Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего профессионального образования
«Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации»

Кафедра «Математика 1»

В.Б. Гисин, П.И. Кацыло, Е.В. Маевский

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Москва • 2014

УДК 517.18(075.8)
ББК 22.162я73
Г51

Рецензенты:
П.В. Ягодовский, к.ф.-м.н., доц.
(Финансовый университет)
В.К. Белошапка, д.ф.-м.н., проф.
(МГУ им. М.В. Ломоносова)

Гисин В.Б., Кацыло П.И., Маевский Е.В.

Г51 Функциональный анализ: учебное пособие. — М.: Финансовый университет, 2014. — 220 с.

ISBN 978-5-7942-1128-3

В пособии излагаются разделы функционального анализа, необходимые студентам, изучающим финансовую математику.

Пособие ориентировано на студентов направления «Прикладная математика и информатика» Финансового университета и предназначено для проведения занятий и организации самостоятельной работы студентов, изучающих курс «Функциональный анализ».

Публикуется в авторской редакции.

УДК 517.18(075.8)
ББК 22.162я73

ISBN 978-5-7942-1128-3

Federal State-funded Educational Institution
of Higher Professional Education
«Financial University
under the Government of the Russian Federation»

Chair «Mathematics-1»

V.B. Gisin, P.I. Katsylo, E.V. Maevskiy

FUNCTIONAL ANALYSIS

Manual

Moscow • 2014

UDC 517.18(075.8)

Reviewers:
P.V. Jagodowscy, PhD.
(Financial University)
V.K. Beloshapka, Doctor in Mathematics, prof.
(Moscow State University)

Gisin V.B., Katsylo P.I., Maevskiy E.V.

Functional Analysis: manual. — M.: Financial University, 2014. — 220 p.

ISBN 978-5-7942-1128-3

The manual is dedicated to the basic concepts of functional analysis which required for students studying financial mathematics.

The manual is designed for students of Applied Mathematics subduing Functional Analysis and aimed at organizing the training process and individual work.

Published in author's edition.

UDC 517.18(075.8)

ISBN 978-5-7942-1128-3

Содержание

Contents

Введение

Функциональный анализ как самостоятельная математическая дисциплина возник сравнительно недавно и сформировался в основном в XX столетии. Это наложило отпечаток на систему понятий, составляющих каркас функционального анализа. Понятия функционального анализа обобщают понятия классического математического анализа, алгебры и геометрии. Переход на более высокий уровень абстракции позволяет выявить то общее, что характерно для ряда задач из разных разделов математики, и благодаря более глубокому пониманию существа дела находить решение новых, более сложных задач.

Обобщение главным образом достигается за счет того, что основные понятия и методы математического анализа получают в функциональном анализе алгебраическое и геометрическое наполнение. Центральную роль в этом играют различные функциональные пространства, в которых функции, изучаемые в классическом анализе, становятся точками и векторами. Без методов и аппарата теории функциональных пространств невозможно представить себе современную теорию вероятностей, теорию дифференциальных уравнений, теорию приближенных вычислений и многие другие разделы современной математики.

В данном пособии содержатся начальные общие сведения из функционального анализа, необходимые для понимания смежных математических дисциплин и обеспечивающие последующее более глубокое изучение тех или иных более специальных разделов функционального анализа.

В первой главе излагаются основы теории множеств. «Наивная» теория множеств, достаточная для изучения классического анализа, нуждается в уточнении и формализации при переходе к более сложным объектам функционального анализа. Понятие мощности множества оказывается весьма существенным при изучении функциональных пространств. Вторая глава посвящена метрическим пространствам. Изучение метрических пространств обусловлено необходимостью измерять «расстояние» между объектами самой разной природы, в частности между функциями. В рамках теории метрических пространств получает свою естественную формулировку понятие предельного перехода, являющееся стержнем классического анализа. В третьей и четвертой главах излагается теория меры и интеграла Лебега. Интеграл Лебега более приспособлен к операциям предельного перехода, чем интеграл Римана. Кроме того, класс функций, интегрируемых по Лебегу, шире класса функций, интегрируемых по Риману. Это оказывается принципиально важным во многих областях современной математики, например, в теории вероятностей, изложение которой на современном уровне строится на основе теории меры и интеграла Лебега. В шестой главе приведены некоторые нетривиальные примеры применения теории метрических пространств и интеграла Лебега.

При подготовке пособия авторы стремились отразить основные идеи функционального анализа, не утяжеляя изложение техническими деталями. Поэтому многие факты приведены без доказательств. Доказательства, имеющиеся в пособии несут в себе, как правило, серьезный понятийный потенциал.

Изучение математических дисциплин без решения задач малопродуктивно. Это относится и к функциональному анализу. Каждая глава, кроме шестой, содержит подборку задач. Специфика предмета такова, что среди задач сравнительно немного упражнений «вычислительного» характера. Решение задач поможет глубже понять изучаемые понятия, обнаружить их новые грани. Задачи снабжены указаниями к решению.

1 Множества

Понятие множества и операции над множествами можно строго определять различными *неэквивалентными* системами аксиом. Мы будем следовать общепринятой системе ZFC — системе аксиом Цермело — Френкеля с аксиомой выбора [1]. При этом нам необязательно хорошо разбираться в множествах на основе системы ZFC. Достаточно использовать стандартные множества (такие, как $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ...) и множества, которые можно индуктивно образовать из стандартных множеств, используя следующие операции.

1. Для всякого множества A и свойства $\mathcal{A}$ элементов множества A можно образовать множество
$$\{a \in A \mid a \text{ обладает свойством } \mathcal{A}\}.$$
2. Для любых множеств A и B можно образовать их *разность*
$$A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}.$$
3. Для любых множеств A и B можно образовать множество отображений из A в B (это множество обозначают через B^A).
4. Для любого множества множеств $\{A_i\}_{i \in I}$ (т.е. I и A_i для каждого $i \in I$ являются множествами) можно образовать следующие множества.

[1] Доказано, что на основе системы аксиом ZFC невозможно доказать непротиворечивость этой системы аксиом. Таким образом, не исключена возможность, что в ZFC (и, значит, во всей современной математике) будет получено противоречие.

- Объединение

$$\bigcup_{i\in I} A_i, \quad \text{где} \quad a \in \bigcup_{i\in I} A_i \;\Leftrightarrow\; a \in A_i \text{ для некоторого } i \in I.$$

- Пересечение

$$\bigcap_{i\in I} A_i, \quad \text{где} \quad a \in \bigcap_{i\in I} A_i \;\Leftrightarrow\; a \in A_i \text{ для каждого } i \in I.$$

- Произведение

$$\prod_{i\in I} A_i := \left\{ \begin{array}{c} \text{множество отображений } \varphi : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \\ \text{таких, что } \varphi(i) \in A_i \text{ для каждого } i \in I \end{array} \right\}.$$

Для конечного множества множеств $A_1, \ldots, A_n$ их произведение естественным образом отождествляется с множеством

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}.$$

При этом для краткости обозначают

$$A^n := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n}.$$

Симметрической разностью множеств A и B называют множество

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Если $A \subset B$, то *дополнением* множества A в множестве B называют

$$\overline{A} := B \setminus A.$$

Если для некоторых множеств рассматривают их дополнения и при этом не указывают, в каких множествах эти дополнения рассматривают, то подразумевается, что эти дополнения рассматривают в некотором одном множестве, которое содержит все рассматриваемые множества.

Если A — множество и $\mathcal{A}$ — свойство элементов множества A, то слова *свойство $\mathcal{A}$ выполнено для почти всех элементов множества A* означают, что свойство $\mathcal{A}$ выполнено для всех, кроме, быть может, конечного подмножества элементов множества A.

Пусть X — множество. Всякое подмножество A множества X определяет отображение

$$\mathbf{1}_A : X \to \{0,1\}, \qquad \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A, \\ 1, & \text{если } x \in A \end{cases}$$

которое называют *характеристической функцией* подмножества A.

Лемма 1.1 *Отображение*

$$\left\{ \begin{matrix} \textit{множество подмножеств} \\ \textit{множества } X \end{matrix} \right\} \to \left\{ \begin{matrix} \textit{множество функций} \\ \textit{вида } X \to \{0,1\} \end{matrix} \right\},$$
$$A \mapsto \mathbf{1}_A$$

биективно.

Множество подмножеств множества X обозначают через 2^X. В частном случае, когда $X = \mathbb{N}$ множество $2^{\mathbb{N}}$ рассматривают также как множество последовательностей из нулей и единиц; всякой последовательности $\{a_n\}$ из нулей и единиц соответствует подмножество $A \subset \mathbb{N}$ такое, что

$$n \in A \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = 1.$$

Например, последовательность $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ соответствует подмножеству нечетных чисел.

Для последовательности $\{A_n\}$ подмножеств множества X можно различными способами определить их предел, который тоже будет подмножеством в X. Перечислим эти способы.

- Для последовательности подмножеств $\{A_n\}$ такой, что
$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$
ее *возрастающим пределом* называют подмножество
$$A = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n;$$
кратко это записывают формулой $A_n \uparrow A$.

- Для последовательности подмножеств $\{A_n\}$ такой, что
$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$
ее *убывающим пределом* называют подмножество
$$A = \bigcap_{n \geqslant 1} A_n;$$
кратко это записывают формулой $A_n \downarrow A$.

- *Нижним пределом* последовательности подмножеств $\{A_n\}$ называют подмножество
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k \geqslant 1} \left(\bigcap_{n \geqslant k} A_n \right).$$
Нижний предел существует всегда. Нетрудно заметить, что
$$a \in \liminf_{n\to\infty} A_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{matrix} a \text{ входит в каждое } A_n \\ \text{начиная с некоторого } n \end{matrix} \right\}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\bigcap_{n\geqslant k} A_n \uparrow \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

- *Верхним пределом* последовательности подмножеств $\{A_n\}$ называют подмножество

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k\geqslant 1} \left(\bigcup_{n\geqslant k} A_n \right).$$

Верхний предел существует всегда. Нетрудно заметить, что

$$a \in \limsup_{n\to\infty} A_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{c} a \text{ входит в бесконечное} \\ \text{множество подмножеств } A_n \end{array} \right\}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\bigcup_{n\geqslant k} A_n \downarrow \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

- Имеем

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n, \tag{1}$$

причем включение может быть строгим (см. задачу 1.21.(2)). Если в (1) имеет место равенство (скажем, оба множества равны A), то говорят, что *последовательность* $\{A_n\}$ *сходится к* A и пишут

$$A_n \longrightarrow A, \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Для последовательности $\{f_n\}$ функций на произвольном множестве X определены понятия равномерной и поточечной сходимости.

- Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ функций на X *поточечно сходится* к функции f и пишут

$$f_n \longrightarrow f,$$

если для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для любого $n > N$ выполнено

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ функций на X *равномерно сходится* к функции f и пишут

$$f_n \rightrightarrows f,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для любого $n > N$ выполнено

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{для любого} \quad x \in X.$$

Ясно, что если последовательность функций равномерно сходится к некоторой функции, то она сходится к этой функции поточечно.

Пример 1.2 *Последовательность функций* $\{f_n(t) = t^n\}$ *на отрезке* $[0, 1]$ *поточечно сходится к функции*

$$f : [0,1] \to [0,1], \qquad f(t) = \begin{cases} 0, & \textit{если } t \neq 1, \\ 1, & \textit{если } t = 1. \end{cases}$$

Равномерно эта последовательность не сходится ни к одной функции.

Отображение множеств $\varphi : X \to Y$ называют

- *инъективным*, если $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ для любых $x \neq x'$;
- *сюръективным*, если для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $\varphi(x) = y$;
- *биективным* (также называют *взаимно однозначным*), если φ инъективно и сюръективно.

Мощность множества

Для всякого конечного множества X определено число элементов в нем, которое называют *мощностью* множества X и обозначают через $|X|$. Оказывается, можно корректно определить мощность всякого, не обязательно конечного, множества. При этом мощности множеств можно сравнивать. А именно, если X и Y — произвольные множества, то

- говорят, что X и Y имеют одинаковую мощность и пишут $|X| = |Y|$, если существует биективное отображение $\varphi : X \to Y$;
- говорят, что мощность множества X не больше мощности множества Y и пишут $|X| \leqslant |Y|$, если существует инъективное отображение $\varphi : X \to Y$.
- говорят, что мощность множества X строго меньше мощности множества Y и пишут $|X| < |Y|$, если $|X| \leqslant |Y|$ и $|X| \neq |Y|$.

Нетрудно заметить, что если существует сюръективное отображение $\varphi : X \to Y$, то $|X| \geqslant |Y|$. Действительно, из сюръективности φ следует, что для любого $y \in Y$ существует $x_y \in X$ такой, что $\varphi(x_y) = y$; тогда отображение

$$\psi : Y \to X, \qquad \psi(y) = x_y$$

инъективно и, следовательно, $|X| \geqslant |Y|$.

Следующая теорема, которую мы приводим без доказательства, утверждает, что для сравнения мощностей множеств выполнены естественные свойства.

Теорема 1.3 *1. Для любых множеств X и Y выполнено одно из трех: $|X| > |Y|$, $\quad |X| = |Y|$, $\quad |X| < |Y|$ (другими словами, любые два множества можно сравнить по мощности);*

2. Для любых множеств X и Y,
если $|X| \geqslant |Y|$ и $|X| \leqslant |Y|$, то $|X| = |Y|$
(другими словами, если мощность X не меньше мощности Y и мощность Y не меньше мощности X, то X и Y имеют одинаковые мощности);

3. Для любых множеств X, Y и Z,
если $|X| \geqslant |Y|$ и $|Y| \geqslant |Z|$, то $|X| \geqslant |Z|$
(другими словами, если мощность X не меньше мощности Y, а мощность Y не меньше мощности Z, то мощность X не меньше мощности Z).

