремьерКредит соответственно в распоряжение обоих сыновей. В свою очередь, дети планируют потратить эти денежные суммы следующим образом: поехать вдвоем на летние языковые курсы в Европу за 300 тыс. руб., сделать инвестиции в Ваш бизнес в размере 1,2 млн руб. и 500 тыс. руб. скопить на иные нужды. *Как рационально разместить средства на вкладах, чтобы максимизировать дополнительный доход?*

3-й этап. Вам предстоит принять решение о вложении в валюту прибыли от вашего бизнеса на востоке для дальнейшего развития его с участием сыновей. Вы отдаете предпочтение японскому йену, а ваши сыновья – соответственно китайскому юаню и сингапурскому доллару. *В каких пропорциях следует вложиться в перечисленные валюты, чтобы максимизировать ожидаемую доходность?*

Опишите ваши предполагаемые действия на каждом этапе и обоснуйте оптимальность предложенных вами вариантов.

Указание. Для решения кейса необходимо воспользоваться:

- данными о процентах за перевод денежных средств в БинБанке и АрксБанке;
- информацией о процентных ставках по вкладам «До востребования», «Срочный», «Управляемый», предлагаемых ФИНАМ-Банком и банком ПремьерКредит;
- данными по доходности и рискам трех валют.

Решение. Последовательное принятие решений на каждом из трех этапов мини-программы представляет собой реализацию линейной математической оптимизации [12]. Постановка соответствующей задачи линейного программирования означает задание системы линейных ограничений на основные переменные и построение линейной функции от этих переменных (целевой функции), которую требуется максимизировать или минимизировать с учетом системы ограничений. Методы линейного программирования предоставляют способы получения искомого оптимального решения и оптимального значения линейной функции.

Рассмотрим последовательно каждый из трех этапов.

1-й этап. Закрытие двух счетов дебетовых карт (БинБанка и АрксБанка) и перевод денежных средств родственникам.

По найденным данным о затратах на перевод денежных средств с дебетовых карт заполним таблицу:

	Москва	Санкт-Петербург	Минск
БинБанк	2%	3%	2%
АрксБанк	2%	4%	5%

Введем обозначения: x_{ij} – размер денежного перевода через i-й $(i=1,2)$ банк j-му $(j=1,2,3)$ адресату (обоим сыновьям и родителям). По условиям остатков в каждом банке составляем два уравнения, а по условиям денежных сумм адресатам – три уравнения, приводящие к системе линейных ограничений на денежные переводы:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=40, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=130, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11}+x_{21}=60, \\ x_{12}+x_{22}=60, \\ x_{13}+x_{23}=50. \end{cases}$$

Условие минимизации затрат на переводы представляет собой линейную функцию, которую необходимо оптимизировать

$$c(x_{ij})=0,02x_{11}+0,03x_{12}+0,02x_{13}+0,02x_{21}+0,04x_{22}+0,05x_{23}\to \min.$$

Исходным вариантом перевода средств (начальным опорным планом) может быть следующий:

	Москва	Санкт-Петербург	Минск
БинБанк	40	–	–
АрксБанк	20	60	50

с затратами $c=0,02\cdot 40+0,02\cdot 20+0,04\cdot 60+0,05\cdot 50=6,1$. Согласно методу потенциалов (используемому при решения транспортных задач) оценки $\Delta_{12}=0,04-0,03>0$, $\Delta_{13}=0,05-0,02>0$ позволяют по циклу улучшить опорный план:

	Москва	Санкт-Петербург	Минск
БинБанк	–	–	40
АрксБанк	60	60	10

с затратами $c=0,02\cdot 40+0,02\cdot 60+0,04\cdot 60+0,05\cdot 10=4,9$. Но теперь обе оценки отрицательны: $\Delta_{11}=-0,01-0,02<0$, $\Delta_{12}=0,01-0,03<0$.

Следовательно, минимизация функции затрат достигнута и $c_{\min}=4,9$ тыс. руб. В этом случае Вам необходимо с карты БинБанка сделать перевод родителям в 40 тыс. руб., а с карты АрксБанка: каждому из сыновей – по 60 тыс. руб. и родителям – оставшиеся 10 тыс. руб.

2-й этап. Размещение вырученных денежных средств во вкладах (ФИНАМБанка и банка ПремьерКредит). Найденную информацию о процентных ставках по банковским вкладам различных типов представим в следующей таблице:

	«До востребования»	«Срочный»	«Управляемый»
ФИНАМБанк	3,4%	10,3%	9,1%
ПремьерКредит	5,8%	12,5%	6,8%

Обозначим через x_{ij} размер вложенных денежных средств в i-й $(i=1,2)$ банк на j-й $(j=1,2,3)$ вклад (соответственно «До востребования», «Срочный», «Управляемый»). По условию вырученных от продажи автомобиля и садового участка средств составляем два уравнения, а согласно дальнейшим целям использования вкладов – три уравнения, поэтому линейные ограничения имеют вид как и на предыдущем этапе:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=0,7, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=1,3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11}+x_{21}=0,3, \\ x_{12}+x_{22}=1,2, \\ x_{13}+x_{23}=0,5. \end{cases}$$

Для рационального размещения средств во вкладах линейную функцию дохода следует максимизировать:

$$\pi(x_{ij})=1,034x_{11}+1,103x_{12}+1,091x_{13}+1,058x_{21}+1,125x_{22}+1,068x_{23}\to\max.$$

Сведем задачу максимизации к исследованию противоположной функции $-\pi\to\min$. Начальный опорный план дает следующий вариант распределения средств по типам вкладов:

	«До востребования»	«Срочный»	«Управляемый»
ФИНАМБанк	0,2	–	0,5
ПремьерКредит	0,1	1,2	–

откуда $-\pi=-1,034\cdot 0,2-1,091\cdot 0,5-1,058\cdot 0,1-1,125\cdot 1,2=-2,2081.$

Оценки $\Delta_{12}=-1,101+1,103>0,\quad \Delta_{23}=-0,024-1,091+1,068<0,$ показывают возможность оптимизации, для чего по циклу улучшаем опорный план до соответствующего значения

$$-\pi=-1,103\cdot 0,2-1,091\cdot 0,5-1,058\cdot 0,3-1,124=-2,2085$$

	«До востребования»	«Срочный»	«Управляемый»
ФИНАМБанк	–	0,2	0,5
ПремьерКредит	0,3	1,0	–

с оценками: $\Delta_{11}=-1,036+1,034<0,\quad \Delta_{23}=0,022-1,091+1,068<0.$ В свою очередь, это показывает получение оптимального значения задачи на максимум и $\pi_{\max}=2,2085$ тыс. руб.

Таким образом, максимальный доход в размере 208,5 тыс. руб. от размещения средств на вкладах будет достигнут следующим образом: в ФИНАМБанк на вклад «Срочный» необходимо положить 200 тыс. руб., на вклад «Управляемый» – 500 тыс. руб.; в банке ПремьерКредит на вклад «До востребования» положить 300 тыс. руб., а на вклад «Срочный» – 1 млн руб.

3-й этап. Вложение прибыли от бизнеса в валюты трех видов (японский йен, китайский юань и сингапурский доллар). Данные по доходности и рискам трех валют внесем в следующую таблицу:

	Юань	Йена	Сингапурский доллар
Доходность *r*	0,05	0,1	0,15
Риск σ	0,1	0,3	0,5

Введем обозначение: x_i – размер доли одной из трех валют $(i = 1, 2, 3)$ в совокупном вложении прибыли от бизнеса, причем сумма долей составляет единицу. Максимальный уровень риска положим равным 0,4. Тогда система ограничений будет иметь комбинированный характер

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,3x_3 \le 0,4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1. \end{cases}$$

Условие максимизации ожидаемой доходности приводит к линейной функции, которую необходимо оптимизировать

$$r(x_i) = 0,05x_1 + 0,1x_2 + 0,15x_3 \to \max.$$

Приведем задачу к стандартной форме исключением неизвестной $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ и переходом к системе неравенств с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 0,4x_1 + 0,2x_2 \ge 0,1, \\ x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \le 1. \end{cases}$$

Теперь ожидаемая доходность:

$$r(x_i) = -0,01x_1 - 0,05x_2 + 0,15 \to \max.$$

Дальнейшее решение проведено графическим способом (рис. 17): изображены выпуклый многоугольник системы ограничений и вектор нормали прямых уровня функции ожидаемой доходности

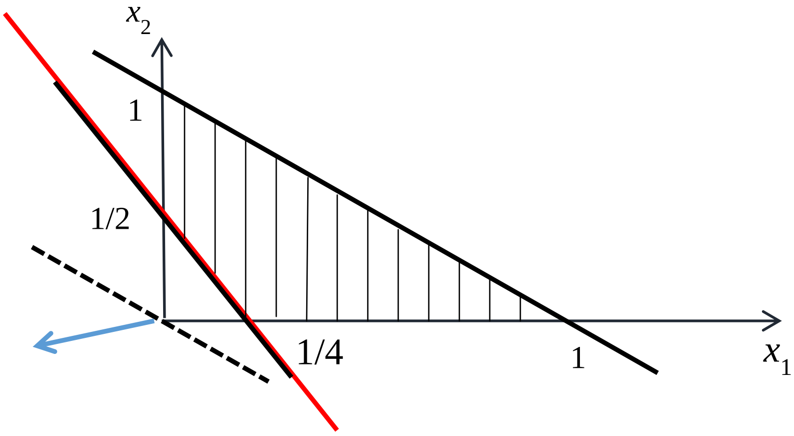


Рис. 17. Отрезок оптимальных решений

Прямая уровня оказывается параллельной целому отрезку из точек, дающих оптимальные решения, во всех точках этого отрезка ожидаемая доходность равна 0,125.

Итак, максимальное значение ожидаемой доходности от вложения в валюту в размере 12,5% возможно получить в следующих диапазонах долей по видам валют:

	Юань	Йена	Сингапурский доллар
Диапазон доли валюты	0%	0%	50%
	25%	50%	75%

При этом самым выгодным оказывается вложение в сингапурский доллар.

Кейс 2. Экспертиза отмены пригородных поездов ОАО «РЖД»

Кейс разработан на основе статьи А.М. Кононенко, М.П. Клетаниной «Исследование проблемы пригородных электричек с помощью двойственной задачи линейного программирования» [8].

Начало 2015 года было отмечено серьезным беспокойством населения в связи с массовым сокращением пригородных поездов, а в ряде регионов – их ликвидацией. ОАО «РЖД» осуществляет три стратегических направления деятельности: пассажирские перевозки в дальнем следовании, пассажирские перевозки в пригородном сообщении и грузовые перевозки.