Из этой теоремы следует, что для того чтобы доказать, что данные множества X и Y имеют одинаковую мощность не обязательно строить биективное отображение $X \to Y$; достаточно построить отображения

- инъективные $X \to Y$ и $Y \to X$; или
- сюръективные $X \to Y$ и $Y \to X$; или
- инъективное $X \to Y$ и сюръективное $X \to Y$.

Множество X называют *счетным*, если $|X| = |\mathbb{N}|$.

Казалось бы, мощность множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел примерно в два раза меньше мощности множества $\mathbb{Z}$ целых чисел. Однако на самом деле эти множества имеют одинаковые мощности. Действительно, отображение

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad \varphi(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ -\frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четно} \end{cases}$$

взаимно однозначно и, следовательно, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Говорят, что множество X имеет мощность *континуум*, если $|X| = |\mathbb{R}|$.

Рассмотрим промежуток $I \subset \mathbb{R}$, не являющийся пустым множеством или точкой. Имеем очевидное инъективное отображение

$$I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$

и несложно построить инъективное отображение $\mathbb{R} \to I$, откуда следует, что промежуток I имеет мощность континуум.

Лемма 1.4 *Множество $2^{\mathbb{N}}$ последовательностей из нулей и единиц имеет мощность континуум.*

Доказательство. Имеем инъективное

$$2^{\mathbb{N}} \to [0,1], \qquad (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \ldots$$

и сюръективное

$$2^{\mathbb{N}} \to [0,1], \qquad (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots$$

отображения, откуда следует лемма. ■

Следующая теорема и ее доказательство — один из красивейших фрагментов современной математики.

Теорема 1.5 $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Доказательство. Отображение

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad n \mapsto n$$

инъективно и, следовательно, $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{R}|$.

Осталось доказать, что $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$. Мы докажем это от противного, т.е. допустим, что $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$ и получим противоречие. Условие $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$ означает, что существует биективное отображение $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Возьмем отрезок $[a_0, b_0] = [0, 1]$, разделим его на три равные отрезка и возьмем тот, который не содержит точку $\varphi(1)$; обозначим этот отрезок через $[a_1, b_1]$. Отрезок $[a_1, b_1]$ разделим на три равные отрезка и возьмем тот, который не содержит точку $\varphi(2)$; обозначим этот отрезок через $[a_2, b_2]$. И так далее. По лемме о вложенных отрезках их пересечение

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$$

непусто и, следовательно, существует точка (обозначим ее через x), принадлежащая этому пересечению. Нетрудно заметить, что $x \neq \varphi(i)$ для любого i и, следовательно, $x \notin \mathbf{Im}(\varphi)$. В частности, отображение φ не взаимно однозначно. Противоречие. ■

В 1877 году Г.Кантором была высказана знаменитая

Континуум гипотеза. *Любое бесконечное подмножество в $\mathbb{R}$ или счётно, или имеет мощность континуум*

В дальнейшем К. Гедель и П.Д. Коэн доказали, что если система аксиом ZFC непротиворечива, то на ее основе невозможно ни доказать континуум гипотезу, ни опровергнуть ее.

Теорема 1.6 *Для всякого множества X имеем:*
$|X| < |2^X|$ *(т.е. мощность множества строго меньше мощности множества подмножеств этого множества).*

Доказательство. Имеем инъективное отображение

$$\varphi : X \to 2^X, \qquad \varphi(x) = \{x\}$$

и, следовательно, $|X| \leqslant |2^X|$.

Осталось доказать, что $|X| \neq |2^X|$, т.е. что не существует взаимно однозначного отображения

$$\psi : X \to 2^X.$$

Докажем от противного, т.е. допустим, что такое отображение ψ существует. Положим

$$A := \{x \in X \mid x \notin \psi(x)\} \in 2^X, \qquad a := \psi^{-1}(A).$$

Тогда, если $a \notin A$, то $a \in A$ и если $a \in A$, то $a \notin A$. Противоречие. ■

Замечание 1.7 *Из теоремы 1.6 следует, что объединение* $\mathbf{U}$ *всех элементов, которые можно определить на основе системы аксиом ZFC,* не является *множеством. Действительно, если* $\mathbf{U}$ *— множество, то, с одной стороны, по определению имеем* $2^{\mathbf{U}} \subset \mathbf{U}$, *а с другой стороны, по теореме 1.6 имеем* $|2^{\mathbf{U}}| > |\mathbf{U}|$. *Заметим, что существуют системы аксиом множеств такие, что объединение всех элементов, которые можно определить на их основе, является множеством (его называют* универсальным множеством*).*

1.1 Бинарные отношения на множествах

Определение 1.8 *Пусть X — множество. Говорят, что на множестве X задано* бинарное отношение R, *если определены пары элементов множества X, которые находятся в отношении R. При этом то, что элементы x, y находятся в бинарном отношении R, записывают формулой xRy.*

Пример 1.9 *Всякое отображение $f : X \to X$ определяет бинарное отношение R, при котором xRy тогда и только тогда, когда $y = f(x)$.*

Бинарные отношения являются очень общими структурами на множествах. В теории и приложениях почти всегда имеют дело с частными случаями бинарных отношений: отношениями эквивалентности, отношениями частичного (полного) порядка и отношениями предпочтения. В этом параграфе мы рассмотрим эти бинарные отношения.

Отношения эквивалентности

Часто бывает так, что в множестве необходимо отождествить некоторые элементы. Чтобы это сделать, используют отношения эквивалентности.

Определение 1.10 *Пусть X — множество.* Отношение эквивалентности *на X — это бинарное отношение $\sim$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1. *$x \sim x$ (рефлексивность);*
2. *если $x \sim x'$, то $x' \sim x$ (симметричность);*
3. *если $x \sim x'$ и $x' \sim x''$, то $x \sim x''$ (транзитивность).*

Пусть $\sim$ есть отношение эквивалентности на множестве X. Разобъем множество X на *классы эквивалентности* по правилу: элементы $x, x' \in X$ лежат в одном классе эквивалентности тогда и только тогда, когда $x \sim x'$. Из свойств (1) - (3) отношения эквивалентности вытекает, что такое разбиение определено корректно и X является дизъюнктным объединением классов эквивалентности. Множество классов эквивалентности называют *фактормножеством множества X по отношению эквивалентности* $\sim$ и обозначают через $X/\sim$. Естественным образом определено отображение множеств

$$X \to X/\sim, \quad x \mapsto \overline{x} := \text{класс эквивалентности, содержащий } x.$$

На интуитивном уровне фактормножество $X/\sim$ состоит из элементов множества X, определенных с точностью до эквивалентности.

Математика изучает *множества со структурами.* Для того чтобы задать множество со структурой, необходимо задать множество и структуру на этом множестве, т.е. операции, которые можно производить над элементами этого множества, и аксиомы, которым удовлетворяют эти операции. Некоторые множества со структурами интуитивно очевидны. Поэтому с ними работают на интуитивном уровне, а не на основе аксиом. Например, с натуральными числами работают на интуитивном уровне, а не на основе аксиом Пеано натуральных чисел. Более абстрактные множества со структурами интуитивно неочевидны. Поэтому с ними с самого начала работают на уровне аксиом. Например, в линейной алгебре теорию векторных пространств с самого начала развивают на основе восьми аксиом.

Важным обстоятельством является то, что, грубо говоря, *если на множестве X имеется некоторая структура и отношение эквивалентности $\sim$ как-то согласовано с этой струк-*

турой, то на фактормножестве естественным образом определена аналогичная структура. Приведем два примера.

Пример 1.11 *Фиксируем натуральное число n и на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$, при котором*

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \text{ делится на } n.$$

Классы эквивалентности — это n подмножеств

$$\overline{a} := a + n\mathbb{Z}, \quad a = 0, 1, \ldots, n-1$$

и, таким образом, фактормножеством является

$$\mathbb{Z}/{\sim} \;=\; \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\},$$

которое называют кольцом вычетов по модулю n *и обозначают через через $\mathbb{Z}_n$. Элементы множества $\mathbb{Z}$ можно складывать, и отношение эквивалентности $\sim$ согласовано со сложением в том смысле, что*

$$a \sim b,\ a' \sim b' \quad \Longrightarrow \quad a + a' \sim b + b'.$$

Это позволяет определить сложение элементов множества $\mathbb{Z}_n$:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}, \quad \text{где } c = \text{ вычет по модулю } n \text{ числа } a + b.$$

Кроме того, элементы множества $\mathbb{Z}$ можно умножать, и отношение эквивалентности $\sim$ согласовано с умножением в том смысле, что

$$a \sim b,\ a' \sim b' \quad \Longrightarrow \quad a \cdot a' \sim b \cdot b'.$$

Это позволяет определить умножение элементов множества $\mathbb{Z}_n$*:*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{c}, \quad \text{где } c = \text{вычет по модулю } n \text{ числа } a \cdot b.$$

Например, в $\mathbb{Z}_5$ *имеем:*

$$\overline{3} + \overline{4} = \overline{2}, \quad \overline{2} + \overline{3} = \overline{0}, \quad \overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{2}, \quad \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{1}.$$

Пример 1.12 *Пусть* V *является векторным пространством (вещественным или комплексным) и* $L \subset V$ *— подпространство. Определим следующее отношение эквивалентности на* V*:*

$$v \sim v' \iff v - v' \in L.$$

Классами эквивалентности являются подмножества вида

$$v + L, \quad \text{где } v \in V.$$

Сложение векторов и умножение векторов на числа согласовано с этим отношением эквивалентности, т.е.

$$v \sim u,\ v' \sim u' \implies v + v' \sim u + u',$$
$$v \sim u \implies \lambda v \sim \lambda u.$$

Это позволяет определить сложение классов и умножение классов на числа, а именно,

$$\begin{aligned} (v + L) + (u + L) &= (v + u) + L, \\ \lambda(v + L) &= \lambda v + L. \end{aligned} \tag{2}$$

В описанной ситуации множество $V/{\sim}$ *классов эквивалентности обозначают через* V/L *и называют* факторпространством пространства V по подпространству L. *Факторпространство* V/L *является векторным пространством. А именно,*

(2) *определяет сложение элементов пространства V/L (как векторов) и умножение их на скаляры. На интуитивном уровне векторы факторпространства V/L — это векторы пространства V, определенные с точностью до прибавления векторов из подпространства L. Нетрудно заметить, что отображение*

$$\pi : V \to V/L, \qquad \pi(v) = v + L$$

линейно, причем $\mathbf{Ker}(\pi) = L$.

Отношения порядка

Пусть X — множество. *Отношение частичного порядка* на X — это бинарное отношение $\leqslant$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- $x \leqslant x$ для любого $x \in X$;
- если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;
- если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Множество X, на котором задано отношение частичного порядка, называют *частично упорядоченным*. Для частично упорядоченного множества определим бинарное отношение $<$ следующим образом:

$$x < y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leqslant y \quad \text{и} \quad x \neq y.$$

Элементы x, y частично упорядоченного множества называют *сравнимыми*, если выполнено или $x \leqslant y$, или $x \geqslant y$, или одновременно $x \leqslant y$ и $x \geqslant y$. Частично упорядоченное множество X называют *вполне упорядоченным*, а соответствующее отношение порядка называют *полным*, если любые два элемента множества X сравнимы.

Пример 1.13 *На множестве натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *определим следующее отношение порядка:*

$$x \leqslant y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \text{ меньше либо равно } y.$$

Ясно, что это отношение порядка является полным.

Пример 1.14 *На множестве натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *определим следующее отношение порядка:*

$$x \leqslant y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \text{ делит } y.$$

Это отношение порядка не является полным, так как, например, 4 *и* 6 *несравнимы.*

Отношения частичных порядков на множествах $X_1, \ldots, X_n$ порождают *лексикографическое* отношение частичного порядка на их прозведении

$$X_1 \times \ldots \times X_n,$$

при котором

$$\begin{gathered}
(x_1, \ldots, x_n) < (y_1, \ldots, y_n) \quad \Longleftrightarrow \\
x_1 < y_1 \quad \text{или} \\
x_1 = y_1,\ x_2 < y_2 \quad \text{или} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1 = y_1, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1},\ x_n < y_n
\end{gathered}$$

Несложно проверить, что лексикографическое отношение порядка на произведении $X_1 \times \ldots \times X_n$ является полным тогда и только тогда, когда полными являются порождающие его отношения порядков на $X_1, \ldots, X_n$.

Отношения предпочтения

Определение 1.15 *Бинарное отношение $\preccurlyeq$ на множестве X называют* отношением предпочтения, *если оно удовлетворяет следующим аксиомам:*

1. *$x \preccurlyeq x$ для любого $x \in X$;*
2. *если $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq z$, то $x \preccurlyeq z$;*
3. *для любых $x, y \in X$ выполнено или $x \preccurlyeq y$, или $y \preccurlyeq x$, или одновременно $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$.*

Всякое отношение предпочтения $\preccurlyeq$ на множестве X определяет отношение эквивалентности $\sim$ на том же множестве X, а именно,

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \preccurlyeq y \quad \text{и} \quad x \succcurlyeq y.$$

Пример 1.16 *Функция u на множестве X определяет отношение предпочтения $\preccurlyeq$ на X, при котором*

$$x \preccurlyeq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad u(x) \leqslant u(y).$$

Однако неверно, что на любом множестве всякое отношение предпочтения определяется функцией.

1.2 Аксиома выбора

Одной из аксиом системы ZFC является:

Аксиома выбора. *Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ множество непустых множеств. Тогда существует отображение*

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

такое, что $f(i) \in A_i$ (другими словами, одновременно для всех $i \in I$ можно выбрать элемент $f(i) \in A_i$).

Интуитивно аксиома выбора кажется очевидной. Однако оказалось, что из нее следуют довольно необычные утверждения, например,

Парадокс Банаха — Тарского. *Единичную сферу в трехмерном евклидовом пространстве можно представить как объединение конечного множества непересекающихся подмножеств так, что из этих подмножеств, параллельно перенося и поворачивая их, можно составить две единичные сферы*

Несмотря на следствия типа парадокса Банаха — Тарского, аксиома выбора принята в математике. При этом используют не саму аксиому выбора, а доказываемую на ее основе лемму Цорна, которую мы сейчас сформулируем.

Сначала дадим определения, которые необходимы для понимания формулировки леммы Цорна.

Пусть $(X, \geqslant)$ — частично упорядоченное множество. Подмножество Y частично упорядоченного множества X называется *вполне упорядоченным*, если ограничение на Y частичного порядка $\geqslant$ является полным порядком на Y. Элемент $x_{\max}$ частично упорядоченного множества X называется *максимальным*, если не существует $x \in X$ такого, что $x > x_{\max}$. Например, в частично упорядоченных множествах из примеров 1.13 и 1.14 не существует максимальных элементов.

Теперь мы готовы сформулировать лемму Цорна.

Лемма 1.17 (Лемма Цорна) *Пусть $(X, \geqslant)$ — частично упорядоченное множество, причем для каждого вполне упорядоченного подмножества $Y \subset X$ существует $x_Y \in X$ такой, что $x_Y \geqslant y$ для всех $y \in Y$. Тогда в X существует максимальный элемент $x_{\max}$.*

Приведем типичный пример применения леммы Цорна.

Сначала дадим некоторые определения. Пусть V — векторное пространство (не обязательно конечномерное). *Системой векторов* в векторном пространстве V называют любое вполне упорядоченное множество векторов. Конечную систему векторов называют *линейно независимой*, если между векторами этой системы нет нетривиальных соотношений линейной зависимости. Систему векторов (не обязательно конечную) называют линейно независимой, если всякая ее конечная подсистема линейно независима. *Базисом Гамеля* векторного пространства V называют линейно независимую систему векторов $\{v_i\}_{i\in I}$ такую, что для каждого вектора $v \in V$ существует разложение

$$v = \sum_{i\in I} c_i v_i,$$

где почти все коэффициенты c_i равны нулю (из линейной независимости следует, что такое разложение единственно). Ясно, что в конечномерных пространствах базисы Гамеля — это обычные базисы, определяемые в линейной алгебре.

Лемма 1.18 *Во всяком (не обязательно конечномерном) векторном пространстве существует базис Гамеля.*

Доказательство. Рассмотрим множество X линейно независимых (не обязательно конечных) систем векторов в пространстве V. Будем говорить, что система векторов $\mathbf{e}$ является *продолжением* системы векторов $\mathbf{f}$, если в системе $\mathbf{e}$ сначала идут векторы из системы $\mathbf{f}$, причем в том же порядке, в котором они расположены в системе $\mathbf{f}$. Определим частичный порядок $\leqslant$ на X следующим образом:

$$\mathbf{f} \leqslant \mathbf{e} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{система } \mathbf{e} \text{ является продолжением ситемы } \mathbf{f}.$$

Утверждается, что для множества X выполнены предположения леммы Цорна. Действительно, пусть $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in I}$ — вполне упорядоченное подмножество множества X. Образуем систему векторов $\mathbf{e}$ следующим образом. Как множество, эта система состоит из векторов, входящих хотя бы в одну систему $\mathbf{e}_i$. Упорядочим векторы в системе $\mathbf{e}$ следующим образом. Пусть $v, v' \in \mathbf{e}$ и тем самым $v \in \mathbf{e}_i$ и $v' \in \mathbf{e}_{i'}$ для некоторых $i, i' \in I$. Так как подмножество $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in I}$ вполне упорядочено, то можно считать, что $\mathbf{e}_{i'} \leqslant \mathbf{e}_i$. Последнее означает, что оба вектора v и v' входят в систему $\mathbf{e}_i$. Будем считать, что в системе $\mathbf{e}$ вектор v идет за (перед) вектором v', если он идет за (перед) ним в системе $\mathbf{e}_i$. Нетрудно заметить, что для построенной системы $\mathbf{e}$ имеем

$$\mathbf{e}_i \leqslant \mathbf{e} \quad \text{для любого } i \in I.$$

По лемме Цорна в X существует максимальный элемент $\mathbf{e}_{\max}$. Нетрудно заметить, что этот максимальный элемент и будет базисом Гамеля пространства V. ■

Пример 1.19 *Пусть $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — счетное упорядоченное множество символов. Положим*

$$V := \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i \mid \lambda_i = 0 \textit{ для почти всех } i \right\}.$$

Ясно, что V является бесконечномерным векторным пространством и $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ является базисом Гамеля в V.

В функциональном анализе изучают бесконечномерные векторные пространства, но при этом *не используют базисы Гамеля.* Причина этого в том, что в важных для теории и приложений пространствах (например, в банаховых пространствах) дополнительные структуры, которые есть на таких пространствах, «плохо взаимодействуют» с базисами Гамеля.

1.3 Задачи

Задача 1.20 *Докажите, что для любых множеств A, B и C выполнено*

$$A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C).$$

Задача 1.21 1. *Докажите, что для всякой последовательности $\{A_n\}$ подмножеств множества X выполнено*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

2. *Приведите пример множества X и последовательности $\{A_n\}$ его подмножеств, таких, что*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \neq \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Задача 1.22 *Пусть $\{A_n\}$ — последовательность подмножеств множества X. Докажите, что если $A_n \uparrow A$ или $A_n \downarrow A$, то*

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Задача 1.23 1. *Найдите возрастающий предел последовательности подмножеств $\{(\frac{1}{n}, n)\}$;*

2. *Найдите убывающий предел последовательности подмножеств $\{[n, \infty)\}$.*

Задача 1.24 *Найдите верхний и нижний пределы предел последовательности подмножеств*

1. $\{A_n = ((-1)^n, 5 + \frac{1}{n}]\}$;

2. $\{A_n = [\sin(n), 5 - \sin(n))\}$.

Задача 1.25 *Докажите, что*

1. *всякое подмножество счетного множества конечно или счетно;*
2. *всякое не более чем счетное множество конечно или счетно.*

Задача 1.26 *Докажите, что множество конечных подмножеств счетного множества счетно.*

Задача 1.27 *Докажите, что произведение непустого конечного и счетного множества счетно.*

Задача 1.28 *Докажите, что конечное произведение счетных множеств счетно (в частности,* $\mathbb{Z}^n$ *счетно).*

Задача 1.29 *Докажите, что* $\mathbb{Q}$ *счетно.*

Задача 1.30 *Докажите, что счетное объединение множеств, каждое из которых не более чем счетно, является не более чем счетным множеством.*

Задача 1.31 *Докажите, что множество точек разрыва неубывающей функции* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не более чем счетно.*

Задача 1.32 *Докажите, что конечное произведение множеств, имеющих мощность континуум, имеет мощность континуум (в частности,* $\mathbb{R}^n$ *имеет мощность континуум).*

Задача 1.33 *Докажите, что произведение счетного множества множеств, имеющих мощность континуум, имеет мощность континуум.*

Задача 1.34 *Докажите, что векторное пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций имеет мощность континуум.*

Задача 1.35 *Докажите, что*

1. *векторное пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций бесконечномерно;*
2. *векторное пространство $P[a, b]$ многочленов на $[a, b]$ бесконечномерно;*
3. *факторпространство $C[a, b]/P[a, b]$ бесконечномерно.*

Указания к задачам

1.20. Мы должны доказать, что всякий $x \in A\Delta C$ принадлежит $A\Delta B$ или $B\Delta C$. Имеем: если $x \in A \setminus C$, то если $x \notin B$, то $x \in A\Delta B$, а если $x \in B$, то $x \in B\Delta C$. Аналогично рассматривается случай $x \in C \setminus A$.

1.21.(1). Очевидно.

(2). X — любое непустое множество, $A_1 = X, A_2 = \emptyset, A_3 = X, A_4 = \emptyset, \ldots$.

1.22. Рассмотрим случай $A_n \uparrow A$. В этом случае $\bigcup\limits_{n \geqslant k} A_n = A$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Кроме того, $\bigcap\limits_{n \geqslant k} A_n = A_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} A_k = A$. Аналогично рассматривается случай $A_n \downarrow A$.

1.23.(1). $(0, \infty)$.

(2). $\emptyset$.

1.24.(1). $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = (-1, 5]$, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = (1, 5]$.

(2). $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = (-1, 6)$, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = [1, 5]$.

1.25.(1) Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество, $X' = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\} \subset X$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots$. Если X' конечно, то все доказано, а если X' бесконечно, то отображение $\varphi : \mathbb{N} \to X'$, $\varphi(n) = x_{i_n}$ взаимно однозначно и, следовательно, X' счетно.

(2) Следует из (1).

1.26. Перечислить все конечные подмножества счетного множества $\{x_1, x_2, \ldots\}$ можно следующим образом. Сначала перечисляем подмножества множества $\{x_1\}$, затем не перечисленные ранее подмножества множества $\{x_1, x_2\}$, затем не перечисленные ранее подмножества множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ и так далее.

1.27. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — непустое конечное и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — счетное множества. Элементы произведения $A \times B$ можно перечислить следующим образом: сначала перечисляем элементы вида (a_i, b_1), где $1 \leqslant i \leqslant n$, затем элементы вида (a_i, b_2), где $1 \leqslant i \leqslant n$ и т.д.

1.28. Достаточно доказать счетность произведения двух счетных множеств, скажем $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Элементы произведения $A \times B$ можно перечислить следующим образом: сначала перечисляем элементы вида (a_i, b_j), где $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, затем не перечисленные ранее элементы вида (a_i, b_j), где $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ и т.д.

1.29. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $\varphi(n, m) = \frac{n}{m}$. Так как $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ счетно (это следует из утверждения задачи 1.28) и φ сюръективно, то $\mathbb{Q}$ не более чем счетно. Из бесконечности $\mathbb{Q}$ и утверждения задачи 1.25 следует, что $\mathbb{Q}$ счетно.

1.30. Пусть $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$, $i = 1, 2, \ldots$ — не более чем счетные множества. Элементы объединения $\cup_{i \geqslant 1} A_i$ можно перечислить следующим образом: сначала перечисляем элементы вида a_{ij}, где $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, затем не перечисленные ранее элементы вида a_{ij}, где $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ и т.д.

1.31. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция. Тогда в каждой точке x разрыва имеем $f(x-0) < f(x+0)$. Из того, что функция f неубывает, следует, что интервалы $(f(x-0), f(x+0))$, соответствующие различным точкам разрыва, не пересекаются; в каждом таком интервале выберем рациональную точку $r(x)$. Имеем инъективное отображение множества точек разрыва функции f в $\mathbb{Q}$, при котором точка разрыва x переходит в $r(x)$. Следовательно, множество точек разрыва функции f не более чем счетно.

1.32. Так как множество $2^{\mathbb{N}}$ имеет мощность континуум (лемма 1.4), то достаточно доказать, что множества $(2^{\mathbb{N}})^n$ и $2^{\mathbb{N}}$ имеют одинаковую мощность. Для доказательства построим биективное отображение между этими множествами. А именно, согласно утверждению задачи 1.27, множество $\{1, \ldots, n\} \times \mathbb{N}$ счетно; пусть $\psi : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, n\} \times \mathbb{N}$ — биективное отображение. Искомое биективное отображение есть

$$(2^{\mathbb{N}})^n \to 2^{\mathbb{N}},$$
$$((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, \ldots), \ldots, (a_{(n,1)}, a_{(n,2)}, \ldots)) \mapsto (a_{\psi(1)}, a_{\psi(2)}, \ldots).$$

1.33. Решение этой задачи получается несложной модификацией решения задачи 1.32. А именно, так же как в решении задачи 1.32, достаточно доказать, что множества $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{N}}$ имеют одинаковую мощность. Для доказательства строим биективное отображение между этими множествами. Согласно утверждению задачи 1.28, множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно; пусть $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — биективное отображение. Искомое биективное отображение есть

$$(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}},$$
$$((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, \ldots), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, \ldots), \ldots) \mapsto (a_{\psi(1)}, a_{\psi(2)}, \ldots).$$

1.34. Имеем сюръективное отображение $C[a,b] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(a)$ и инъективное отображение

$$C[a,b] \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad f \mapsto (f(r_1), f(r_2), \ldots),$$

где $\{r_1, r_2, \ldots\} = [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Отсюда и из того, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имеют мощность континуум (см. задачу 1.33), следует, что $C[a,b]$ имеет мощность континуум.

1.35. (1) и (2). Бесконечномерность пространств $C[a,b]$ и $P[a,b]$ следует из того, что для любого n система векторов $1, t, t^2, \ldots \in P[a,b]$ линейно независима.

2 Метрические пространства

2.1 Определение и примеры

Метрическим пространством называется пара (X, d), где X — пространство — является множеством, а d — метрика — является функцией расстояния между элементами множества X (другими словами, $d(x, y)$ есть расстояние между $x, y \in X$). При этом для метрики d должны быть выполнены следующие аксиомы.

(Metr_1) *$d(x, y) \geqslant 0$, причем $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.*

(Metr_2) *$d(x, y) = d(y, x)$.*

(Metr_3) *$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$ (неравенство треугольника)*

Метрическое пространство (X, d) иногда обозначают через X, когда из контекста ясно, как определена метрика d.

Вот некоторые геометрические примеры метрических пространств.