Вашей экспертной группе поручено выяснить, *были ли меры по сокращению и отмене пригородных поездов со стороны ОАО «РЖД» экономически обоснованными?*

Представьте аналитический отчет о том, каковы пропорции осуществления ОАО «РЖД» каждого вида перевозок, гарантирующие компании оптимальную прибыль при любом состоянии спроса.

Указание. Для решения кейса необходимо воспользоваться ежеквартальными отчетами ОАО «РЖД», содержащими данные о прибыли по основным видам деятельности.

Решение. На основании ежеквартальных отчетов ОАО «РЖД» за 2014 г. было выявлено, что большую часть средств компании приносят грузоперевозки, а наименьшую – перевозки в пригородном сообщении.

Анализ эффективности работы компании опирается на аппарат *теории игр*, а также на методы *двойственности* в линейном программировании.

Предположим, что компания ОАО «РЖД» – это игрок A, а игрок B – это спрос, который в условиях оптимизации прибыли в данной ситуации является неопределенным. Для игрока B введем три компонента:

- D_1 – спрос удовлетворен полностью на перевозки в пригородном сообщении в весенне-осенний период (дачники активно используют пригородный транспорт);
- D_2 – спрос на грузовые перевозки удовлетворен полностью, на перевозки дальнего следования – частично (межсезонье);
- D_3 – спрос на грузовые перевозки удовлетворен полностью, а на перевозки пригородного сообщения и дальнего следования – частично, пути минимально загружены (зимнее время).

Данные о прибыли компании за 2014 г. представлены в платежной матрице (табл. 1), где введен понижающий коэффициент и использованы условные единицы.

Таблица 1

Платежная матрица

A_i / B_j	D_1	D_2	D_3
Грузовые перевозки	6	12	16
Перевозки в пригородном сообщении	18	8	4
Перевозки в дальнем следовании	14	10	8

Оптимальная стратегия игрока в теории игр – это стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш). В исходную матрицу введем дополнительные строки и столбцы (табл. 2). Столбец $\alpha = \max\min -$ нижняя цена игры, или максимальный выигрыш (максимин) игрока *A*, а строка $\beta = \min\max -$ верхняя цена игры, или гарантированный проигрыш игрока *B*.

Таблица 2

Расширенная платежная матрица

A_i / B_j	D_1	D_2	D_3	p_i	α
Грузовые перевозки	6	12	16	p_1	6
Перевозки в пригородном сообщении	18	8	4	p_2	4
Перевозки дальнего следования	14	10	8	p_3	8
q_j	q_1	q_2	q_3		
β	18	12	16		$\alpha = 8$ $\beta = 12$

Поскольку $\alpha = 8, \beta = 12$, то седловой точки нет. Следовательно, задача решается в смешанных стратегиях игроков $S_A = (p_1, p_2, p_3)$ и $S_B = (q_1, q_2, q_3)$, что приводит к решению двойственной задачи линейного программирования.

Если игрок *A* применяет свою оптимальную смешанную стратегию, $S_A = (p_1, p_2, p_3)$; $p_1 + p_2 + p_3 = 1$; $p_i \geq 0, i = 1, 2, 3$, а игрок *B* применяет последовательно свои чистые стратегии, то математическое ожидание прибыли, которую фирма может получить, оказывается не меньше цены игры v (т.е. средней максимальной прибыли игрока *A*).

Тогда имеет место следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 6p_1 + 18p_2 + 14p_3 \geq v, \\ 12p_1 + 8p_2 + 10p_3 \geq v, \\ 16p_1 + 4p_2 + 8p_3 \geq v, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Введем новые переменные, разделив каждое из неравенств на $v > 0$:

$$x_1 = \frac{p_1}{v};\ x_2 = \frac{p_2}{v};\ x_3 = \frac{p_3}{v}.$$

Поскольку $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v}$. Следовательно, для игрока A максимизация цены игры v эквивалентна минимизации величины $\frac{1}{v}$:

$$\begin{cases} 6x_1 + 18x_2 + 14x_3 \geq 1, \\ 12x_1 + 8x_2 + 10x_3 \geq 1, \\ 16x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geq 1, \\ F(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min. \end{cases}$$

Таким образом, двойственная задача линейного программирования принимает вид

Задача 1. *Игрок A*

$$\begin{cases} 6x_1 + 18x_2 + 14x_3 \geq 1 \\ 12x_1 + 8x_2 + 10x_3 \geq 1 \\ 16x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ Z(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min \end{cases}$$

Задача 2. *Игрок B*

$$\begin{cases} 6y_1 + 12y_2 + 16y_3 \leq 1 \\ 18y_1 + 8y_2 + 4y_3 \leq 1 \\ 14x_1 + 10x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ F(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max \end{cases}$$

Теперь решим задачу 2 на максимум симплекс-методом. Сначала необходимо привести матрицу к каноническому виду, введя балансовые переменные y_4, y_5 и y_6, а затем заполнить симплекс-таблицы (табл. 3-4).

Таблица 3

Начальная симплекс-таблица

Базис	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	1	6	12	16	1	0	0
y_5	1	18	8	14	0	1	0
y_6	1	14	10	8	0	0	1
$F(y)$	0	–1	–1	–1	0	0	0

Таблица 4

Окончательный вариант симплекс-таблицы

Базис	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_5	$\frac{2}{27}$	0	0	$\frac{44}{27}$	$\frac{1}{27}$	1	$-\frac{14}{9}$
y_1	$\frac{1}{54}$	1	0	$-\frac{16}{27}$	$-\frac{6}{54}$	0	$\frac{1}{9}$
y_2	$\frac{2}{27}$	0	1	$\frac{44}{27}$	$\frac{1}{54}$	0	$-\frac{1}{18}$
$F(y)$	$\frac{5}{54}$	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	0	$\frac{1}{18}$

Среди значений индексной строки в таблице 4 нет отрицательных, поэтому данная таблица определяет оптимальный план задачи для игрока B:

$$y_1 = \frac{1}{54}, y_2 = \frac{2}{27}, y_3 = 0,\ F(Y) = \frac{1}{54} + \frac{2}{27} = \frac{5}{54}.$$

Из теоремы двойственности следует, что $X = C \times A^{-1}$, где A^{-1} – матрица, обратная к матрице из компонентов векторов, входящих в оптимальный базис. Составим матрицу A и найдем обратную к ней A^{-1}:

$$A = (A_5, A_1, A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 1 & 18 & 8 \\ 0 & 14 & 10 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{27} & 1 & -\frac{14}{27} \\ -\frac{5}{54} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{7}{54} & 0 & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Как видно из последнего плана симплексной таблицы, матрица A^{-1} расположена в столбцах дополнительных переменных. Далее находим

$$Y = C \times A^{-1} = (0;1;1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{17}{27} & 1 & -\frac{14}{9} \\ -\frac{5}{54} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{7}{54} & 0 & -\frac{1}{18} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{27}; 0; \frac{1}{18} \right),$$

откуда получаем оптимальный план игрока A и значение

$$x_1 = \frac{1}{27}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{18};\ Z(X) = \frac{1}{27} + \frac{1}{18} = \frac{1}{54}.$$

Таким образом, после округления результатов окончательные оптимальные стратегии имеют вид: для игрока $A:(0,4;0;0,6)$, для игрока $B:(0,2;0,8;0)$.

Итак, оптимальные процентные доли осуществления ОАО «РЖД» каждого вида перевозок следующие: 60% – пассажирские перевозки в дальнем следовании, 40% – грузовые перевозки, пассажирские перевозки в пригородном сообщении не осуществлять.

Проведенная экспертиза показывает, что принятие решения о сокращении и отмене электричек было экономически и математически обоснованной мерой. В качестве варианта оптимизации прибыли ОАО «РЖД» без несения убытков можно предложить осуществлять перевозки в пригородном сообщении путем присоединения вагонов электричек к поездам дальнего следования.

Кейс 3. Задание аналитическому департаменту ОАО «Аэрофлот – Российские авиалинии»

Кейс разработан на основе статьи А.А. Макаровой «Анализ статистических данных средствами математического анализа на примере компании ОАО «Аэрофлот – Российские авиалинии»» [11].

В октябре 2015 года кампания Трансаэро, главный конкурент *ОАО «Аэрофлот – Российские авиалинии»*, прекратила свою операционную деятельность. Руководство компании *«Аэрофлот»* заинтересовано использовать ситуацию, чтобы стимулировать повышение спроса на пассажирские перевозки. Аналитическому департаменту поручено изучить статистические данные по пассажирообороту за 2001–2015 гг. и определить функциональную зависимость спроса и предложения от цены на авиабилеты, проанализировать эластичности этих функций и рассчитать оптимальную цену за пассажиро-километр, при которой прибыль компании была бы наибольшей.

Решение. Как было показано в примере 3, функции спроса и предложения на пассажирские авиаперевозки имеют вид

$$Q_D(P) = -1,64 \cdot 10^{10} P + 1,27 \cdot 10^{10} \text{ и } Q_S(P) = 1,36 \cdot 10^{10} P + 3,33 \cdot 10^{10},$$

где P – средняя цена за пассажиро-километр, Q – пассажирооборот (количество проданных мест).

Чтобы компенсировать погрешность, полученную из-за округления дробной части некоторых данных, проверим вычисления средствами регрессионного анализа данных в Microsoft Excel и получим более точные коэффициенты:
$Q_D(P) = -16362456141P + 126988690769$ для функции спроса и $Q_S(P) = 1,36 \cdot 10^{10} P + 3,33 \cdot 10^{10}$ для функции предложения.

Опираясь на функции спроса и предложения, проверим стабильность рыночного равновесия при помощи так называемой паутинообразной модели.

В зависимости от соотношения абсолютных величин тангенсов углов наклона кривых спроса и предложения (угол по соотношению к оси цены) можно определить стабильность или нестабильность рыночного равновесия. Сравним коэффициенты b_D и b_S:

$$b_D = 1,27 \cdot 10^{11}; \quad b_S = 3,33 \cdot 10^{10} \quad \Rightarrow b_D > b_S$$

Из этого соотношения следует, что любое отклонение от равновесия приведет к колебаниям, которые будут постепенно затухать и рыночное равновесие восстановится. Опустим расчеты паутинообразной модели, так как они приведут к равновесной цене, которую можно найти, если приравнять спрос и предложение:

$$-1,64 \cdot 10^{10} P + 1,27 \cdot 10^{11} = 1,36 \cdot 10^{10} P + 3,33 \cdot 10^{10},$$

$$3 \cdot 10^{10} P = 9,37 \cdot 10^{10},$$

$$P_0 \approx 3,12 \text{ руб/пкм} - \text{равновесная цена},$$

$$Q_0 \approx 7,59 \cdot 10^{10} \text{ пкм} - \text{равновесный пассажирооборот}.$$

Заметим, что равновесная цена чуть меньше цены в 2009 г., в то время как равновесный пассажирооборот больше предельного пассажирооборота 2009 г. Рассмотрим подробнее эту ситуацию. По сравнению в 2008 г. Аэрофлот увеличил парк воздушных судов на 30% и незначительно снизил цены на авиабилеты – что должно было существенно повысить спрос. Но в связи с экономическим кризисом спрос упал и компания, ориентируясь на доходы населения и целую ситуацию, снизила предельный пассажирооборот, чтобы избежать убытков по издержкам, а также списала 22 ТУ-154 во второй половине года и затем еще больше снизила цены в 2010 г., что значительно отодвинуло их от равновесия.

Рассмотрим имеющиеся функции спроса и предложения на эластичность.

Спрос:

$$E_D(P) = \frac{P}{Q(P)} \cdot Q'(P) = \frac{-1,64 \cdot 10^{10} P}{-1,64 \cdot 10^{10} P + 1,27 \cdot 10^{11}}.$$

$$E_D(P) \approx -0,67.$$

Спрос по цене неэластичен и снижение цены должно привести к падению совокупной выручки и наоборот, рост цен приведет к росту общей выручки. Такой спрос типичен для авиаперевозок, так как в большинстве случаев они не имеют альтернатив и остаются единственным способом добраться до многих стран мира, а также превосходят другие виды транспорта (например, железнодорожные перевозки) по издержкам во времени, поэтому большая часть пассажиров не готовы отказаться от авиаперевозок.

Предложение:

$$E_S(P) = \frac{P}{Q(P)} \cdot Q'(P) = \frac{1,36 \cdot 10^{10} P}{1,36 \cdot 10^{10} P + 3,33 \cdot 10^{10}}.$$

$$E_S(P) \approx 0,56.$$

Предложение по цене неэластично, как и спрос, из-за недостаточности альтернатив.

Составим функцию прибыли, используя валовые издержки по пассажирским перевозкам за весь исследуемый период (2001–2015). Аналогично спросу и предложению (пример 3, глава 7) выводим линейную функцию издержек, которая будет зависеть от объема спроса (табл. 5).

Таблица 5

Дополнение табличной зависимости суммами для вывода функции издержек методом наименьших квадратов

	Q_S	TC	$Q_S{}^2$	$Q_S \cdot TC$
2001	$1{,}89\cdot 10^{10}$	$1{,}37\cdot 10^{11}$	$3{,}59\cdot 10^{20}$	$2{,}59\cdot 10^{21}$
2002	$1{,}76\cdot 10^{10}$	$1{,}18\cdot 10^{11}$	$3{,}11\cdot 10^{20}$	$2{,}06\cdot 10^{21}$
2003	$1{,}82\cdot 10^{10}$	$1{,}23\cdot 10^{11}$	$3{,}31\cdot 10^{20}$	$2{,}24\cdot 10^{21}$
…	…			
2015	$7{,}41\cdot 10^{10}$	$3{,}26\cdot 10^{11}$	$5{,}49\cdot 10^{21}$	$2{,}42\cdot 10^{22}$
Суммы	$5{,}25\cdot 10^{11}$	$2{,}78\cdot 10^{12}$	$2{,}35\cdot 10^{22}$	$1{,}17\cdot 10^{23}$

$$a=\frac{n\sum Q_iTC_i-\sum Q_i\sum TC_i}{n\sum Q_i^2-(\sum Q_i)^2}=\frac{15\cdot 1{,}17\cdot 10^{23}-5{,}25\cdot 10^{11}\cdot 2{,}78\cdot 10^{12}}{15\cdot 2{,}35\cdot 10^{22}-(5{,}25\cdot 10^{11})^2}=3{,}78,$$

$$b=\frac{\sum TC_i-a\sum Q_i}{n}=\frac{2{,}78\cdot 10^{12}-3{,}78\cdot 5{,}25\cdot 10^{11}}{15}=5{,}25\cdot 10^{10}.$$

$$TC(Q_S)=3{,}78Q_S+5{,}25\cdot 10^{10}.$$

Компенсируем погрешность с помощью регрессионного анализа в Microsoft Excel и получаем более точные коэффициенты:

$$TC(Q_S)=3{,}78418134790441Q_S+52534489662.$$

Функция издержек зависит от объема предложения, который в свою очередь зависит от цены, и описывается с помощью формулы функции предложения. Поэтому в $TC(Q)$ мы меняем Q на $Q(P)$ и получаем функцию издержек

$$TC(Q_S(P))=3{,}78(1{,}36\cdot 10^{10}P+3{,}33\cdot 10^{10})+5{,}25\cdot 10^{10},$$

$$TC(P)=5{,}14\cdot 10^{10}P+17{,}84\cdot 10^{10}.$$

Напомним, что прибыль – это разница между доходами и издержками: $\pi=TR-TC$. А доход – это сумма, полученная от реализации продукции, т.е. это произведение объема спроса на цену. Таким образом:

$$TR = P \cdot Q(P)$$

$$\pi(P) = P \cdot Q(P) - TC(Q(P))$$

$$\pi(P) = P \cdot (-1,64 \cdot 10^{10} P + 1,27 \cdot 10^{11}) - (5,14 \cdot 10^{10} P + 17,84 \cdot 10^{10})$$

$$\pi(P) = -1,64 \cdot 10^{10} \cdot P^2 + 7,56 \cdot 10^{10} P - 17,84 \cdot 10^{11}$$

Исследуем полученную функцию прибыли на максимум

Производная

$$\pi'(P) = -2 \cdot 1,64 \cdot 10^{10} P + 7,56 \cdot 10^{10}.$$

Находим точку максимума: $P_{\max} \approx 2,31$.

Получив цену, при которой прибыль максимальна, рассчитаем объем спроса и предложения при такой цене:

$$Q_{D\max} \approx 8,91 \cdot 10^{10}$$

$$Q_{S\max} \approx 6,47 \cdot 10^{10}$$

Сравнив полученные результаты для максимизации прибыли, приходим к выводу, что для того чтобы прибыль была максимально возможной, необходимо снизить цены авиабилетов на почти 50%, и соответственно быть вынужденными снизить объем предложения на 30% (полученные результаты схожи со статистическими данными 2004–2005 гг.), но заметим, что в такой ситуации объем спроса превышает объем предложения. Следует также учесть ситуацию с авиакомпанией Трансаэро, до недавнего времени бывшей главным конкурентом Аэрофлота. Трансаэро прекратил свою операционную деятельность в октябре 2015 г., и его банкротство привело к повышению спроса на билеты Аэрофлота. Такую возможность необходимо использовать и попробовать привлечь еще больший поток пассажиров снижением цен, причем незначительным снижением цен, так как пассажирооборот Трансаэро в 2014 г. был в два раза меньше, чем пассажирооборот Аэрофлота, а занятость кресел в Аэрофлоте была равна 78%, т.е. при имеющихся сегодня ценах и объеме предложения Аэрофлоту необходимо заполучить 40% пассажиров Трансаэро и таким образом значительно повысить занятость кресел, что может привести к новой точке равновесия.

Кейс 4. Оптимальное вложение стартового капитала

Кейс предлагался на потоковом этапе мини кейс-чемпионата «Математические модели решения экономических задач», 2015 г.

Четверо молодых людей, окончивших обучение в магистратуре университета, решили объединить свои накопления в стартовый капитал размером 1 млн руб. и выгодно вложить деньги. Они рассматривают три варианта вложения стартового капитала. Выбор варианта на определенный срок означает вложение в него всех имеющихся средств без остатка.

1-й вариант – **«малый» бизнес**: **открыть пиццерию и готовить в ней пиццу «Маргарита»**. Еще при обучении у них появился набросок бизнес-плана. Согласно их подсчетам, необходимо учитывать следующие издержки:

Издержки	Состав издержек	Размер (руб.)	Расчет
Фиксированные	Оборудование, кухня	600 000	1 раз
Годичные	Электроэнергия, вода, аренда, налог	300 000	В конце года
На единицу продукции	Тесто, томаты, сыр, налог (на 1 пиццу)	15	
Заработная плата	Пиццамейкер (11 000 пицц в год)	1000	За 100 пицц
	Другие сотрудники	250 000	За год

В зависимости от спроса можно еще пригласить пиццамейкеров. Имеется возможность закрыть бизнес в конце каждого года, а оборудование продать, причем каждый год оно обесценивается на 4%. По оценкам спрос на продукцию Q_D от цены P каждый следующий год таков:

Номер года	Функция спроса $Q_D(P)$ от цены P
1	$10000 - 16{,}5P$
2	$8000 - 11{,}8P$
3	$8500 - 12{,}8P$
4	$9200 - 14{,}7P$

Составьте функцию прибыли и исследуйте ее на максимум для нахождения оптимальной стоимости единицы товара.

2-й вариант – портфели ценных бумаг. Молодые люди составили таблицу доходности для трех портфелей – А, В, С – ценных бумаг, каждая стоимостью 1 тыс. руб., в зависимости от экономической ситуации в стране, меняющейся каждый год. Их прогноз на ближайшие четыре года таков: первые два года – одинаково «неблагополучные» (ценные бумаги обесцениваются на 5%), третий год – «очень благополучный» (ценные бумаги дорожают на 9%), а четвертый – «благополучный» (дорожают на 6%). Таблица доходности ценных бумаг имеет вид

Портфель	Доходность в год с одной акции (руб.)		
	«неблагополучный»	«благополучный»	«очень благополучный»
А	90,5	133	190
В	132	120	129
С	111	145	166

Акции покупаются минимум на два года, поскольку в случае продажи их через год банк удерживает 25% от первоначальной суммы вложенных средств.

3-й вариант – банковские депозиты.

Самостоятельно исследуйте этот вариант.

Разработайте оптимальный план вложения средств на каждый год (из ближайших четырех) из предложенных выше вариантов. Какую максимальную прибыль получат молодые предприниматели, если каждый год они будут выбирать оптимальный способ размещения своего капитала?

Один из вариантов решения кейса, оформленный в виде презентации, представлен в приложении 1.

Кейс 5. Выгодно ли компании по производству кваса переходить на иностранный рынок?

Кейс предлагался на финальном этапе мини кейс-чемпионата «Математические модели решения экономических задач» 2015 г.

Руководство российской компании X, производящей квас исключительно средствами компании (без закупок сырья) и поставляющей продукт на российский рынок, решает вопрос о необходимости переориентироваться на зарубежные рынки для увеличения прибыли. Для экспорта компании X лучше всего подходит Германия. Это связано как с изменившейся экономической ситуацией и растущей конкуренцией на российском рынке сбыта, так и с личными связями одного из топ-менеджеров.