1. $(\mathbb{R}, d_2)$, где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел с координатной функцией (x), расстояние
$$d_2(x_1, x_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|.$$

2. $(\mathbb{R}^2, d_2)$, где $\mathbb{R}^2$ — плоскость с системой координат (x, y), расстояние
$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

3. $(\mathbb{R}^3, d_2)$, где $\mathbb{R}^3$ — пространство с системой координат

(x, y, z), расстояние

$$d_2((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

4. S^2 - сфера радиуса 1 в пространстве, расстояние между точками на сфере равно длине кратчайшей дуги, соединяющей эти точки.

Всякий раз, определяя метрические пространства, необходимо доказывать выполнение аксиом метрики. При этом практически всегда выполнение аксиом (Metr_1) и (Metr_2) очевидно. Доказательство неравенства треугольника (Metr_3) нередко является трудной задачей. Например, для рассмотренного выше метрического пространства S^2 доказательство неравенства треугольника является непростой геометрической задачей. **В этом курсе, определяя метрические пространства, мы не всегда будем доказывать неравенство треугольника** (Metr_3) Соответствующие доказательства можно найти в книгах [KG] и [KF].

Следующие метрические пространства играют важную роль в функциональном анализе и его приложениях.

Пример 2.1 *[Обобщение примеров (1) — (3) выше]* Евклидово координатное пространство $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *есть вещественное* n*-мерное координатное пространство*

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\},$$

с функцией расстояния

$$d_2((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Пример 2.2 $(\mathbb{R}^n, d_1)$ *есть n-мерное координатное пространство $\mathbb{R}^n$ с функцией расстояния*

$$d_1((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Пример 2.3 $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ *есть n-мерное координатное пространство $\mathbb{R}^n$ с функцией расстояния*

$$d_\infty((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Пример 2.4 *Для $p \geqslant 1$ метрическое пространство $(\mathbb{R}^n, d_p)$ есть n-мерное координатное пространство $\mathbb{R}^n$ с функцией расстояния*

$$d_p((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Нетрудно заметить, что

- $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *есть* $(\mathbb{R}^n, d_p)$ *при* $p = 2$;
- $(\mathbb{R}^n, d_1)$ *есть* $(\mathbb{R}^n, d_p)$ *при* $p = 1$;
- $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ *есть «предел пространства»* $(\mathbb{R}^n, d_p)$ *при* $p \to \infty$.

Пример 2.5 *Для $p \geqslant 1$ метрическое пространство $(\mathbb{C}^n, d_p)$ есть комплексное n-мерное координатное пространство*

$$\mathbb{C}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C}\},$$

с функцией расстояния

$$d_p((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Замечание 2.6 *То, что указанные в примерах 2.1, 2.2, 2.4 и 2.5 метрики удовлетворяют аксиоме* (Metr_3)*, несложно доказать, используя*

Неравенство Минковского. *Для любого $p \geqslant 1$ и любых вещественных или комплексных чисел $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ выполнено*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Заметим, что неравенство Минковского не выполнено при $p < 1$ (несложно привести соответствующие контрпримеры). Доказательство неравенства Минковского (а также его обобщений, которые также называют неравенствами Минковского) см. в [KF].

Положим

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathbb{C}^{\mathbb{N}} := \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{C}\}.$$

Пример 2.7 (Вещественное ℓ^p) *Для всякого $p \geqslant 1$ подмножество*

$$\ell^p := \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{ряд } \sum_{i \geqslant 1} |x_i|^p \text{ сходится}\}$$

является метрическим пространством с метрикой

$$d_p((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) := \left(\sum_{i \geqslant 1} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}.$$

То, что для любых $x, y \in \ell^p$ расстояние $d_p(x, y)$ определено и то, что d_p является метрикой, вытекает из неравенства Минковского.

Пример 2.8 (Вещественное ℓ^∞) *Множество*

$$\ell^\infty := \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \textit{последовательность } \{x_n\} \textit{ ограничена}\}$$

является метрическим пространством с метрикой

$$d_\infty((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) := \sup_{i \geqslant 1} |x_i - y_i|.$$

Нетрудно заметить, что вещественное ℓ^∞ есть «предел» вещественного ℓ^p при $p \to \infty$.

Пример 2.9 (Комплексное ℓ^p) *Для всякого $p \geqslant 1$ подмножество*

$$\ell^p := \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \textit{ряд } \sum_{i \geqslant 1} |x_i|^p \textit{ сходится}\}$$

является метрическим пространством с метрикой

$$d_p((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) := \left(\sum_{i \geqslant 1} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

То, что для любых $x, y \in \ell^p$ расстояние $d_p(x, y)$ определено и то, что d_p является метрикой, вытекает из неравенства Минковского.

Пример 2.10 (Комплексное ℓ^∞) *Множество*

$$\ell^\infty := \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \textit{последовательность } \{x_n\} \textit{ ограничена}\}$$

является метрическим пространством с метрикой

$$d_\infty((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) := \sup_{i \geqslant 1} |x_i - y_i|.$$

Нетрудно заметить, что комплексное ℓ^∞ есть «предел» комплексного ℓ^p при $p \to \infty$.

Пример 2.11 *Для вещественных чисел $a < b$ определим пространство $C[a, b]$ как множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с* равномерной *метрикой*

$$d(f(t), g(t)) := \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|.$$

Пример 2.12 *Для вещественных чисел $a < b$ определим пространство $C_1[a, b]$ как множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой*

$$d_1(f(t), g(t)) := \int_a^b |f(t) - g(t)| dt.$$

Пример 2.13 *Пусть Γ — произвольный связный граф, V — множество его вершин, причем каждому ребру графа Γ приписано положительное число — его длина. Для вершин $v, v' \in V$ положим*

$$d(v, v') = \left\{ \begin{array}{c} \textit{длина кратчайшего пути,} \\ \textit{соединяющего вершину } v \textit{ с } v' \end{array} \right\}$$

Несложно доказать, что V с функцией расстояния d является метрическим пространством. Заметим, что нахождение расстояния между вершинами графа является непростой задачей, для решения которой можно использовать, например, алгоритм Дейкстры.

Пример 2.14 *Пусть $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ — метрические пространства. Рассмотрим произведение*

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i\}.$$

На X можно определить различные функции расстояния по которых X будет метрическим пространством. Укажем наиболее часто используемые функции расстояния:

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = d_1(x_1,y_1)+\ldots+d_n(x_n,y_n),$$
$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max\{d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n)\},$$
$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2+\ldots+d_n(x_n,y_n)^2}.$$

В функциональном анализе и его приложениях встречаются и другие метрические пространства, с некоторыми из которых мы познакомимся позже.

Имеются довольно экзотические метрические пространства, знать которые полезно для понимания определения метрических пространств. Вот пример такого пространства.

Пример 2.15 *Пусть X — произвольное множество. Для $x, x' \in X$ положим*

$$d(x,x') := \begin{cases} 0, & \text{если } x = x', \\ 1, & \text{если } x \neq x'. \end{cases}$$

Как это ни выглядит странным, так определенная функция расстояния d является метрикой. Определенную выше метрику называют дискретной, *а метрическое пространство с дискретной метрикой называют* дискретным *метрическим пространством.*

Пример 2.16 *Рассмотрим прямое произведение*

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n,$$

где $X_1,\ldots,X_n$ — произвольные множества. Для $(x_1,\ldots,x_n)$, $(x'_1,\ldots,x'_n) \in X$ положим

$$d((x_1,\ldots,x_n),(x'_1,\ldots,x'_n)) :=$$
$$\{\text{число позиций } i, \text{ на которых } x_i \neq x'_i\}.$$

Нетрудно проверить, что так определенная функция расстояния d является метрикой. В частном случае, когда

$$X_1 = \ldots = X_n = A$$

— конечное множество, метрику d называют метрикой Хемминга. *Метрика Хемминга часто встречается в приложениях.*

Доказательство следующей леммы очевидно.

Лемма 2.17 *Пусть (X, d_X) — метрическое пространство, Y — подмножество пространства X. Определим функцию расстояния d_Y на Y, полагая*

$$d_Y(y_1, y_2) := d_X(y_1, y_2), \qquad y_1, y_2 \in Y.$$

Тогда (Y, d_Y) является метрическим пространством. Определенную так метрику d_Y на подмножестве Y называют индуцированной *метрикой, а метрическое пространство (Y, d_Y) называют* подпространством *пространства (X, d_X).*

Например, на отрезке $Y = [a, b]$, рассматриваемом как подмножество метрического пространства $(X = \mathbb{R}, d_2)$ (обычной прямой), определена индуцированная метрика и с этой метрикой отрезок $[a, b]$ является метрическим пространством. Ясно, что эта индуцированная метрика на отрезке $[a, b]$ является обычной метрикой, т.е.

$$d_Y(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|, \qquad y_1, y_2 \in [a, b].$$

У леммы 2.17 имеется следующее обобщение.

Лемма 2.18 *Пусть* (X, d_X) *— метрическое пространство,* Y *— произвольное множество,*

$$\varphi : Y \to X$$

— произвольное инъективное отображение. Определим функцию расстояния d_Y *на* Y *следующим образом:*

$$d_Y(y_1, y_2) := d_X(\varphi(y_1), \varphi(y_2)), \qquad y_1, y_2 \in Y.$$

Тогда Y *с функцией расстояния* d_Y *является метрическим пространством (метрику* d_Y *называют* проообразом метрики d_X при отображении φ*).*

Замечание 2.19 *Лемма 2.18 может быть использована в следующей ситуации. Допустим, имеются однотипные объекты* A_1, ... , A_n *(например, марки автомобилей, супермаркеты в данном городе), для которых необходимо определить то, насколько они отличаются друг от друга. Говоря формально, необходимо определить метрику на множестве* $\{A_1, \ldots, A_n\}$*. Для этого сначала составляем список признаков* $p_1, \ldots, p_m$*, по которым эти объекты будут сравниваться. Признак* p_i *может быть*

- количественным*; в этом случае* $p_i(A_j) \in \mathbb{R}$*;*
- качественным*; в этом случае* $p_i(A_j) \in \{Y, N\}$ *(*Y = *yes,* N = *no), где*

$$p_i(A_j) = \begin{cases} Y, & \text{если } A_j \text{ обладает признаком } p_i, \\ N, & \text{если } A_j \text{ не обладает признаком } p_i. \end{cases}$$

Например, для автомобилей количественным признаком является мощность двигателя в лошадиных силах, а качественным — наличие или отсутствие кондиционера. Признаков должно быть достаточно много так, чтобы разные объекты различались по крайней мере по одному признаку. Допустим, *признаки* $p_1, \ldots, p_k$ *— количественные, а признаки* $p_{k+1}, \ldots, p_{k+m}$ *— качественные. Имеем отображение*

$$\varphi : \{A_1, \ldots A_n\} \to \mathbb{R}^k \times \{Y, N\}^m,$$
$$\varphi(A_i) = (p_1(A_i), \ldots, p_{k+m}(A_i)).$$

Выбирем метрику в пространстве $\mathbb{R}^k \times \{Y, N\}^m$ *(это можно сделать многими способами, см. пример 2.14) и, применяя лемму 2.18, получаем метрику на множестве объектов* $\{A_1, \ldots, A_n\}$. *Разумеется, чтобы получить «хорошую» метрику на* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *нужно «хорошо» подобрать признаки* $p_1, \ldots, p_{k+m}$ *и «хорошо» выбрать метрику на* $\mathbb{R}^k \times \{Y, N\}^m$.

2.2 Предел в метрическом протранстве

Определение 2.20 *Рассмотрим произвольное метрическое пространство* (X, d).

- *Для каждой точки* $x_0 \in X$ *определена ее* ε-окрестность

  $$B(x_0, \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon\}.$$

  Иногда ε*-окрестность* $B(x_0, \varepsilon)$ *называют* открытым шаром радиуса ε с центром в точке x_0. *Если хотят указать, что шар лежит в метрическом пространстве* X, *то его обозначают через* $B_X(x_0, \varepsilon)$.

- *Подмножество* U *пространства* X *называют* открытым, *если для любой* $u \in U$ *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $B(u, \varepsilon) \subset U$ *(другими словами, если* U *содержит некоторую точку, то* U *также содержит некоторую* ε*-окрестность этой точки). По определению, пустое подмножество пространства* X *открыто. Отметим, что* *из определения следует, что X (как подмножество самого себя) открыто.*

- *Подмножество Z метрического пространства (X, d) называют* замкнутым, *если его дополнение $X \setminus Z$ открыто. Таким образом, подмножество Z замкнуто тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X \setminus Z$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что пересечение $B(x, \varepsilon) \cap Z$ пусто. По определению, пустое подмножество пространства X замкнуто. Отметим, что из определения следует, что X (как подмножество самого себя) замкнуто.*

- *Подмножество A метрического пространства X называют* ограниченным, *если оно содержится в некотором шаре.*

Пример 2.21 *ε-окрестностью точки x_0 в $(\mathbb{R}, d_2)$ является обычная ε-окрестность точки x_0, т.е. интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.*

Пример 2.22 *ε-окрестностью точки (x_0, y_0) на плоскости $(\mathbb{R}^2, d_2)$ является круг радиуса ε без границы с центром в точке (x_0, y_0), т.е.*

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon\}.$$

Пример 2.23 *В метрическом пространстве $(\mathbb{R}, d_2)$ интервал (a, b) является открытым подмножеством, отрезок $[a, b]$ — замкнутым, полуинтервалы $(a, b]$ и $[a, b)$ не являются ни открытыми, ни замкнутыми подмножествами.*

Пример 2.24 *Несложно доказать, что в любом метрическом пространстве (X, d)* замкнутый шар

$$B^c(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$$

замкнут.