На данный момент компания реализует свою продукцию по цене 109 руб., оптимальной с точки зрения максимизации прибыли, и при таком уровне цен компания реализует 1 млн единиц продукции в год. Аналитики компании вычислили, что величина спроса на литровые бутылки кваса на немецком рынке будет приблизительно равна 800 тыс. единиц продукции в год, а оптимальная цена за бутылку – 2,4 евро. При этом производственные и транспортные издержки, связанные с переходом на другой рынок, составят всего лишь 1 млн руб. Влияние налогов на деятельность компании приблизительно одинаково при обоих вариантах, за исключением НДС. Спрос на товар меняется в зависимости от экономической ситуации, цена изменяется на величину инфляции. Если руководство решит реализовывать товар в Германии, то сбыт продукции в России придется прекратить.

Выгодно ли будет компании переходить на иностранный рынок? Руководство компании просит оценить размер дисконтированной выручки за ближайшие 5 лет, с учетом прогноза налогов и экспортных/импортных пошлин в двух странах.

Один из вариантов решения кейса, оформленный в виде презентации, представлен в приложении 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие производства, состояние финансовой системы, жесткая конкуренция ведут к тому, что требования к выпускникам экономических вузов с каждым годом становятся все выше. Наряду со специальными знаниями на первый план выходят умения проводить комплексный анализ, систематизировать информацию и принимать оптимальное решение.

Решение экономических кейсов реально помогает синтезировать знания, полученные при изучении различных дисциплин. Выстраиваются междисциплинарные связи, которые в силу их практического применения становятся явственнее и значительнее. Умение использовать математический аппарат при решении экономических вопросов является не только необходимым условием успешной учебы, но и важнейшей характеристикой современного экономиста.

Предлагаемое пособие написано для первокурсников и является начальным этапом в формировании навыков решения кейсов с помощью математических методов. Изучение высшей математики продолжится на втором курсе дисциплинами «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Методы оптимальных решений», аппарат которых особенно важен при анализе экономических ситуаций в условиях неопределенности. На старших курсах будут рассматриваться прикладные вопросы математики. Все это позволит качественнее подходить к решению различных экономических задач, в том числе и кейсов.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Проценты

1.1. **а)** $S_2 = 246$ (тыс. руб.) **б)** $S_{3\frac{2}{3}} \approx 284,33$ (тыс. руб.)

1.2. $S_0 = 0,751880$ (млн руб.)

1.3. $S_3 = 1656,25$ (тыс. руб.)

1.4. **а)** $S_2 = 985,68$ (тыс. руб.)

б) $S_2(4) = 993,904$ (тыс. руб.) **в)** $S_2(12) = 995,863$ (тыс. руб.)
г) $S_2(365) = 996,828$ (тыс. руб.) **д)** $S = 996,861$ (тыс. руб.).

1.5. $x \approx 483,595$ (тыс. руб.)

1.6. Случай без капитализации выгодней:
$S_0(1+0,14\cdot 3) = 1,42S_0 > S_0(1+0,12)^3 = 1,405S_0$.

1.7. Выгоднее оплатить обучение сразу, чем за один семестр, положив остаток на пять месяцев (с сентября по январь) в банк:

$$(360-185)\left(1+\frac{0,09}{12}\right)^5 = 181,66 < 185 \text{ (тыс. руб.)}$$

1.8. $7,7$ (млн руб.) *Указание.* Введем обозначения: S_0 = 5 (млн руб.) – размер кредита; S_i – сумма долга в начале i-го года $(i = 1,...,5)$; $k = 1+0,18$ – коэффициент ежегодного наращения. Равномерное уменьшение долга означает, что ежегодно сумма долга уменьшается на 1 млн руб.

По данным задачи заполним таблицу.

Год	1	2	3	4	5
Долг в начале года S_i	5	4	3	2	1
Долг в конце года $1,18\cdot S_i$	5,9	4,72	3,54	2,36	1,18
Выплата банку $1,18\cdot S_i - S_{i+1}$	1,9	1,72	1,54	1,36	1,18

Общая сумма выплат за пять лет получается суммированием значений в последней строке таблицы: $1,9+1,72+1,54+1,36+1,18 = 7,7$.

1.12. *Указание.* Подсчитывая необходимые траты в месяц, обязательно учтите расходы на питание, коммунальные платежи, транспортные расходы и связь, а также непредвиденные расходы (примерно 5 тыс. руб.).

2. Графики функций в экономике

2.1. *Указание.* Имеем: $\frac{1}{4}P-5=22-P,$ откуда $P_0=21,6$. Подставляя в первую функцию, находим $Q_0=0,4$.

2.2. $y=0,6x-1057,5$.

3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

3.1. $E_{S,P}(1,5)\approx 0,3478$. Предложение неэластично.

3.2. $E_{D,P}(50)=-\frac{1}{3}$. Спрос неэластичен и уменьшение цены не приведет к значительному увеличению продаж.

3.3. $E_{D,P}(159)=-\frac{2650}{149}$. Спрос эластичен. Поэтому даже незначительное повышение цены приведет к резкому снижению объема продаж. При этом валовый доход уменьшится.

3.4. $P\in(21;42)$.

3.5. $\Delta P\approx 0,967$.

Указание. Найдем равновесную цену, решая уравнение $\frac{1290}{9+P}=10+\ln\frac{P}{120}$. Данное уравнение удобно решить подбором корня. Несложно увидеть, что $P=120$ является корнем уравнения. Так как при $P>0$ функция спроса убывает ($Q'_D=-\frac{1290}{(9+P)^2}<0$), а функция предложения возрастает ($Q'_S=\frac{1}{P}>0$), уравнение имеет единственный корень. Следовательно, найдена равновесная цена.

3.6. $0,611625$ (тыс. руб.).

Указание. Методом наименьших квадратов (см. параграф 2) найдем выражение, задающее функцию предложения: $Q_S=1,2P+6,4$. Из условия $Q_D=Q_S$ находим точку рыночного равновесия $P_0=1,5$.

Таким образом, сумма налога на каждую тонну составит $\frac{1,5\cdot 5}{100}=0,075$. При этом $Q_0=8,2$. После введения налога функция предложения будет иметь вид: $Q_S=1,2(P-0,075)+6,4=1,2P+6,31$. Пересчитав равновесную цену, получим $10-1,2P_1=1,2P_1+6,31,\ P_1=1,5375,\ Q_1=10-1,2\cdot 1,5375=8,155$.

Таким образом, общая сумма налога составит $0,611625$. Найдем распределение налогового бремени. Для того чтобы воспользоваться графическими представлениями, найдем значение цены при предложении $Q=8,155$: $8,155=1,2P+6,4$, $P=1,4625$.

Тогда распределение налогового бремени между покупателем и продавцом будет $\frac{1,5375-1,5}{1,5-1,4625}=\frac{0,0375}{0,0375}=1$, т.е. в данном случае бремя распределится между производителем и покупателем поровну.

Заметим, что такое же значение получится, если воспользоваться формулой $-\frac{Q_S'(P_0)}{Q_D'(P_0)}\approx-\frac{1,2}{-1,2}=1$.

3.7. Увеличится на 12,5. *Указание.* Преобразуем правую часть формулы $\frac{\Delta P}{T-\Delta P}=-\frac{Q_S'(P_0)}{Q_D'(P_0)}$. $-\frac{Q_S'(P_0)}{Q_D'(P_0)}=-\frac{\frac{Q_S'(P_0)}{Q_S(P_0)}\cdot P_0}{\frac{Q_S'(P_0)}{Q_S(P_0)}\cdot P}=-\frac{E_{S,P}(P_0)}{E_{D,P}(P_0)}$, так как $Q_D(P_0)=Q_S(P_0)$.

Далее получим $\frac{\Delta P}{T-\Delta P}=-\frac{E_{S,P}(P_0)}{E_{D,P}(P_0)}=\frac{5}{3}$.

Учитывая, что $T=20$ у.е., получим $\Delta P=12,5$ у.е.

3.8. $Q=25,5$, $P=57,5$.

Указание. Так как фирма является монополистом, объем производства находится как функция, обратная функции спроса: $P=100-\frac{5}{3}Q$. Тогда общий доход находится по формуле: $TR=Q\cdot P(Q)=100Q-\frac{5}{3}Q^2$.

3.9. В результате вмешательства государства в деятельность монополии фирма теряет: $\Delta\pi=78-(-69)=147$ фунтов стерлингов. В данном случае фирма может добиваться дотаций от государства. Спрос при данной цене эластичен, поэтому если компания еще незначительно понизит цену, то это может привести к росту продаж и выручки.

3.10. При введении налога производство автомобилей уменьшится вдвое.

3.11. Проект выгоден.

Указание. Решая уравнение $Q^3-220Q^2+3Q+440370=0$ с помощью любой из программ компьютерной математики, находим $Q=210$.

Так как в условиях конкурентного рынка предельный доход равен среднему доходу и цене, $P=666,66$. $TR=P\cdot Q=139998,6$; $TC=112248,6$, $\pi=27750$.

$$PDV=\sum_{n=1}^{5}\frac{27750}{(1+0.3)^n}\approx 67587,06.$$

3.12. $t_0=\frac{1}{\sqrt{(3\cdot 0,09)^3}}\approx 2,25$.

3.13. Несмотря на аренду помещения, второй вариант размещения средств выгоднее. Следует помнить, что в первом варианте деньги будут в сентябре третьего года, а во втором варианте в декабре. *Указание.* Составим функцию общих издержек: $TC = 0,8Q + 0,6Q + 50 + 240 \cdot 5 + 200 = 1,4Q + 1450$, при этом $TR = PQ = 32Q - 0,05Q^2$. Тогда $\pi = TR - TC = -0,05Q^2 + 30,6Q - 1450$, $\pi' = -0,1Q^2 + 30,6$. Отсюда $Q = 306$ тонн. Таким образом, максимальная прибыль будет достигнута при сборе 306 тонн яблок. Значит, предпринимателю действительно имеет смысл открывать дополнительно перерабатывающее производство. Прибыль $\pi(306) = 3231,8$ тыс. руб.

Рассмотрим два варианта вложения денег на счет. Продажа яблок сразу после сбора и внесение прибыли на счет:

$(3231,8 \cdot 1,09 + 3231,8) \cdot 1,09 + 3231,8 = 10594,16358$ тыс. руб.

Найдем оптимальную цену на момент сбора урожая, так как цена яблок в декабре возрастет в 1,5 раза, следовательно, прибыль возрастет также и станет $\pi_1 = 4847,7$. Учитывая аренду складского помещения, получим $\pi_1 = 4847,7 - 4 \cdot 10 = 4807,7$ тыс. руб. Положив эту сумму также под 9% годовых, получим $(4807,7 \cdot 1,09 + 4807,7) \cdot 1,09 + 4807,7 = 15760,12137$ тыс. руб.