Пример 2.25 *В дискретном метрическом пространстве всякое подмножество является одновременно открытым и замкнутым.*

Теорема 2.26 *Пусть X — метрическое пространство. Тогда*

1. *объединение любого множества открытых подмножеств открыто;*

2. *пересечение конечного множества открытых подмножеств открыто;*

3. *объединение конечного множества замкнутых подмножеств замкнуто;*

4. *пересечение любого множества замкнутых подмножеств замкнуто.*

Доказательство. (1) Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — открытые подмножества метрического пространства X и

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

— объединение этих подмножеств. Мы должны доказать, что U открыто. Пусть $x \in U$. Имеем $x \in U_{i_0}$ для некоторого $i_0 \in I$. Так как U_{i_0} открыто, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B(x,\varepsilon) \subset U_{i_0}$. Но тогда

$$B(x,\varepsilon) \subset U_{i_0} \subset U.$$

Это доказывает, что U открыто.

(2) Пусть $\{U_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ — конечное множество открытых подмножеств метрического пространства X,

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

— пересечение этих подмножеств. Мы должны доказать, что U открыто. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ имеем $x \in U_i$ и из открытости U_i следует, что существует $\varepsilon_i > 0$ такое, что $B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$. Но тогда

$$B(x, \varepsilon) \ \subset \ \bigcap_{i=1}^{n} U_i \ = \ U,$$

для $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Это доказывает, что U открыто.

(3) и (4) доказываются аналогично (1) и (2). ■

Определение 2.27 *Пусть (X, d) - метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}$ точек пространства X называют* сходящейся к $x \in X$ *и пишут $x_n \to x$, если*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0;$$

точку x при этом называют пределом *последовательности $\{x_n\}$. Таким образом, $x_n \to x$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого n, принадлежат ε-окрестности точки x. Последовательность, которая сходится к какой-нибудь точке, называют* сходящейся.

Пример 2.28 *Сходящиеся последовательности в метрическом пространстве $(\mathbb{R}, d_2)$ есть в точности сходящиеся в обычном смысле последовательности на $\mathbb{R}$.*

Лемма 2.29 *Всякая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве сходится к одной точке.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность, причем $x_n \to x$ и $x_n \to y$. Тогда

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и, следовательно, $d(x, y) = 0$, откуда $x = y$. ■

Определение 2.30 Замыканием *подмножества Y метрического пространства X называют наименьшее (по включению) замкнутое подмножество в X, содержащее Y. Замыкание подмножества Y обозначают через $\overline{Y}$.*

Лемма 2.31 *У всякого подмножества Y метрического пространства X замыкание существует и единственно, а именно,*

$$\overline{Y} := \bigcap_{\substack{Z \text{ замкнуто в } X \\ \text{и содержит } Y}} Z$$

(пересечение всех замкнутых подмножеств множества X, содержащих Y).

Доказательство. Действительно, по теореме 2.26(4) подмножество $\overline{Y}$ замкнуто в X и если некоторое подмножество Z замкнуто в X и содержит Y, то

$$\overline{Y} = \overline{Y} \cap Z \subset Z.$$

■

Пример 2.32 *В метрическом пространстве $(\mathbb{R}, d_2)$ замыканием интервала (a, b) (так же как полуинтервалов $(a, b]$, $[a, b)$ и отрезка $[a, b]$) является отрезок $[a, b]$.*

Лемма 2.33 *Пусть X - метрическое пространство и Y — произвольное подмножество в X. Тогда*

$$\overline{Y} = \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{существует последовательность} \\ y_n \in Y, \text{ сходящаяся к } x \end{array} \right\}.$$

Другими словами, замыкание подмножества есть множество предельных точек этого подмножества.

Доказательство. Мы должны доказать, что

1. если $x \in \overline{Y}$, то существует последовательность $y_n \in Y$ сходящаяся к x;

2. если последовательность $\{y_n\}$ лежит в Y и $y_n \to x$, то $x \in \overline{Y}$.

(1) Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ пересечение $Y \cap B(x, \frac{1}{n})$ непусто. Действительно, если $Y \cap B(x, \frac{1}{n}) = \emptyset$, то замкнутое подмножество $X \setminus B(x, \frac{1}{n})$ содержит Y и, следовательно, содержит $\overline{Y}$, но при этом не содержит x, что противоречит тому, что $x \in \overline{Y}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем произвольно $y_n \in Y \cap B(x, \frac{1}{n})$. Тогда $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$ и, следовательно, $y_n \to x$.

(2) Если $x \notin \overline{Y}$, то так как $X \setminus \overline{Y}$ открыто, $x \in X \setminus \overline{Y}$ и $y_n \to x$, то существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $y_n \in X \setminus \overline{Y}$ для $n > N$. Но тогда $y_n \notin \overline{Y}$ и, значит, $y_n \notin Y$ для $n > N$. ■

Для функций на метрических пространствах определено понятие непрерывности.

Определение 2.34 *Функцию*

$$f : X \to \mathbb{R}$$

на метрическом пространстве X называют непрерывной в точке $x \in X$, *если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что*

$$f(B(x, \delta)) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) = B(f(x), \varepsilon).$$

Функцию f называют непрерывной, *если она непрерывна в каждой точке.*

Это определение обобщается следующим образом.

Определение 2.35 *Отображение*

$$\varphi : X \to Y$$

метрического пространства X *в метрическое пространство* Y *называют* непрерывным в точке $x \in X$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\varphi(B(x, \delta)) \subset B(\varphi(x), \varepsilon).$$

Отображение φ *называют* непрерывным, *если оно непрерывно в каждой точке.*

Пример 2.36 *Обычная функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна тогда и только тогда, когда эта функция, рассматриваемая как отображение метрического пространства* $(\mathbb{R}, d_2)$ *в себя, непрерывна.*

Пример 2.37 *Сдвиг вправо*

$$\ell^2 \to \ell^2, \qquad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$$

является непрерывным отображением.

Пример 2.38 *Пусть* $f(t) \in C[a, b]$. *Отображение умножения*

$$\mu_f : C[a, b] \to C[a, b], \qquad \mu_f(g)(t) = g(t)f(t)$$

является непрерывным отображением.

Пример 2.39 *Операция интегрирования*

$$\varphi : C[a, b] \to C[a, b], \qquad \varphi(g)(t) = \int_a^t g(\tau) d\tau$$

является непрерывным отображением.

Пример 2.40 *Линейное отображение*

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : (\mathbb{R}^n, d_p) \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$$

является непрерывным отображением.

Следующая лемма является обобщением леммы из анализа о том, что композиция непрерывных функций непрерывна.

Лемма 2.41 *Пусть X, Y, Z — метрические пространства и*

$$\varphi : X \to Y, \quad \psi : Y \to Z$$

— непрерывные отображения метрических пространств. Тогда их композиция

$$\psi \circ \varphi : X \to Z$$

непрерывна.

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$; мы должны доказать, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$\psi(\varphi(B_X(x, \delta))) \subset B_Z(\psi(\varphi(x)), \varepsilon). \tag{3}$$

Так как ψ непрерывно, то существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\psi(B_Y(\varphi(x), \alpha)) \subset B_Z(\psi(\varphi(x)), \varepsilon). \tag{4}$$

Так как φ непрерывно, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$\varphi(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(\varphi(x), \alpha). \tag{5}$$

Теперь (3) следует из (4) и (5). ■

В следующей лемме — критерий непрерывности отображений метрических пространств.

Лемма 2.42 *Отображение $\varphi : X \to Y$ метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда для всякой последовательности $\{x_n\}$ в X, сходящейся к x, последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ сходится к $\varphi(x)$.*

Доказательство. Допустим отображение $\varphi : X \to Y$ непрерывно и пусть последовательность $\{x_n\}$ в X сходится к x. Мы должны доказать, что последовательность $\varphi(x_n)$ сходится к $\varphi(x)$. Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Из непрерывности отображения φ следует, что существует $\delta > 0$ такое, что $\varphi(B(x, \delta)) \subset B(\varphi(x), \varepsilon)$. Из сходимости $x_n \to x$ следует, что существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in B(x, \delta)$ для всех $n > N$. Следовательно, $\varphi(x_n) \in \varphi(B(x, \delta)) \subset B(\varphi(x), \varepsilon)$ для всех $n > N$, что и доказывает сходимость $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$.

Теперь допустим, что для всякой сходящейся последовательности $x_n \to x$ в X последовательность $\varphi(x_n)$ сходится к $\varphi(x)$ и докажем, что отображение φ непрерывно. Будем доказывать от противного, т.е. допустим, что φ не непрерывно и получим противоречие. Если φ не непрерывно, то оно не непрерывно хотя бы в одной точке, скажем $x \in X$. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\varphi(B(x, \delta)) \not\subset B(\varphi(x), \varepsilon)$ для любого $\delta > 0$. В частности, $\varphi(B(x, \frac{1}{n})) \not\subset B(\varphi(x), \varepsilon)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и, значит, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ такой, что $\varphi(x_n) \notin B(\varphi(x), \varepsilon)$. Нетрудно заметить, что $x_n \to x$, но $\varphi(x_n) \not\to \varphi(x)$. Противоречие. ■

Следствие 2.43 *Функция f на метрическом пространстве X непрерывна тогда и только тогда, когда для всякой последовательности $\{x_n\}$ в X, сходящейся к x, числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x)$.*

Определение 2.44 *Подмножество метрического пространства X называют* компактным*, если из всякой последователь-*

ности, лежащей в этом подмножестве, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу этого подмножества. В частности, метрическое пространство компактно, если из всякой последовательности в этом пространстве можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Пример 2.45 *Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Из теоремы Больцано — Вейерштрасса следует, что подмножество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. В частности, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ не компактно.*

Определение 2.46 *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Последовательность $x_i \in X$ называют* последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ для любых $n, m > N$.*

Нетрудно доказать, что в метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.

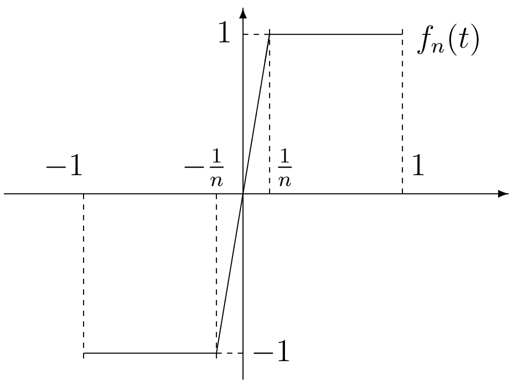
Последовательности Коши в метрическом простанстве $(\mathbb{R}, d_2)$ есть в точности известные нам из анализа последовательности Коши на $\mathbb{R}$. Напомним, что на вещественной прямой последовательности Коши сходятся. **Однако не во всяком метрическом пространстве последовательности Коши сходятся** В связи с таким обстоятельством дается следующее определение.

Определение 2.47 *Метрическое пространство называют* полным*, если всякая последовательность Коши в нем сходится.*

Пример 2.48 *Из курса анализа мы знаем, что метрическое простанство* $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *полно. В дальнейшем мы установим полноту метрических пространств* $C[a,b]$, $(\mathbb{R}^n, d_p)$ *и* ℓ^p, *где* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Пример 2.49 *Докажем, что метрическое простанство* $C_1[-1,1]$ *не полно. Для этого в* $C_1[-1,1]$ *рассмотрим последовательность функций*

$$f_n(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leqslant t < -\frac{1}{n}, \\ nt, & \text{если } -\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{если } \frac{1}{n} < t \leqslant 1. \end{cases}$$



Нетрудно проверить, что $f_n(t)$ *является последовательностью Коши и при этом не сходится. Аналогично доказывается, что для любых* $a < b$ *метрическое простанство* $C_1[a,b]$ *не полно.*

Пополнения метрических пространств

Подмножество Y метрического пространства X называют *всюду плотным* в X, если $\overline{Y} = X$. Ясно, что Y плотно в X

тогда и только тогда, когда в каждом открытом шаре пространства X содержится некоторый элемент из Y.

Пример 2.50 *Подмножество*

$$\mathbb{Q}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Q} \text{ для каждого } i\}$$

всюду плотно в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

Пример 2.51 *По теореме Вейерштрасса,*

$$P[a, b] := \{f(t) \in C[a, b] \mid f(t) \text{ — многочлен}\}$$

всюду плотно в $C[a, b]$. *Другими словами, всякую непрерывную на отрезке функцию можно с любой точностью равномерно приблизить многочленом.*

Теорема 2.52 *На метрическом пространстве* (X, d) *рассмотрим равенство*

$$F(x) = 0, \tag{6}$$

где F *— непрерывная на* X *функция. Тогда если* (6) *выполнено на некотором всюду плотном подмножестве пространства* X, *то* (6) *выполнено всюду на* X.

Доказательство. Пусть (6) выполнено на всюду плотном подмножестве Y пространства X и пусть $x \in X$. Так как $X = \overline{Y}$, то x является пределом некоторой сходящейся последовательности $\{y_n \in Y\}$. По непрерывности имеем

$$F(x) = F\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) = 0.$$

■

Теорема 2.52 останется верной (с тем же по сути доказательством), если в ее формулировке равенство (6) заменить на нестрогое неравенство или импликацию с участием непрерывных функций и отображений.

Определение 2.53 *Метрическое пространство* $(\overline{X}, \overline{d})$ *называют* пополнением *метрического пространства* (X, d)*, если*

(Compl$_1$) $X \subset \overline{X}$;

(Compl$_2$) $\overline{X}$ *является полным метричеким пространством;*

(Compl$_3$) $\overline{d}|_X = d$*, другими словами, пространство* (X, d) *является подпространством пространства* $(\overline{X}, \overline{d})$*;*

(Compl$_4$) X *всюду плотно в* $\overline{X}$*.*

Теорема 2.54 *Для всякого метрического пространства его пополнение существует и единственно.*

2.3 Топологические пространства

Множество X называют *топологическим пространством*, если задана его *топология*. Задать топологию на X — это значит среди подмножеств множества X указать *открытые* подмножества так, что

1. X и $\emptyset$ являются открытыми подмножествами;

2. объединение любого множества открытых подмножеств является открытым подмножеством;

3. пересечение конечного множества открытых подмножеств является открытым подмножеством.

Всякое метрическое пространство является топологическим пространством. А именно, топологию на метрическом пространстве задают открытые подмножества определенные в определении 2.20. То, что эти открытые подмножества действительно задают топологию (т.е. для них выполнены свойства (1) — (3)), следует из теоремы 2.26. Таким образом, *метрика задает топологию*. Если топологию можно задать некоторой метрикой, то такую топологию называют *метризуемой*. Приведем пример топологического пространства, топология которого неметризуема.

Пример 2.55 *Рассмотрим прямую* $\mathbb{R}$ *с* топологией Зарисского. *В топологии Зарисского на* $\mathbb{R}$ *открытыми подмножествами являются пустое множество и всякое подмножество вида*

$$\mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\},$$

где $n \geqslant 0$ *и* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. *Докажем, что топология Зарисского неметризуема. Допустим, что это не так и существует метрика, определяющая топологию Зарисского. Рассмотрим последовательность*

$$\{x_n = n\}. \tag{7}$$

Нетрудно заметить, что для любого непустого открытого подмножества U *все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат этому открытому подмножеству. Следовательно, для любой точки* $x \in \mathbb{R}$ *имеем: для любого* $\varepsilon > 0$ *все члены последовательности* (7)*, начиная с некоторого номера, попадают в* ε*-окрестность точки* x *и, таким образом,* $x_n \to x$. *Следовательно, последовательность* (7) *имеет пределом каждую точку пространства* $\mathbb{R}$. *Но, согласно лемме 2.29, в метрическом пространстве такое невозможно. Следовательно, топология Зарисского на прямой* $\mathbb{R}$ *неметризуема.*

В функциональном анализе часто работают с *секвенциальными топологиями*. Задать секвенциальную топологию на множестве X — это значит указать сходящиеся последовательности элементов множества X и для каждой сходящейся последовательности указать ее пределы (пределов может быть много).

При этом должны быть выполнены следующие аксиомы.
(Seq_1) *Всякая постоянная последовательность* $\{x_n = a\}$ *сходится к* a
(Seq_2) *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к* a *и* $\{y_m\}$ *— подпоследовательность последовательности* $\{x_n\}$*, то* $\{y_m\}$ *сходится к* a

Топология определяет секвенциальную топологию. А именно, если X — топологическое пространство, то последовательность $\{x_n\}$ считается сходящейся к a, если для любого открытого подмножества U, содержащего a, существует $N \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n \in U$ для всех $n > N$. Однако разные топологии могут определять одинаковые секвенциальные топологии (другими словами, для данной секвенциальной топологии могут существовать разные топологии, которые ее определяют).

Для данной секвенциальной топологии всегда существует по крайней мере одна топология, которая ее определяет. Например, такой является топология, по которой открытыми являются

1. пустое подмножество;
2. все пространство X;
3. подмножества A, такие, что для любой сходящейся последовательности $\{x_n\}$, лежащей в $X \setminus A$, ее предел принадлежит $X \setminus A$.

Обычно, когда определяют секвенциальную топологию, не рассматривают топологии, которые ее определяют; все вопросы ставятся и решаются в рамках самой секвенциальной топологии.

2.4 Сжимающие отображения

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Отображение

$$\varphi : X \to X \tag{8}$$

называют *сжимающим*, если существует число $\alpha < 1$ такое, что

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \alpha\, d(x, y) \qquad \text{для любых} \quad x, y \in X. \tag{9}$$

Коэффициентом сжатия отображения φ называют наименьшее α, для которого выполнено (9) (несложно доказать, что такое α существует).

Лемма 2.56 *Всякое сжимающее отображение непрерывно.*

Доказательство. Пусть φ — сжимающее отображение с коэффициентом сжатия α. Мы должны проверить, что для любых $x \in X$, $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\varphi(B(x, \delta)) \subset B(\varphi(x), \varepsilon). \tag{10}$$

Возьмем $\delta = \varepsilon$. Тогда для любой точки $y \in B(x, \varepsilon))$ имеем

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \alpha d(x, y) < \varepsilon,$$

и, значит, $\varphi(y) \in B(\varphi(x), \varepsilon)$, что и доказывает (10). ■

Определение 2.57 *Точку x называют* неподвижной точкой *сжимающего отображения* (8), *если $\varphi(x) = x$.*

Теорема 2.58 (Т. Банаха о сжимающих отображениях) *Всякое сжимающее отображение $\varphi : X \to X$ полного метрического пространства имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть α — коэффициент сжатия отображения φ.

Докажем, что существует хотя бы одна точка $x_\varphi \in X$ такая, что $\varphi(x_\varphi) = x_\varphi$. Рассмотрим степени $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \ldots$ отображения φ, где

$$\varphi^n : X \to X, \qquad \varphi^n(x) = \underbrace{\varphi(\varphi(\ldots(\varphi(\varphi}_{n}(x)))\ldots)).$$

Возьмем любую точку $x_0 \in X$ и рассмотрим последовательность

$$x_0,\ x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi^2(x_0),\ \ldots\ ,\ x_n = \varphi^n(x_0),\ \ldots. \tag{11}$$

Утверждение A. *Для любых* $0 \leqslant n \leqslant m$ *выполнено*

$$d(x_n, x_m) \leqslant \alpha^n d(x_0, \varphi^{m-n}(x_0)).$$

Доказательство.

$$d(x_n, x_m) = d(\varphi^n(x_0), \varphi^m(x_0)) \leqslant \alpha d(\varphi^{n-1}(x_0), \varphi^{m-1}(x_0)) \leqslant$$
$$\alpha^2 d(\varphi^{n-2}(x_0), \varphi^{m-2}(x_0)) \leqslant \ \ldots \ \leqslant \alpha^n d(x_0, \varphi^{m-n}(x_0)).$$

■

Утверждение B. *Последовательность* (11) *является последовательностью Коши.* Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ мы должны подобрать $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы для любых x_n и x_m, где $n, m > N$ было выполнено

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{12}$$

Для $1 \leqslant n \leqslant m$, используя утверждение А и утверждение задачи 2.69, имеем

$$\begin{gathered} d(x_n, x_m) \leqslant \alpha^n d(x_0, \varphi^{m-n}(x_0)) \leqslant \\ \alpha^n (d(x_0, \varphi(x_0)) + d(\varphi(x_0), \varphi^2(x_0)) + \\ \ldots + d(\varphi^{m-n-1}(x_0), \varphi^{m-n}(x_0))) \leqslant \\ \alpha^n (d(x_0, \varphi(x_0)) + \alpha d(x_0, \varphi(x_0)) + \ldots + \alpha^{n-m-1} d(x_0, \varphi(x_0))) = \\ \alpha^n (1 + \alpha + \ldots + \alpha^{n-m-1}) d(x_0, \varphi(x_0)) < \alpha^n \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, \varphi(x_0)) \end{gathered} \tag{13}$$

Берем теперь N так, чтобы $\alpha^N \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, \varphi(x_0)) < \varepsilon$. Из (13) следует, что для такого N выполнено (12). ■

Из того, что пространство X полно и, согласно утверждению В, (11) является последовательностью Коши, следует, что последовательность (11) сходится. Пусть x_φ — предел последовательности (11). Используя доказанную в лемме 2.56 непрерывность отображения φ, получаем

$$\varphi(x_\varphi) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_\varphi$$

и, таким образом, x_φ является неподвижной точкой отображения φ.

Докажем, что неподвижная точка единственна. Пусть x, y — неподвижные точки отображения φ. Тогда

$$d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \alpha d(x, y),$$

откуда следует, что $d(x, y) = 0$ и, следовательно, $x = y$. ■

Замечание 2.59 *Доказательство теоремы Банаха конструктивно, т.е. дает алгоритм для нахождения неподвижной* *точки. А именно, возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и построим последовательность (11). Согласно доказательству теоремы, эта последовательность будет сходиться к неподвижной точке x_φ. Более того, из полученной при доказательстве теоремы Банаха оценки (13) в пределе при $m \to \infty$ получаем*

$$d(x_n, x_\varphi) < \alpha^n \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, \varphi(x_0)).$$

Таким образом, если мы хотим приблизительно (с точностью до ε) найти неподвижную точку x_φ, то можно взять произвольную точку $x_0 \in X$ и найти n такое, что

$$\alpha^n \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, \varphi(x_0)) \leqslant \varepsilon.$$

И тогда x_n приблизительно (с точностью до ε) равна x_φ.

Рассмотрим сжимающие отображения произвольных (не обязательно полных) метрических пространств. Согласно утверждению задачи 2.112, среди этих отображений есть такие, у которых есть неподвижные точки, и такие, у которых нет неподвижных точек.

Лемма 2.60
1. *У всякого сжимающего отображения существует не более одной неподвижной точки.*
2. *Пусть сжимающее отображение $\varphi : X \to X$ имеет неподвижную точку x_φ. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ имеем*
$$x_\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x_0). \tag{14}$$

Доказательство. (1) Пусть x, y — неподвижные точки сжимающего отображения φ. Достаточно доказать, что $x = y$. Имеем

$$d(x,y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \alpha d(x,y),$$

где α — коэффициент сжатия отображения φ. Отсюда следует, что $d(x, y) = 0$ и, следовательно, $x = y$.

(2) Имеем

$$d(x_\varphi, \varphi^n(x_0)) = d(\varphi(x_\varphi), \varphi(\varphi^{n-1}(x_0))) \leqslant \alpha d(x_\varphi, \varphi^{n-1}(x_0)) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n d(x_\varphi, x_0) \to 0$$

при $n \to \infty$, что и доказывает (14). ■

Применения теоремы Банаха о сжимающих отображениях

Здесь мы покажем как можно применять теорему Банаха о сжимающих отображениях для решения конкретных вычислительных задач. Подчеркнем, что приводимые нами решения не оптимизированы с алгоритмической точки зрения; они только показывают как *в принципе* можно применять теорему Банаха для решения задач такого типа.

Задача 1. *Дан отрезок* $[a, b]$ *и дифференцируемая функция*

$$f : [a, b] \to [a, b]$$

такая, что для некоторого $\alpha < 1$ *выполнено*

$$|f'(x)| \leqslant \alpha \quad \text{для всех} \quad x \in [a, b].$$

Требуется на отрезке $[a, b]$ *найти решение уравнения*

$$f(x) = x.$$

Для решения этой задачи сначала необходимо заметить следующее.

Лемма 2.61 *В ситуации, описанной в задаче 1, рассмотрим отрезок* $[a, b]$ *как метрическое пространство с обычной метрикой. Тогда* f *(как отображение метрического пространства) является сжимающим.*

Доказательство. Возьмем произвольные $x', x'' \in [a, b]$. По теореме Лагранжа существует точка $c \in [x', x'']$ такая, что

$$f(x') - f(x'') = f'(c)(x' - x'')$$

и, следовательно,

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(c)(x' - x'')| = |f'(c)||x' - x''| \leqslant \alpha|x' - x''|.$$

■

Теперь, по теореме Банаха, решение задачи 1 является неподвижной точкой отображения f. Это решение можно найти с любой точностью, действуя так, как указано в замечании 2.59.

Проиллюстрируем указанный выше способ решения задачи 1 на следующем примере.

Пример 2.62 *На отрезке* $[-1, 1]$ *найдем решение уравнения*

$$\cos(x) = x \tag{15}$$

с точностью до 0.01.

Это частный случай задачи 1 при $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) = \cos(x)$ *и*

$$\alpha = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\cos'(x)| = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\sin(x)| = \sin(1).$$

Действуя так как описано в замечании 2.59 берем $x_0 = 1$ *и, используя компьютер, находим, что*

$$\alpha^n \frac{1}{1 - \alpha} |1 - \cos(1)| \leqslant 0.01$$

при $n = 33$. *Следовательно,*

$$(\cos)^{33}(1) \approx 0.739$$

с точностью до 0.01 есть решение уравнения (15)

Задача 2. *На отрезке $[a, b]$ дана дифференцируемая функция $F(x)$ такая, что*

$$F(a) < 0, \quad F(b) > 0,$$

и существуют α_1, α_2 такие, что

$$0 < \alpha_1 \leqslant F'(x) \leqslant \alpha_2 \quad \text{для всех} \quad x \in [a, b].$$

Таким образом, $F(x)$ строго меньше нуля при $x = a$, строго больше нуля при $x = b$ и при этом строго возрастает (последнее следует из неравенства $0 < \alpha_1 \leqslant F'(x)$). Следовательно, $F(x)$ на $[a, b]$ принимает значение 0 в единственной точке. Требуется найти эту точку.

Эту задачу можно свести к предыдущей. А именно, рассмотрим функцию

$$f(x) := x - \lambda F(x),$$

где $\lambda > 0$. Тогда

$$F(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = x.$$

Осталось подобрать λ так, чтобы для $f(x)$ были выполнены предположения задачи 1. Утверждается, что для этого достаточно взять λ таким, чтобы было выполнено

$$1 - \lambda\alpha_2 > 0. \tag{16}$$

Действительно,

$$f'(x) = (x - \lambda F(x))' = 1 - \lambda F'(x)$$

и, следовательно,

$$1 - \lambda\alpha_2 \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \lambda\alpha_1.$$

Отсюда и из (16) получаем

$$0 \ < \ 1 - \lambda\alpha_2 \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \lambda\alpha_1 =: \alpha \ < \ 1 \qquad (17)$$

и, следовательно,

$$|f'(x)| \leqslant \alpha < 1 \quad \text{для всех} \quad t \in [a, b].$$

Наконец, так как $f(x)$ возрастает на $[a, b]$ (это следует из (17)),

$$f(a) = a - \lambda F(a) > a \quad \text{и} \quad f(b) = b - \lambda F(b) < b,$$

то f отображает отрезок $[a, b]$ на себя.