3.14. Начиная с $L = \ln 200 \approx 5,3$, действует закон убывающей производительности, поэтому оптимальным будет нанять только два дополнительных работника.

4. Интегралы

4.1. $Q^2 + Q^3 + 2e^{0,5Q} + 1$ (млн руб.), $Q^2 + Q^3 + 2e^{0,5Q} - 9$ (млн руб.), $Q + Q^2 + \dfrac{2}{Q}e^{0,5Q} + \dfrac{1}{Q}$ (млн руб.)

4.2. $2,5e^{10} + 807,5 = 55,8733$ (млн руб.)

4.3. $50000Q - \dfrac{20}{3}Q^3$, $\pi(Q) = -\dfrac{20}{3}Q^3 - 200Q^2 + 48000Q - 20$, $AR(40) \approx 39333$ руб.

Указание. Критические точки функции прибыли определить из условия $\pi'(Q) = 0$: $Q^2 + 20Q - 24000 = 0$.

4.4. $Tr(Q) = 10\ln\dfrac{Q+2}{2}$, $Tr(100) \approx 39,318256$ (млн руб.)

4.5. $G_1 = 1 - 2\int\limits_0^1 (0,36x^2 + 0,64x)dx = 1 - 2\left(0,12x^3 + 0,32x\right)\Big|_0^1 = 1 - 2 \cdot 0,44 = 0,12;$

$$G_2 = 1 - 2\int\limits_0^1 (0,24x^2 + 0,76x)dx = 1 - 2\left(0,08x^3 + 0,38x\right)\Big|_0^1 = 1 - 2 \cdot 0,46 = 0,08;$$

$$G_3 = 1 - 2\int\limits_0^1 (0,27x^2 + 0,73x)dx = 1 - 2\left(0,09x^3 + 0,365x\right)\Big|_0^1 = 1 - 2 \cdot 0,455 = 0,09.$$

Наиболее равномерное распределение доходов наблюдается во второй провинции.

4.6. $CS=\int\limits_{P_0}^{P_{\max}} Q_D(P)dP=\int\limits_{200}^{400}(400-P)dP=\left(400P-0,5P^2\right)\Big|_{200}^{400}=20000$ руб.;

$$PS=\int\limits_{P_{\min}}^{P_0} Q_S(P)dP=\int\limits_{100}^{200}(2P-200)dP=\left(P^2-200P\right)\Big|_{100}^{200}=10000 \text{ руб.}$$

4.7. 29 ед. продукции.

4.8. 17500ln9 = 38451,43 руб.

Указание. Стоимость перевозки 1 т продукции на 800 км:

$$P_1=\int\limits_0^{800}\frac{50}{s+100}ds=50\ln(s+100)\Big|_0^{800}=50(\ln 900-\ln 100)=50\ln 9.$$

4.9. $588,060$ тыс. руб.

4.10. 52 ед. продукции.

Указание. Если $Q(t)-$ зависимость произведенного оборудования от времени *t*, то $Q(0)=4,\ Q(T)=4\cdot e^{0,05T}$.

Тогда за 10 лет: $Q_{10}=\int\limits_0^{10}4\cdot e^{0,05t}dt=4\dfrac{e^{0,05t}}{0,05}\Big|_0^{10}=80(e^{0,5}-1)\approx 80\cdot 0,65=52.$

4.11. ≈ 35250 тыс. руб.

4.12. $\approx 1,0234$.

Указание. Изменение силы роста: $\delta(t)=0,09+0,02t,\ t\in[0;1]$.

За квартал $e^{\int\limits_0^{0,25}(0,09+0,02t)dt}=e^{\left(0,09t+0,01t^2\right)\Big|_0^{0,25}}=e^{0,023125}$.

4.13. **а)** $\delta(t)=0,08+0,05t,\ t\in[0;5]$,

$e^{\int\limits_0^{5}(0,08+0,05t)dt}=e^{\left(0,08t+0,025t^2\right)\Big|_0^{5}}=e^{1,025}\approx 2,7871;$ **б)** $\delta(t)=0,08\cdot 1,2^t,\ t\in[0;5]$,

$e^{\int\limits_0^{5}0,08\cdot 1,2^t dt}=e^{0,08\frac{1,2^t}{\ln 1,2}\Big|_0^5}\approx e^{0,65306}\approx 1,9214.$

4.14. **а)** $S_0=\int\limits_0^2 t\cdot e^{-0,05t}dt=\begin{bmatrix} u=t\Rightarrow & du=dt \\ dv=e^{-0,05t}dt\Rightarrow & v=-20e^{-0,05t}\end{bmatrix}=$

$=-20\left(t\cdot e^{-0,05t}\Big|_0^2-\int\limits_0^2 e^{-0,05t}dt\right)=\ 400-\dfrac{440}{e^{0,1}}\approx 1$ млн $871,2$ тыс. руб.;

б) $S_0=\int\limits_0^3 t\cdot e^{-0,04t}dt=-25\left(t\cdot e^{-0,04t}\Big|_0^3-\int\limits_0^3 e^{-0,04t}dt\right)=625-\dfrac{700}{e^{0,12}}\approx$

≈ 4 млн $155,8$ тыс. руб.; **в)** $S_0=\int\limits_0^5 t\cdot e^{-0,02t}dt=-50\left(t\cdot e^{-0,02t}\Big|_0^5-\int\limits_0^5 e^{-0,02t}dt\right)=$

$=2500-\dfrac{2750}{e^{0,1}}\approx 11$ млн 659 тыс. руб.

4.15. Дисконтированное значение $S_0 = \int\limits_0^3 (10+t)\cdot e^{-0,08t}dt =$

$$= \begin{bmatrix} u = 10+t \Rightarrow & du = dt \\ dv = e^{-0,08t}dt \Rightarrow & v = -12,5e^{-0,08t} \end{bmatrix} = -12,5\left((10+t)\cdot e^{-0,08t}\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 e^{-0,08t}dt \right) =$$

$= 281,25 - \dfrac{318,75}{e^{0,24}} \approx 30$ млрд 512,5 млн руб.

Наращенное значение $S_3 = S_0 \cdot e^{0,24} = 30,5125 \cdot e^{0,24} \approx 38$ млрд 789 млн руб.

5. Ряды

5.1. На счет необходимо положить не менее 5 млн руб.

5.2. 50 тыс. руб.

5.3. 1) $\dfrac{3}{0,11} \approx 27,273$ млн руб.; 2) $\dfrac{1,2}{0,11} + \dfrac{0,2}{0,11^2} \approx 27,438$ млн руб.; 3) $\dfrac{R}{r-q} = \dfrac{1}{0,11-0,07} = 25$ млн руб. Второй вариант выгоднее.

6. Дифференциальные уравнения

6.1. 1,88%.

Указание. Решение задачи Коши для уравнения естественного роста с начальным условием $y(t_0) = y_0$ имеет вид $y = y_0 e^{k(t-t_0)}$. Из условия $t - t_0 = 1$ (год) найти $k = \ln 1,25$ и подставить в общее решение для $t - t_0 = \dfrac{1}{12}$.

6.2. $Q_D(P) = 2\sqrt{\dfrac{50}{P}}$.

Указание. Решить задачу Коши $\dfrac{P}{Q_D(P)} \cdot Q_D'(P) = -0,5;\ Q_D(50) = 2000$.

6.3. $Q_D(P) = 100 - P$.

Указание. Решить задачу Коши.

6.4. $Q_D(P) = 4 - 0,1P$.

Указание. Решить задачу Коши $P \cdot Q_D'(P) = Q_D - 100;$ $Q_D(90) = 10.$ $\dfrac{Q_D'(P)}{Q_D} = \dfrac{1}{P-40};\quad Q_D(10) = 3$.

6.5. $Q = 4\operatorname{tg}2t$.

Указание. Исходя из функции прибыли

$$\pi(Q) = P\cdot Q - C = \; = (20+Q)Q - 20Q + 16 = Q^2 + 16,$$

решить уравнение с разделяющимися переменными $Q' = 0,5\left(Q^2 + 16\right)$. Начальное условие: $Q(0) = 0$.

6.6. Тенденция поведения равновесной цены стратегической продукции описывается функцией $P(t)=5-2e^{-10t}$, т.е. с течением времени цена сходится к максимальному значению $P_{\max}=5$ млн долл. США.

Указание. По данным маркетологов, $600-100P=150+50P$; $P_0=3$ млн долл. США. Равновесную цену по скорректированным прогнозам найти из линейного уравнения 1-го порядка: $700-40P-3P'=350+30P+2P'$; $P'+14P=70$. Начальное условие для этапа влияния экономических санкций принять в виде $P(0)=3$.

7. Функции нескольких переменных

7.1. $Q'_K=\dfrac{L^3\cdot 5^K\cdot\ln 5}{\left(1+5^K\right)^2}\approx 20{,}6$; $Q'_L=\dfrac{3\cdot L^2\cdot 5^K}{1+5^K}\approx 30000$;

$\mathrm{MRS}_{LK}=\dfrac{3\cdot\left(1+5^K\right)}{L\ln 5}\approx 1456{,}3$; $E_{QK}=\dfrac{K\cdot\ln 5}{1+5^K}\approx 0{,}0001$; $E_{QL}=\dfrac{3\cdot L^2\cdot 5^K}{1+5^K}\cdot\dfrac{1+5^K}{L^3\cdot 5^K}\cdot L=3$.

7.2. Набор $(3;8)$ является самым дешевым.

Указание.

$U'_{x_1}=\dfrac{34}{5}x_1^{-\frac{3}{5}}x_2^{\frac{3}{5}}$; $U'_{x_2}=\dfrac{51}{5}x_1^{\frac{2}{5}}x_2^{-\frac{2}{5}}$;

$\mathrm{MRS}_{x_1x_2}=\dfrac{2x_1}{3x_2}$, $\mathrm{MRS}_{x_1x_2}(1;6)=4$ и $\mathrm{MRS}_{x_1x_2}(3;8)=\dfrac{1}{4}$.

Известно, что набор из двух товаров (x_1,x_2) оптимален, когда $\mathrm{MRS}_{x_1,x_2}=\dfrac{P_1}{P_2}$. В нашем случае $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{1}{4}$, следовательно, план выпуска $(3,8)$ является оптимальным.

7.3. $\pi_{\max}(150;90)=85050$ у.е.

Указание. Чтобы составить функцию прибыли, сначала необходимо выразить цены на рынках через объемы продаж: $P_1=630-\dfrac{1}{2}Q_1$, $P_2=840-2Q_2$.