Пример 2.63 *Рассмотрим многочлен* $F(x) = x^5 + x^3 + 4x + 1$ *на отрезке* $[-1, 1]$. *Имеем*

$$F(-1) = -5 \ < \ 0, \qquad F(1) = 7 \ > \ 0.$$

Кроме того,

$$0 \ < \ 4 = \alpha_1 \leqslant F'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4 \leqslant 12 = \alpha_2$$
$$\textit{для всех} \quad x \in [a, b].$$

Таким образом, на отрезке $[-1, 1]$ *многочлен* $F(x)$ *принимает значение* 0 *в единственной точке. Найдем эту точку с точностью до* 0.01.

Рассмотрим $f(x) = x - \lambda F(x)$, *где* λ *возьмем так, чтобы было выполнено* (16). *Например, возьмем* $\lambda = \frac{1}{15}$. *Тогда*

$$f(x) = \frac{1}{15}(-x^5 - x^3 + 11x - 1)$$

и

$$|f'(x)| \leqslant \alpha = 1 - \lambda\alpha_1 = \frac{11}{15}.$$

Берем $x_0 = 0$ и, используя компьютер, находим, что

$$\alpha^n \frac{1}{1-\alpha}|x_0 - f(x_0)| = \frac{1}{4}\left(\frac{11}{15}\right)^n \leqslant 0.01$$

при $n = 11$. Следовательно,

$$f^{11}(0) \approx -0.239$$

с точностью до 0.01 есть решение уравнения $f(x) = x$ и тем самым решение уравнения $F(x) = 0$.

2.5 Метрика Хаусдорфа

Фиксируем метрическое пространство (X, d), про которое мы будем предполагать, что в нем из всякой ограниченной последоваетельности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для вопросов, которые мы будем рассматривать в этом параграфе, основным примером такого метрического пространства является $(\mathbb{R}^n, d_2)$. Обозначим через $\mathcal{X}$ множество непустых замкнутых ограниченных подмножеств в X.

Сначала мы определим на $\mathcal{X}$ функцию расстояния ρ так, чтобы множество $\mathcal{X}$ с этой функцией расстояния было метрическим пространством. Казалось бы, правильное определение расстояния между подмножествами $A, B \in \mathcal{X}$ должно быть таким:

$$\rho(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b). \tag{18}$$

Однако так определенная функция расстояния не удовлетворяет аксиомам (Metr_1) и (Metr_3) метрических пространств (задача 2.116).

Правильное определение расстояния между подмножествами A, $B \in \mathcal{X}$ следующее:

$$\rho_H(A, B) := \max\left\{\sup_{a\in A}\left\{\inf_{b\in B} d(a,b)\right\},\ \sup_{b\in B}\left\{\inf_{a\in A} d(a,b)\right\}\right\}. \quad (19)$$

Геометрический смысл этого определения следующий. Возьмем подмножество A и для $\varepsilon > 0$ рассмотрим его ε-окрестность, т.е.,

$$B(A, \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon \text{ для некоторого } a \in A\}.$$

Из утверждения задачи 2.83 и ограниченности множества B следует, что ε-окрестность множества A содержит B для достаточно больших ε; пусть ε_A — нижняя грань таких ε. Аналогично определим ε_B как нижнюю грань таких ε, что ε-окрестность множества B содержит A. Теперь расстояние $\rho_H(A, B)$ определяется как максимум ε_A и ε_B.

Теорема 2.64 *Множество $\mathcal{X}$ с функцией расстояния* (19) *является метрическим пространством.*

Определенную выше метрику ρ_H на множестве $\mathcal{X}$ называют *метрикой Хаусдорфа.*

Теорема 2.65 *Множество $\mathcal{X}$ непустых замкнутых ограниченных подмножеств в X полно по метрике Хаусдорфа.*

Доказательство. Пусть $A_n \in \mathcal{X}$ — последовательность Коши. Положим

$$B := \{x \in X \mid \text{существует } \varepsilon > 0 \text{ такое, что } B(x, \varepsilon) \cap A_n = \emptyset \text{ для почти всех } n\}.$$

Нетрудно заметить, что B открыто и, следовательно,

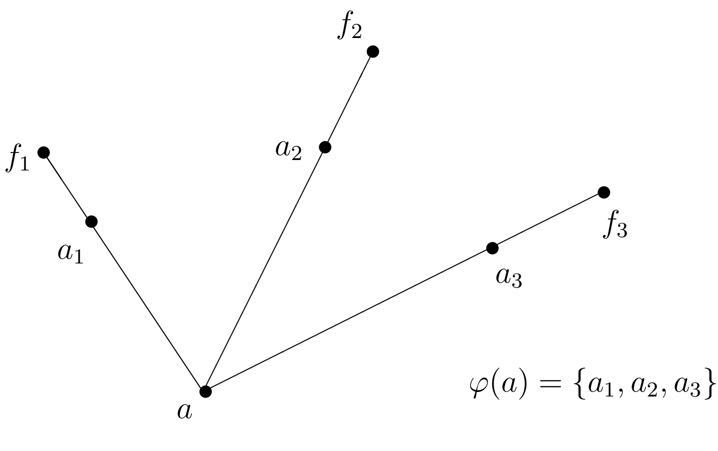
$$A = X \setminus B$$

замкнуто. Проверку того, что A непусто, ограничено и $\lim A_n = A$ по метрике Хаусдорфа оставляем читателям в качестве упражнения. ■

Укажем способ построения сжимающих отображений пространства $\mathcal{X}$ в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой d_2.

Фиксируем произвольные точки $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}^n$ и число $k > 1$. Для точки $a \in \mathbb{R}^n$ определим следующее подмножество:

$$\varphi_{f_1,\ldots,f_m,k}(a) :=$$
$$\left\{ a_1, \ldots, a_m \mid a_i \in [a, f_i], \text{ причем } \frac{d_2(f_i, a)}{d_2(f_i, a_i)} = k \right\}.$$



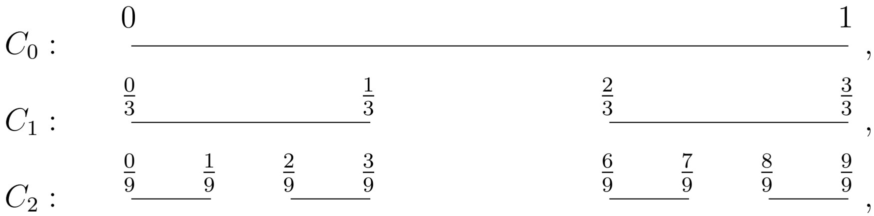
Определим отображение

$$\Phi = \Phi_{f_1,\ldots,f_m,k} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad \Phi(A) = \bigcup_{a \in A} \varphi_{f_1,\ldots,f_m,k}(a).$$

Нетрудно проверить, что построенное отображение Φ является сжимающим.

Пример 2.66 *Рассмотрим случай $X = \mathbb{R}$, $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, $k = 3$. Пусть Φ — сжимающее отображение, построенное по описанному выше способу. Мы докажем существование неподвижной точки отображения Φ, указав ее явно. А именно, неподвижной точкой отображения Φ является знаменитое* канторово множесто*.*

Канторово множество C определяется следующим образом. Сначала индуктивно определим следующие замкнутые подмножества на прямой $\mathbb{R}$:



и т.д.

Так как C_n является объединением конечного множества отрезков, то оно замкнуто. Следовательно, пересечение

$$C := \bigcap_{n \geqslant 0} C_n$$

замкнуто. Нетрудно заметить, что число x принадлежит C тогда и только тогда, когда троичная запись числа x имеет вид

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots, \quad \textit{где } x_n \neq 1 \textit{ для всех } n.$$

Нетрудно проверить, что

$$\varphi(0, x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots) = \{0, 0 x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots,\ 0, 2 x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots\},$$

откуда следует, что $\Phi(C) = C$. *Таким образом, канторово множество* C *является неподвижной точкой отображения* Φ.

Построенная неподвижная точка отображения Φ — канторово множество C — является *фракталом.*

Пример 2.67 $X = \mathbb{R}^2$, f_1, f_2, f_3 — *произвольные три точки, не лежащие на прямой,* $N = 2$. *Неподвижной точкой отображения* $\Phi_{f_1,f_2,f_3,2}$ *является* треугольник Серпинского.

Аналогично многие другие известные фракталы можно представить как неподвижные точки сжимающих отображений.

Хорошим введением в теорию фракталов является книга [BP].

2.6 Задачи

Задача 2.68 *Докажите, что в метрическом пространстве* (X, d) *для любых* $x, y, z \in X$ *выполнено*

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leqslant d(y, z).$$

Задача 2.69 *Докажите, что в метрическом пространстве* (X, d) *для любых* $x_1, \dots, x_n \in X$ *выполнено неравенство n-угольника*

$$d(x_1, x_n) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Задача 2.70 *Докажите, что в метрическом пространстве* (X, d) *для любых* $x, y, u, z \in X$ *выполнено*

$$|d(x, y) - d(u, z)| \leqslant d(x, u) + d(y, z).$$

Задача 2.71 *Докажите, что $\mathbb{R}$ с функцией расстояния*

$$d(x,y) = (x-y)^2$$

не является метрическим пространством.

Задача 2.72 *В пространстве $(\mathbb{R}^n, d_p)$ найдите расстояния:*

1. $d_1((2,2,5,9),(0,-3,4,7))$;
2. $d_4((1,2,0),(0,2,3))$;
3. $d_\infty((1,1,1,1),(1,-1,1,-1))$.

Задача 2.73 *В пространстве ℓ^p найдите расстояния:*

1. $d_1((1,1,1,1,1,0,0,0,\ldots),(0,0,0,\ldots))$;
2. $d_\infty((-1,1,0,0,0,\ldots),(0,0,8,0,0,0,\ldots))$;
3. $d_2((-1,1,0,0,0,\ldots),(\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4},\ldots))$.

Задача 2.74 *В пространстве $C[-1,2]$ найдите расстояния:*
(1) $d(t^2,t)$; *(2)* $d(|t|,\frac{t}{2})$.

Задача 2.75

1. *Докажите, что в метрическом пространстве шар меньшего радиуса содержится в шаре большего радиуса с тем же центром, причем включение может быть нестрогим.*
2. *Покажите на примере, что в метрическом пространстве шар меньшего радиуса может строго содержать шар большего радиуса.*

Задача 2.76 *Докажите, что в метрическом пространстве:*

1. *из* $d(x,x') > r + r'$ *следует* $B(x,r) \cap B(x',r') = \emptyset$*;*

2. *из* $d(x,x') < r + r'$*, вообще говоря, не следует* $B(x,r) \cap B(x',r') \neq \emptyset$ *(приведите пример);*

3. *из* $r > d(x,x') + r'$ *следует* $B(x,r) \supset B(x',r')$*.*

Задача 2.77 *Пусть* (X,d) *— метрическое пространство. На* X *рассмотрим функцию расстояния*

$$\delta(x,y) := f(d(x,y)),$$

где

$$f : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

— равная нулю в нуле, строго возрастающая, вогнутая функция. Докажите, что пространство X *с функцией расстояния* δ *является метрическим пространством.*

Задача 2.78 *На множестве* $\mathbb{N}$ *натуральных чисел определим функцию расстояния*

$$d(n,m) := \begin{cases} 0, & \text{если } n = m, \\ 1 + \frac{1}{n+m}, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Докажите, что $\mathbb{N}$ *с такой функцией расстояния является метрическим пространством.*

Задача 2.79 (Метрика Хемминга) *Пусть* $\mathcal{A}$ *— некоторый алфавит, состоящий из конечного множества букв,* $\mathcal{A}^n$ *— множество слов длины* n *над алфавитом* $\mathcal{A}$*. Определим расстояние между словами*

$$d((a_1,a_2,\ldots,a_n),(a'_1,a'_2,\ldots,a'_n)) =$$
$$\{\text{число позиций } i, \text{ на которых } a_i \neq a'_i\}.$$

Докажите, что пространство $\mathcal{A}^n$ с такой функцией расстояния является метрическим пространством.

Задача 2.80 *Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый алфавит, состоящий из конечного множества букв, $\mathcal{A}^*$ — множество слов конечной длины над алфавитом $\mathcal{A}$. Рассмотрим следующие* элементарные преобразования *над словами из $\mathcal{A}^*$:*

- *удаление с произвольного места одной буквы;*
- *добавление на произвольное место одной буквы;*
- *замена на произвольном месте одной буквы на другую букву.*

Определим расстояние между словами как минимальное число элементарных преобразований, с помощью которых можно одно слово преобразовать в другое. Докажите, что пространство $\mathcal{A}^*$ с такой функцией расстояния является метрическим пространством.

Задача 2.81 *Пусть $1 \leqslant p < q$. Докажите, что $\ell^p \subset \ell^q$.*

Задача 2.82 *В шаре $B((0,0,0,\ldots),1) \subset \ell^2$ разместите счетное множество шаров радиуса $\frac{1}{3}$.*

Задача 2.83 *Докажите, что подмножество A метрического пространства X ограничено тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ существует $r > 0$ такое, что $A \subset B(x,r)$.*

Задача 2.84 *Докажите, что в метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

Задача 2.85 *Нарисуйте подмножества плоскости, которую заполняют графики функций из:*

(1) $B_{C[0,1]}(t,1)$; *(2)* $B^c_{C[0,1]}(t,1)$; *(3)* $B_{C[0,1]}(t^2,1)$.