Функция прибыли:

$$\pi\left(Q_1,Q_2\right)=P_1Q_1+P_2Q_2-C\left(Q_1+Q_2\right)=$$

$$=-\frac{3}{2}Q_1^2-3Q_2^2-2Q_1Q_2+630\cdot Q_1+840\cdot Q_2.$$

Вычислим частные производные функции прибыли и, приравняв их к нулю, найдем стационарные точки:

$$\pi'_{Q_1}=-3Q_1-2Q_2+630=0,\quad \pi'_{Q_2}=-6Q_2-2Q_1+840=0.$$

Отсюда $Q_1=150$ тыс. ед. и $Q_2=90$ тыс. ед. При таких объемах продаж прибыль составит $\pi(150;90)=85050$ у.е. Производные второго порядка:

$\pi''_{Q_1Q_1} = -3$, $\pi''_{Q_2Q_2} = -2$, $\pi''_{Q_1Q_2} = -6$; следовательно, второй дифференциал – отрицательно определенная квадратичная форма, значит, найденная точка $(150;90)$ является точкой максимума.

7.4. $\pi_{\max}(1,6;1,15) \approx 43000$ руб.

Указание: использовать алгоритм примера 4. **7.5**. *Ответ:* Увы, Ивану Петровичу не стоит «открывать дело»!

Указание. Функция дохода и уравнение связи: $R(Q_1, Q_2) = 10 \cdot Q_1 + 2 \cdot Q_2$ и $Q_1^2 + Q_2^2 = 104$. Составим функцию Лагранжа и найдем ее частные производные:

$L(Q_1, Q_2, \lambda) = 10 \cdot Q_1 + 2 \cdot Q_2 + \lambda \cdot (Q_1^2 + Q_2^2 - 104)$; $L'_{Q_1} = 10 + \lambda \cdot 8Q_1$, $L'_{Q_2} = 2 + \lambda \cdot 2Q_2$ и $L'_{\lambda} = Q_1^2 + Q_2^2 - 104$.

Стационарные точки функции Лагранжа: $M_1(10;2;-0,5)$ и $M_2(-10;-2;0,5)$. Очевидно, что $M_1(10;2)$ – точка условного максимума и дает оптимальный план производства. Подставим найденные значения $Q_1 = 10$ и $Q_2 = 2$ в функцию дохода и вычтем издержки для вычисления прибыли: $\pi(Q_1, Q_2) = 10 \cdot 10 + 2 \cdot 2 - 104 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багиев Г.Л., Наумов В.Н.* Руководство к практическим занятиям по маркетингу с использованием кейс-метода: электронный учебник. URL: http://ecsocman.hse.ru/text/19169064.html (дата обращения: 10.10.2016).
2. *Борцова Т.В., Денежкина И.Е., Попов В.А.* Математический анализ. Ч. 3. Интегральное исчисление: учебное пособие для подготовки бакалавров / под ред. В.Б. Гисина и Е.Н. Орла. – М.: Финансовый университет, 2013.
3. *Гончаренко В.М., Свирщевский С.Р.* Математический анализ. Ч. 5. Ряды. Ч. 6. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для подготовки бакалавров / под ред. В.Б. Гисина и Е.Н. Орла. – М.: Финансовый университет, 2013.
4. *Долгоруков А.М.* Метод case-study как современная технология профессионально ориентированного обучения. URL: http://www.evolkov.net/case/case.study.html (дата обращения: 10.10.2016).
5. *Жукова Г.С., Никитина Н.И., Комарова Е.В.* Технологии профессионально ориентированного обучения: учебное пособие. – М.: Издательство РГСУ, 2012.
6. *Зайцев М.Г., Варюхин С.Е.* Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: учебное пособие. 2-е изд., испр. – М.: Дело, 2008.
7. *Иванов О.В.* Статистика: учебный курс для социологов и менеджеров. Ч. 2. Доверительные интервалы: проверка гипотез: методы и их применение. – М., 2005.
8. *Кононенко А.М., Клетанина М.П.* Исследование проблемы пригородных электричек с помощью двойственной задачи линейного программирования // Материалы Всероссийской научно-методической конференции «Современная математика и концепции инновационного математического образования». – М.: МФО, 2015. С. 190–195.

9. *Кумыков А.М., Максимов Н.А.* Методы линейной оптимизации в размещении персональных вкладов // Материалы Всероссийской научно-методической конференции «Современная математика и концепции инновационного математического образования». – М.: МФО, 2015. С. 210–216.

10. *Липагина Л.В.* Математический анализ. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учебное пособие для подготовки бакалавров / под ред. В.Б. Гисина и Е.Н. Орла. – М.: Финансовый университет, 2013.

11. *Макарова А.А.* Принципы отбора статистических данных для анализа деятельности компании ОАО «Аэрофлот – российские авиалинии» // Материалы Международной научно-методической конференции «Современная математика и концепции инновационного математического образования». – М.: МФО, 2016. С. 349–355.

12. Методы оптимальных решений в экономике и финансах: учебник / под ред. В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова – М.: КноРус, 2013.

13. Микроэкономика: практический подход (Managerial Economics): учебник / под ред. А.Г. Грязновой и А.Ю. Юданова. 4-е изд., перераб. и доп. М.: КноРус, 2008.

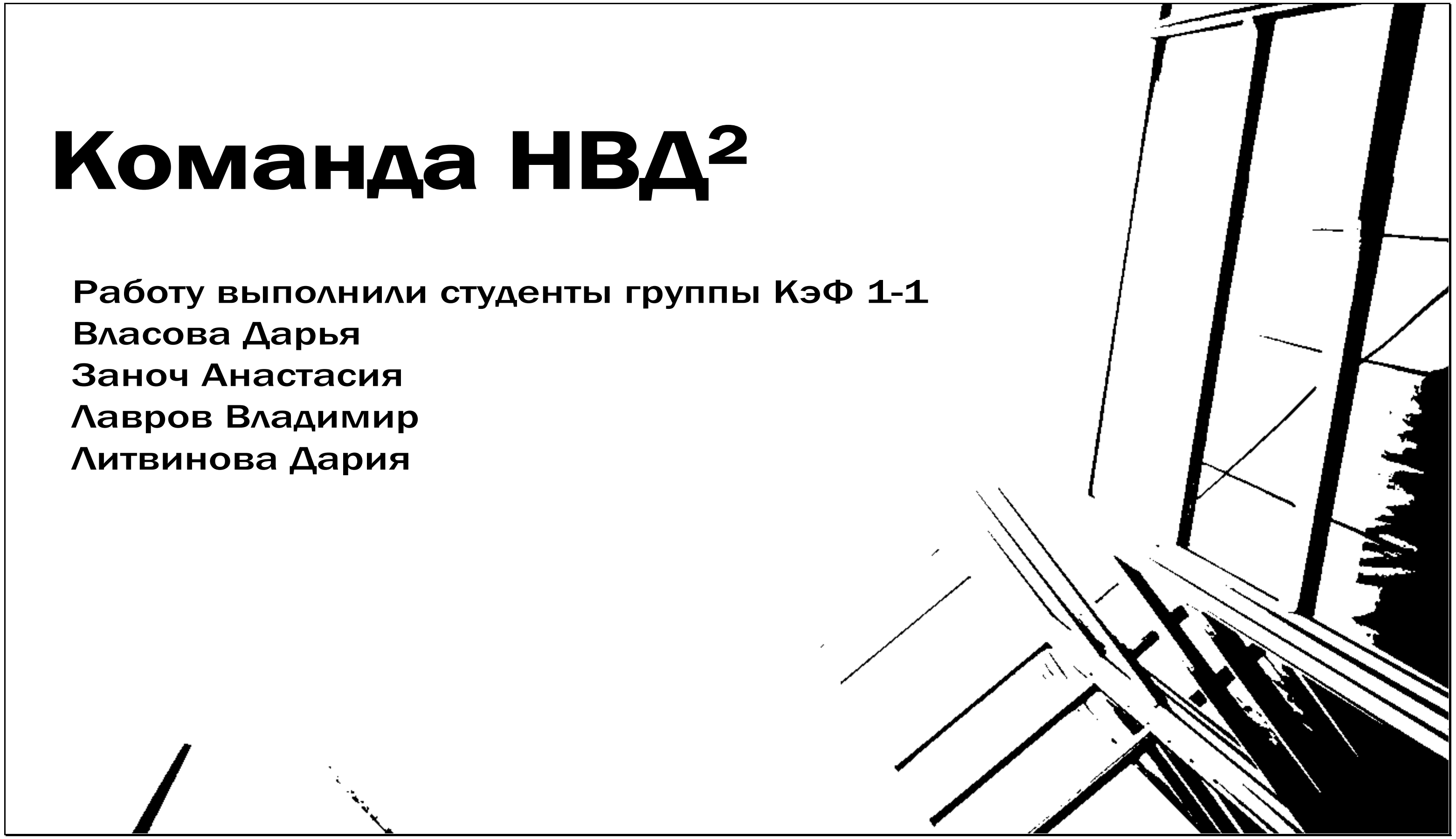
14. Ситуационный анализ, или анатомия кейс-метода / под ред. Ю.П. Сурмина. – Киев: Центр инноваций и развития, 2002.

15. *Ягодовский П.В.* Математический анализ. Ч. 4. Функции нескольких переменных: учебное пособие для подготовки бакалавров / под ред. В.Б. Гисина и Е.Н. Орла. – М.: Финансовый университет, 2013.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

1. URL: http://caseportal.ucoz.ru (дата обращения: 10.10.2016).
2. URL: http://www.casemethod.ru/ (дата обращения: 10.10.2016).
3. URL: http://changellenge.com/ (дата обращения: 10.10.2016).
4. URL: https://vk.com/consultingclub (дата обращения: 10.10.2016).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1




Условие Кейс-Задачи:
1.000.000 рублей
Срок- 4 года
МАЛЫЙ БИЗНЕС
АКЦИИ
ВКЛАД В БАНК

Данные по ведению Малого Бизнеса

Годы	Qd	π=QdP-1150000-25Qd	π`	Pmax	Qd	Qd конечное для π	π
1	10000-16,5P	-16,5P^2+9587,5P-1400000	-33P+9587,5	290,53	5206	9587,5	-7270,36
2	8000-11,8P	-11,8P^2+7705P-1350000	-23,6P+7705	326,48	4148	7705	-92224,05
3	8500-12,8P	-12,8P^2+8180P-1362500	-25,6P+8180	319,53	4410	8180	-55617,19
4	9200-14,7P	-14,7P^2+8832,5P-1380000	-29,4P+8832,5	300,43	4784	8830,5	-53247,34

Годы работы в МБ	Капитал
1	[redacted]
2	483775,9534
3	520382,8125
4	522752,6573
1+2	1052505,594
1+3	1089112,453
1+4	[redacted]
2+3	1004158,766
2+4	1006528,611
3+4	1043135,47
1+2+3	[redacted]
2+3+4	1526911,423
1+2+3+4	[redacted]

Коэффициент снижения цены оборудования	
После 1 года использования	0,96
После 2 лет использования	0,92
После 3 лет использования	0,88
После 4 лет использования	0,84

Продажа оборудования	
После 1 года использования	576000
После 2 лет использования	552000
После 3 лет использования	528000
После 4 лет использования	504000

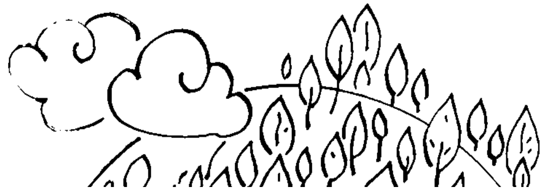
Издержки			
Постоянные		Переменные	
Оборудование (платится 1 раз)	600000	На 1 пиццу (включая продукты и работу пиццмейкеров)	25
Годичные	300000		
Годичные з/п	250000		

Данные По Доходности Акций

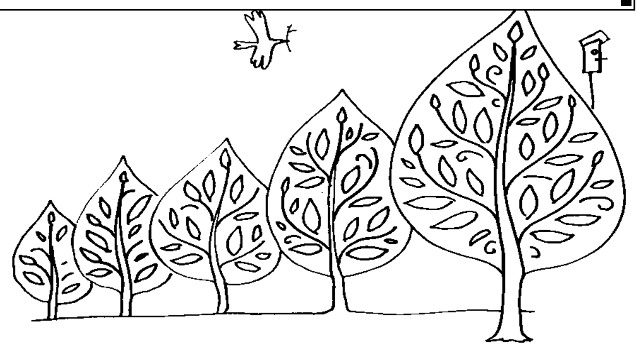
	ВЛОЖЕНИЕ ДЕНЕГ В АКЦИИ						ВЛОЖЕНИЕ ДЕНЕГ В АКЦИИ					
	КАПИТАЛ	ЦЕНА ПОКУПКИ АКЦИИ	ЦЕНА ПРОДАЖИ АКЦИИ	ДИВИДЕНТЫ	КОЛИЧЕСТВО АКЦИЙ	ДОХОД С ДИВИДЕНТОВ	СТОИМОСТЬ ПАКЕТА АКЦИЙ	ДОХОД	ЧИСТАЯ ПРИБЫЛЬ	ПРИБЫЛЬ В %	ДОХОД В %	ПАКЕТ
ФОРМУЛЫ					капитал/цена 1 акции	дивиденты * кол-во акций	цена продажи * кол-во акций	**дивиденты + акции**	доход - капитал	чистая прибыль/капитал* 100	доход / капитал * 100	
1 год	1000000	1000	950	90,5	1000	90500	950000	**1040500**	40500	4,05	104,05	A
	1000000	1000	950	132	1000	132000	950000	1082000	82000	8,2	108,2	B
	1000000	1000	950	111	1000	111000	950000	**1061000**	61000	6,1	106,1	C
2 год	1000000	950	902,5	90,5	1052	95206	949430	**1044636**	44636	4,4636	104,4636	A
	1000000	950	902,5	132	1052	138864	949430	1088294	88294	8,8294	108,8294	B
	1000000	950	902,5	111	1052	116772	949430	**1066202**	66202	6,6202	106,6202	C
3 год	1000000	902,5	983,725	190	1108	210520	1089967,3	1300487,3	300487,3	30,04873	130,04873	A
	1000000	902,5	983,725	129	1108	142932	1089967,3	**1232899,3**	232899,3	23,28993	123,28993	B
	1000000	902,5	983,725	166	1108	183928	1089967,3	**1273895,3**	273895,3	27,38953	127,38953	C
4 год	1000000	983,725	1072,26025	133	1016	135128	1089416,414	**1224544,414**	224544,414	22,4544414	122,454441	A
	1000000	983,725	1072,26025	120	1016	121920	1089416,414	**1211336,414**	211336,414	21,1336414	121,133641	B
	1000000	983,725	1072,26025	145	1016	147320	1089416,414	1236736,414	236736,414	23,6736414	123,673641	C
1 + 2 год	1040500	950	902,5	90,5	1095	99097,5	988237,5	**1087335**	46835	4,501201346	104,501201	A
	1082000	950	902,5	132	1138	150216	1027045	**1177261**	95261	8,804158965	108,804159	B
	1061000	950	902,5	111	1116	123876	1007190	**1131066**	70066	6,603770028	106,60377	C
1 + 2 + 3 год	1087335	902,5	983,725	190	1204	228760	1184404,9	**1413164,9**	325829,9	29,96591667	129,965917	A
	1177261	902,5	983,725	129	1304	168216	1282777,4	**1450993,4**	273732,4	23,25163239	123,251632	B
	1131066	902,5	983,725	166	1253	207998	1232607,425	**1440605,425**	309539,425	27,36705241	127,367052	C

Лист1 Лист2 Лист3

Расчет дохода от вложения средств в Сбербанк России



1 год	1 000 000	0,089	1089000
2 год	1 089 000	0,089	1185921
3 год	1 185 921	0,093	1296211,653
4 год	1 296 212	3 год +1 год	1411574,49



Процентная ставка рассчитана по формуле – $\frac{n\%}{100}$

В данной таблице расчеты за несколько лет, например, за 2 и 3 года, приняты за 2 года

Выводы из подсчетов

ДОХОД

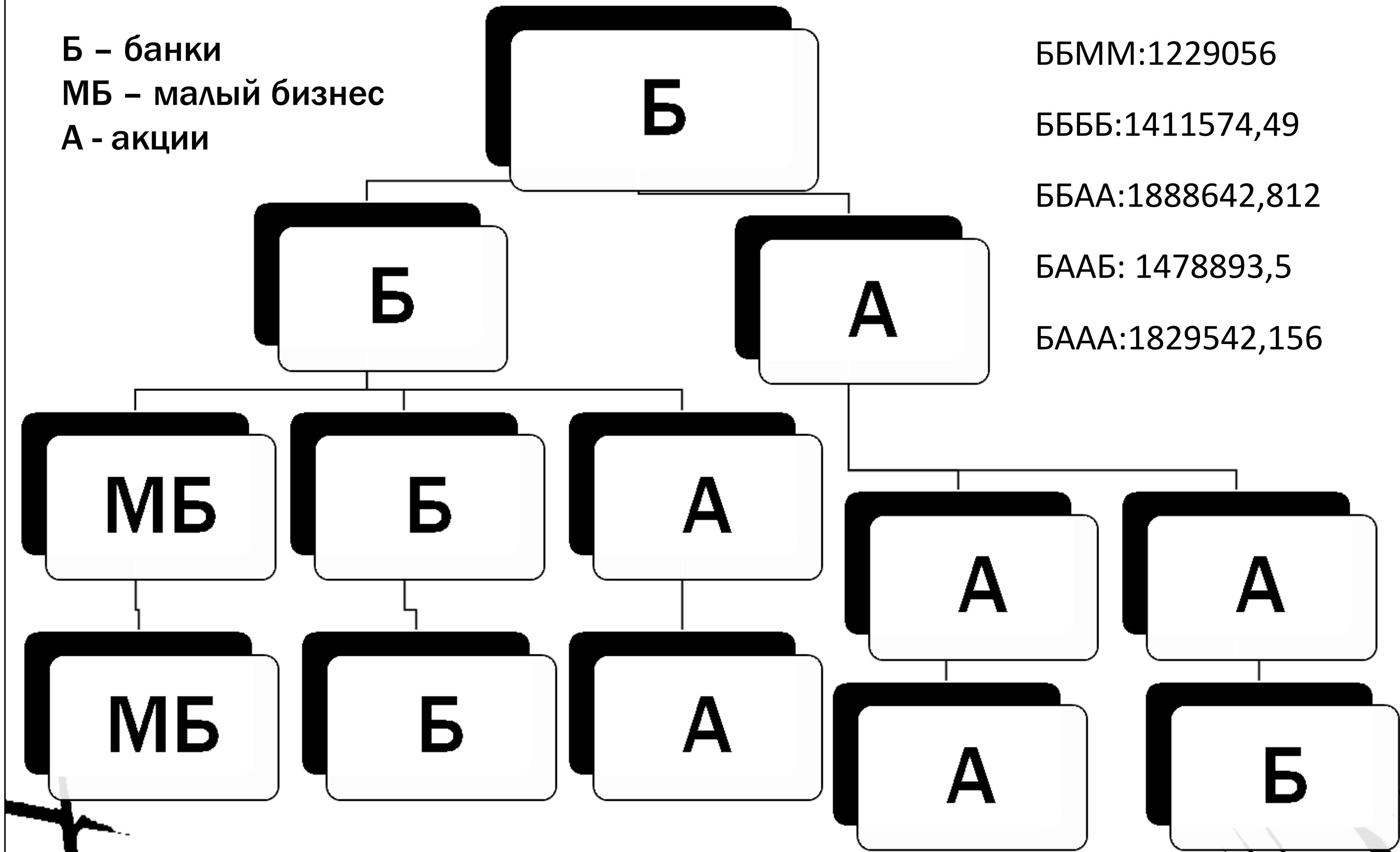
ОТНОШЕНИЕ ДОХОДА К КАПИТАЛУ

ЧИСТАЯ ПРИБЫЛЬ

- В малом бизнесе нужно находиться не менее года для получения прибыли;
- Вклад денег в акции на срок менее 2 лет приносит только убытки;
- Первоначальное вложение денег в производство пиццы создаст отрицательную прибыль, что в свою очередь приведет к закрытию предприятия;

1 год – вклад в банк

Б – банки
МБ – малый бизнес
А - акции



ББММ:1229056

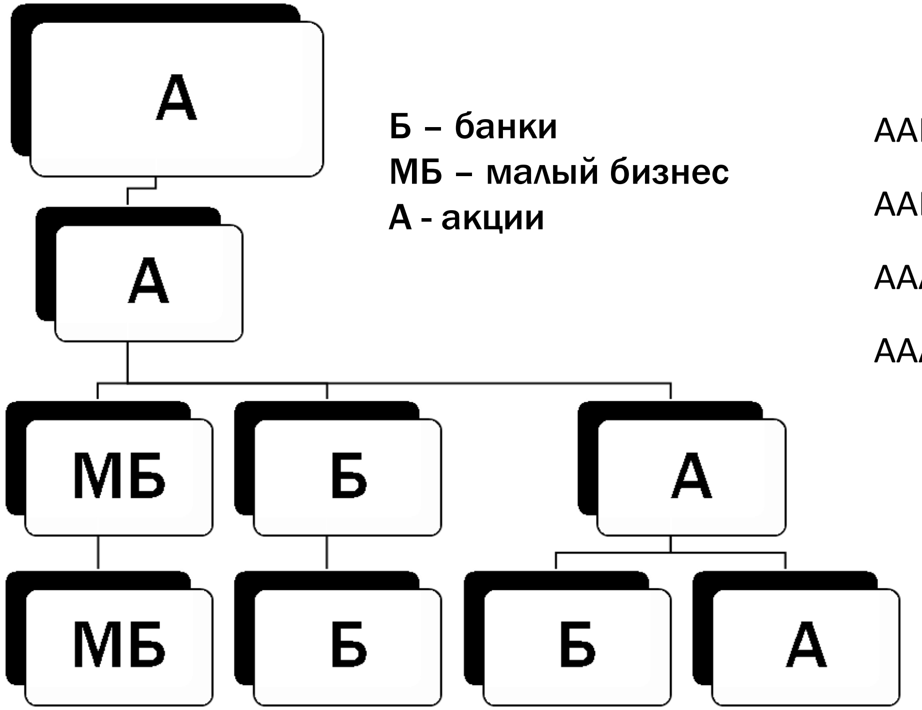
ББББ:1411574,49

ББАА:1888642,812

БААБ: 1478893,5

БААА:1829542,156

1 год – вклад в акции



Б – банки
МБ – малый бизнес
А - акции

ААММ:1220396

ААББ:1401266,691

АААА:1782069,006

АААБ:1580066

Наилучшее решение

	За 1 год	II год	III год	IV год	ИТОГ за 4 года
МБ	568 729				
Банк	1 089 000			*1,089	1 610 514
Акции	858 200	(в пакет "А")=1 478 893			
		(в пакет "С")=1 829 542			1 829 542
		За 2 года			
МБ		1 052 505	+43 135		1 229 056
Банк		1 185 921			
Акции		1 177 261	(в пакет "А")=1 888 642		1 888 642
			За 3 года		
МБ			1 572 888		
Банк			1 296 211	*1,089	1 712 875
Акции	1450993		1 450 993		
				За 4 год	
МБ				2 095 641	2 095 641
Банк				1 411 574	1 411 574

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Executive summary | Поиск данных для расчётов - 1 | Поиск расчётного курса € | Поиск данных для расчётов - 2 | Расчёты | Анализ данных | Заключение

Наша команда рассчитала размер дисконтированной выручки на ближайшие 5 лет в обеих странах

Мы пришли к выводу, что прибыль компании находится на приблизительно одинаковом уровне как при поставках в Германию, так и при нахождении на внутреннем рынке

Размер дисконтированной выручки на ближайшие 5 лет

2014	2015	2016	2017	2018	2019
Россия	94127806,563	109327218,000	111076453,488	113297982,558	115903836,157
Германия	119405351,833	124378311,120	126380801,929	128137495,076	129418870,027

Дисконтированная прибыль компании в различных странах

Таким образом, компании К необходимо оставаться на отечественном рынке

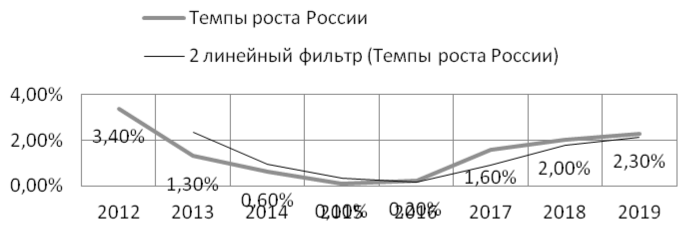
Executive summary | Поиск данных для расчётов - 1 | Поиск расчётного курса € | Поиск данных для расчётов - 2 | Расчёты | Анализ данных | Заключение

Для поиска данных об экономическом росте и прогнозов изменения цен мы использовали фактические прогнозные данные инфляции

Инфляция в России

Инфляция в Германии

Темпы экономического роста России



Темпы экономического роста Германии

Для составления оптимального плана решения мы рассчитали «граничный» курс €, при котором прибыль на российском и немецком рынках эквивалентна

Граничный курс € составляет:
67, 443 руб.

На этом основании делаем вывод:

50≤ € <67, 443	-Выгодно оставаться на внутреннем рынке
67, 443 < € ≤ 80	-Выгодно переходить на зарубежный рынок

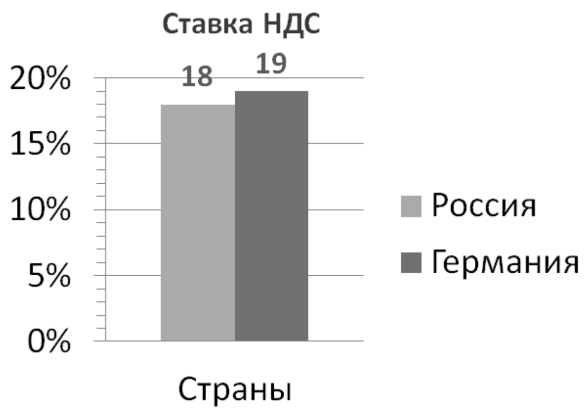
Следует отметить, что для принятия окончательного решения в своих расчётах мы использовали реальный курс € ЦБ РФ по состоянию на 2.04.15

EUR 1 = 62,75 RUB

по курсу ЦБ РФ на 02.04.2015

Executive summary | Поиск данных для расчётов - 1 | Поиск расчётного курса € | Поиск данных для расчётов - 2 | Расчёты | Анализ данных | Заключение

На данном этапе мы собрали необходимые данные для проведения расчётов



Экспортная пошлина в России равна 0%
Таможенная пошлина в Германии составляет 15 %

Налог на прибыль в РФ составляет 20% с 2009 года.

Проект федерального закона
N 594724-6
"О внесении изменений и дополнений в федеральный закон "Об основах государственного регулирования торговой деятельности в Российской Федерации"

Executive summary | Поиск данных для расчётов - 1 | Поиск расчётного курса € | Поиск данных для расчётов - 2 | Расчёты | Анализ данных | Заключение

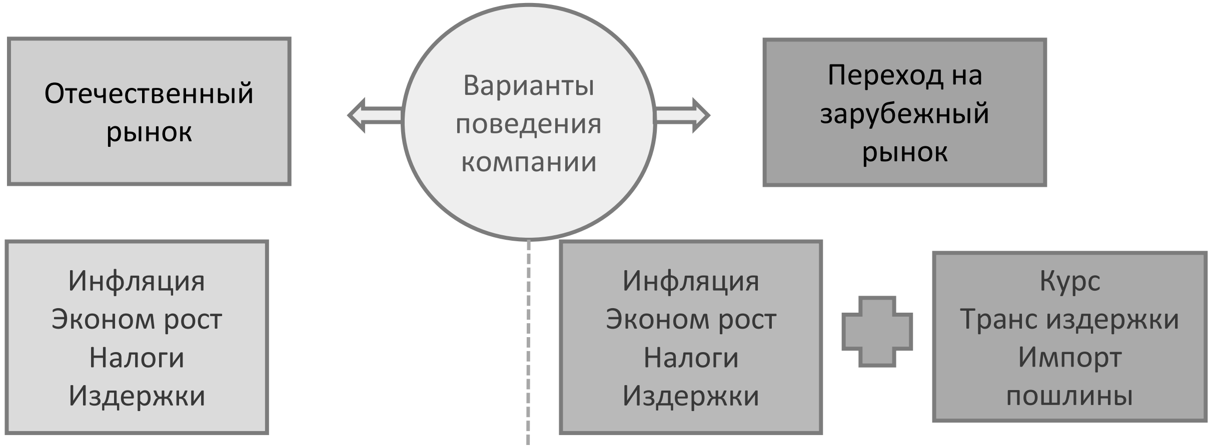
Россия

Описание	Примечание
Спрос	Спрос(пред год)*Экон. Рост
Цена	Цена*Инфляция
Выручка	Спрос*Цена
Дисконтированная выручка	Выручка/инфляция(для каждого года)
НДС	Выручка*НДС
Выручка(без НДС)	Выручка-НДС
Издержки	Выручка(без НДС)*Издержки(%)
Прибыль(без НДС)	Выручка-Издержки-НДС
Налог на прибыль	Приб.(без НДС)*Налог на приб.
Чистая прибыль	Приб(без НДС)-Налог на приб.
Дисконтированная прибыль	Чистая прибыль/инфляция(для каждого года)

Германия

Описание	Примечание
Спрос	Спрос(пред год)*Экон. Рост
Цена(евро)	Цена*Инфляция
Цена (руб)	Цена(евро)* курс евро
Выручка(руб)	Спрос*Цена(руб)
Дисконтированная выручка	Выручка/инфляция(для каждого года)
Транспортные изд.	Трансп. Изд*Инфляция
НДС	Выручка(руб)*НДС
Импортные пошлины	Выручка(руб)*Импортные пошл.
Выручка(без НДС, пошл, нал)	Выручка-НДС-пошл-нал
Издержки	Выручка(без)*издержки(%)
Прибыль(без НДС)	Выручка(без)-издержки
Налог на прибыль	Приб.(без НДС)*Налог на приб.
Чистая прибыль	Прибыль(без НДС)-Налог на приб
Дисконтированная прибыль	Чистая прибыль/инфляция(для каждого года)

После обсуждения всех спорных моментов, мы приступили к подсчёту дисконтированной прибыли для компании К



2015	2016	2017
28 716 957,934	33 354 066,508	33 887 731,573

2018	2019
34 565 486,204	35 360 492,387

2015	2016	2017
29 317 949,547	30 553 834,403	31 051 495,438

2018	2019
31 488 070,591	31 806 519,186

! Следует заметить, что совокупная дисконтированная выручка выше на немецком рынке, однако дисконтированная чистая прибыль больше в России


Executive summary
Поиск данных для расчётов - 1
Поиск расчётного курса €
Поиск данных для расчётов - 2
Расчёты
Анализ данных
Заключение
Стабильность и надежность
Независимость от курса валют
Издержки ниже
Налоговое бремя слабее
Упущенный доход
Возможность получения дополнительной прибыли
Совокупный вес издержек в цене товара выше
Зависимость от геополитических условий
Высокие риски, связанные с курсом валют
Результаты исследования показали, что на сегодняшний день компании К будет выгоднее
оставаться на отечественном рынке

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

Учебное издание

Лариса Петровна Коннова,
Александр Аркадьевич Рылов,
Ирина Кимовна Степанян

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В КЕЙСАХ

Учебное пособие

Корректор *Т.Н. Кузнецова*
Техническое редактирование
и компьютерная верстка *Л.Б. Галкиной*
Подписано в печать 10.11.2016.
Формат 60×90/16. Гарнитура Times New Roman.
Усл. п.л. 8,25. Уч.-изд. л. 5,24.
Тираж 50 экз. Заказ № 1015.

Финансовый университет
125993 (ГСП-3), Москва, Ленинградский просп., 49

Отпечатано в ООП (Ленинградский просп., 51)
Издательства Финансового университета

Для заметок

Для заметок