Задача 2.86 *Верно ли, что график всякой функции из шара* $B_{C[0,2]}(-t^2+2t,4)$ *лежит ниже прямой* $y=t+5$*?*

Задача 2.87 *Верно ли, что график всякой функции из шара* $B_{C_1[0,1]}(0,1)$ *лежит ниже прямой* $y=10$*?*

Задача 2.88 *Докажите, что подмножество*

$$\left\{ f\in C[0,1] \;\middle|\; \begin{array}{c} f \text{ дифференцируема на } [0,1], f(0)=0, \\ |f'(t)|\leqslant 1 \text{ для всех } t\in[0,1] \end{array} \right\} \subset C[0,1]$$

ограничено.

Задача 2.89 *Докажите, что в дискретном метрическом пространстве всякое подмножество одновременно открыто и замкнуто.*

Задача 2.90 *Докажите, что в конечном метрическом пространстве всякое подмножество одновременно открыто и замкнуто.*

Задача 2.91 *Докажите, что подмножество*

$$\{f(t)\in C[a,b] \mid f(t)<A \text{ для всех } t\in[a,b]\}\subset C[a,b]$$

открыто.

Задача 2.92 *Докажите, что в* ℓ^p, *где* $p\geqslant 1$ *из сходимости вытекает покоординатная сходимость, т.е.*

$$(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\ldots)\to(x_1,x_2,\ldots) \quad\Longrightarrow\quad x_i^{(n)}\to x_i \text{ для каждого } i.$$

Задача 2.93 *Докажите, что:*

1. *при $n \geqslant 2$ элементы*

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots\right), \; b_n = (0, \dots, 0, \overset{n}{1}, 0, \dots) \; \in \; \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

лежат в ℓ^2;

2. *последовательность $\{a_n\}$ сходится в ℓ^2 к $(0, 0, 0, \dots)$;*

3. *последовательность $\{b_n\}$ не сходится в ℓ^2 (хотя покоординатно эта последовательность сходится к $(0, 0, 0, \dots)$).*

Задача 2.94 *На примере покажите, что в метрическом пространстве замыкание открытого шара может не совпадать с замкнутым шаром с тем же центром и того же радиуса.*

Задача 2.95 *Пусть A, B — подмножества метрического пространства X. Докажите, что:*

(1) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; *(2) если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$;*
(3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; *(4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.*

Задача 2.96 *Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ функция*

$$F_n : \ell^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2, \dots) \mapsto x_n$$

непрерывна.

Задача 2.97 *Докажите, что для любого $t_0 \in [a, b]$ функция*

$$F : C[a, b] \to \mathbb{R}, \qquad f(t) \mapsto f(t_0)$$

непрерывна на $C[a, b]$.

Задача 2.98 *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $x_0 \in X$. Докажите, что функция*

$$F : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto d(x, x_0)$$

непрерывна на X.

Задача 2.99 *Замкнуты ли в пространстве $C[0,1]$ следующие подмножества:*

1. *подмножество многочленов степени n, где $n \geqslant 0$;*
2. *подмножество многочленов степени не больше n, где $n \geqslant 0$;*
3. *подмножество $P[0,1]$ многочленов произвольной степени?*

Задача 2.100 *Докажите теорему Вейерштрасса: непрерывная на метрическом пространстве функция на всяком компактном подмножестве этого пространства ограничена и достигает своей нижней и верхней грани*

Задача 2.101 *Докажите, что* гильбертов кирпич

$$W = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2 \mid |x_n| \leqslant \frac{1}{n} \text{ для всех } n \geqslant 1 \right\}$$

является замкнутым ограниченным компактным подмножеством в ℓ^2.

Задача 2.102 *Докажите, что отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого подмножества открыт.*

Задача 2.103 *Верно ли, что при непрерывном отображении метрических пространств образ открытого подмножества открыт?*

Задача 2.104 *Верно ли, что при непрерывном отображении метрических пространств образ замкнутого подмножества замкнут?*

Задача 2.105 *Докажите, что при непрерывном отображении метрических пространств образ компактного подмножества компактен.*

Задача 2.106 *Докажите, что множество конечных подмножеств множества X с функцией расстояния*

$$d(A, B) = |A \Delta B|, \quad \text{где } A, B \subset X \text{ — конечные подмножества,}$$

является полным метрическим пространством.

Задача 2.107 *Докажите, что подмножество полного метрического пространства полно как метрическое пространство с индуцированной метрикой тогда и только тогда, когда оно замкнуто.*

Задача 2.108 *Докажите, что метрическое пространство, состоящее из конечного множества точек, полно.*

Задача 2.109 *Докажите, что произведение полных метрических пространств полно по каждой из перечисленных в примере 2.14 метрик.*

Задача 2.110 *Образ последовательности Коши при непрерывном отображении.*

1. *На примере покажите, что при непрерывном отображении метрических пространств последовательность Коши может перейти в последовательность, которая не является последовательностью Коши.*

2. *Докажите, что при непрерывном отображении полного метрического пространства в метрическое пространство последовательность Коши переходит в последовательность Коши.*

Задача 2.111 *Докажите, что замыкание подмножества*

$$\{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_n = 0 \text{ для почти всех } n\} \subset \ell^p,$$

где $p \geqslant 1$ совпадает со всем пространством ℓ^p.

Задача 2.112 *Рассмотрим интервал $(0,1)$ как метрическое пространство с обычной метрикой. Докажите, что:*

1. *отображение*

$$\varphi : (0,1) \to (0,1), \qquad \varphi(x) = \frac{1}{4}(2x+1)$$

   является сжимающим и имеет неподвижную точку;

2. *отображение*

$$\psi : (0,1) \to (0,1), \qquad \psi(x) = \frac{1}{2}x$$

   является сжимающим и не имеет неподвижной точки.

Задача 2.113 *Докажите, что если $\varphi : X \to X$ — сжимающее отображение, то для любого $n \in \mathbb{N}$ отображение $\varphi^n : X \to X$ является сжимающим.*

Задача 2.114 *Рассмотрим метрическое пространство* $\mathbb{R}^2$ *со стандартной метрикой. Докажите, что отображение*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ x \end{pmatrix}$$

не является сжимающим, но отображение φ^n *является сжимающим для всех* $n > 1$.

Задача 2.115 *Рассмотрим метрическое пространство* $[1, \infty)$ *со стандартной метрикой. Докажите, что отображение*

$$\varphi : [1, \infty) \to [1, \infty), \qquad \varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

является сжимающим.

Задача 2.116 *Пусть* X *— метрическое пространство, причем из всякой ограниченной последоваетельности в* X *можно выделить сходящуюся подпоследовательность и* $\mathcal{X}$ *— множество непустых ограниченных замкнутых подмножеств в* X. *Докажите, что функция расстояния* (18) *на множестве* $\mathcal{X}$ *удовлетворяет аксиоме* (Metr_2), *но, вообще говоря, не удовлетворяет аксиомам* (Metr_1) *и* (Metr_3) *метрических пространств.*

Задача 2.117 *В метрическом пространстрве* $X = \mathbb{R}$ *со стандартной метрикой найдите расстояния Хаусдорфа* $\rho_H(A, B)$ *для следующих* $A, B \in \mathcal{X}$:

1. $A = [0, 1],\ B = [2, 3]$;

2. $A = \{1, 2, 5, 9, 17\},\ B = \{2, 38, [3, 4]\}$.

Задача 2.118 *В метрическом пространстрве* $X = \mathbb{R}^2$ *со стандартной метрикой найдите расстояния Хаусдорфа* $\rho_H(A, B)$ *для следующих* $A, B \in \mathcal{X}$:

1. $A = \{(0,0)\}$, $B = \{(2,3),(-1,-2)\}$;

2. $A = \{(2,1),(3,4)\}$, $B = \{(0,1),(1,-3)\}$;

3. $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$, $B = \{[(0,1),(1,0)]\}$.

Указания к задачам

2.68. Неравенство из этой задачи эквивалентно двум неравенствам: $d(x,y) - d(x,z) \leqslant d(y,z)$ и $d(x,y) - d(x,z) \geqslant -d(y,z)$ каждое из которых есть неравенство треугольника.

2.69. Последовательно применяя неравенство треугольника, имеем: $d(x_1,x_n) \leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_n) \leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+d(x_3,x_n) \leqslant \ldots \leqslant d(x_1,x_2) + \ldots + d(x_{n-1},x_n)$.

2.70. Неравенство из этой задачи эквивалентно двум неравенствам: $d(x,y)-d(u,z) \leqslant d(x,u)+d(y,z)$ и $-(d(x,y)-d(u,z)) \leqslant d(x,u)+d(y,z)$ каждое из которых есть неравенство 4-угольника.

2.71. Для точек $0, 1$ и 2 не выполнено неравенство треугольника.

2.75. (1). Для $r < R$ имеем $B(a,r) = \{x \mid d(a,x) < r\} \subseteq \{x \mid d(a,x) < R\} = B(a,R)$. Включение будет нестрогим в случае дискретного метрического пространства для шаров с центром в любой точке и радиусов $r < R \leqslant 1$.

(2). $X = (0,6)$ с обычным расстоянием, $B(5,4) \subsetneqq B(3,3)$.

2.76. (1). От противного. Если $y \in B(x,r) \cap B(x',r')$, то $d(x,x') \leqslant d(x,y) + d(y,x') < r + r'$ — противоречие.

(2). В дискретном метрическом пространстве для любых точек $x \neq x'$ имеем $d(x,x') = 1 < \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$, но $B(x,\frac{2}{3}) \cap B(x,\frac{2}{3}) = \emptyset$.

(3). Если $y \in B(x',r')$, то $d(y,x) \leqslant d(y,x') + d(x',x) < r' + d(x',x) < r$ и, следовательно, $y \in B(x,r)$.

2.77. Очевидно, для функции расстояния δ выполнены первые две аксиомы метрических пространств и нам осталось доказать, что выполнена третья аксиома, т.е., неравенство треугольника $f(d(x,y)) + f(d(y,z)) \geqslant f(d(x,z))$. Положим $a = d(x,y)$, $b = d(y,z)$, $c = d(x,z)$; тогда $a + b \geqslant c$ (по неравенству треугольника) и мы должны доказать, что $f(a) + f(b) \geqslant f(c)$. Можно считать, что $c > a, b$. Так как функция f вогнута и $f(0) = 0$, то $f(a) \geqslant \frac{a}{c} f(c)$ и $f(b) \geqslant \frac{b}{c} f(c)$. Сложив эти неравенства, получаем $f(a) + f(b) \geqslant \frac{a}{c} f(c) + \frac{b}{c} f(c) = \frac{a+b}{c} f(c) \geqslant f(c)$.

2.78. Неравенство треугольника сводится к неравенству $1 + \frac{1}{n+m} \leqslant 2 + \frac{1}{n+k} + \frac{1}{k+m}$, справедливость которого очевидна.

2.79. Достаточно проверить неравенство треугольника $d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c)$, где $a, b, c \in \mathcal{A}^n$. По определению, это неравенство означает, что число позиций, на которых a отличается от c, не больше чем число позиций, на которых a отличается от b, плюс число позиций, на которых a отличается от b. Но это очевидно, так как если a отличается от c на некоторой позиции, то на этой позиции или a отличается от b или b отличается от c.

2.80. Множество $\mathcal{A}^*$ с описанной в условии задачи функцией расстояния является метрическим пространством, так как оно совпадает с метрическим пространством, описанным в примере 2.13. А именно, в этом примере в качестве вершин графа Γ возьмем слова из $\mathcal{A}^*$, причем две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда одну вершину-слово можно преобразовать в другую элементарным преобразованием.

2.81. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ сходится. Тогда, по необходимому условию сходимости, $|x_n| < 1$ при $n > N$, где $N \in \mathbb{N}$. Поскольку $p < q$, то $|x_n|^q < |x_n|^p$ при $n > N$ и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q$ сходится по признаку сравнения и, значит, $x \in \ell^q$.

2.82. $B((\frac{2}{3},0,0,\ldots),\frac{1}{3})$, $B((0,\frac{2}{3},0,\ldots),\frac{1}{3}),\ldots$

2.83. Достаточность сформулированного в задаче условия ограниченности подмножества A очевидна. Докажем необходимость. Пусть подмножество A содержится в некотором шаре $B(a,R)$. Тогда, как нетрудно проверить, для любого $x\in X$ имеем $A\subset B(x,d(a,x)+R)$.

2.84. Пусть $x_n\to a$. Тогда сходящаяся к нулю числовая последовательность $d(a,x_n)$ ограничена, $d(a,x_n)<C$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ лежит в шаре $B(a,C)$ и, значит, ограничена.

2.86. Да.

2.87. Нет.

2.88. От противного. Если рассматриваемое в задаче множество неограничено, то существует $f\in C[0,1]$ такая, что $f(0)=0$, $|f'(t)|\leqslant 1$ для всех $t\in[0,1]$ и $f(t_0)>2$, где $t_0\in[0,1]$. Тогда по теореме Лагранжа для функции f, определенной на отрезке $[0,t_0]$, существует $t_1\in[0,t_0]$ такая, что $f'(t_1)=\frac{f(t_0)-f(0)}{t_0-0}>2$. Противоречие.

2.89. Пусть X — дискретное метрическое пространство и $A\subset X$ — подмножество. Тогда $A=\cup_{a\in A}B(a,1)$ является объединением открытых подмножеств и, следовательно, открыто. Так как $X\setminus A$ открыто (по предыдущему), то $A=X\setminus(X\setminus A)$ замкнуто.

2.90. Пусть X — конечное метрическое пространство и $A\subset X$ — подмножество. Положим $d=\min_{x,y\in X,x\neq y}d(x,y)$. Тогда $A=\cup_{a\in A}B(a,d)$ является объединением открытых подмножеств и, следовательно, открыто. Так как $X\setminus A$ открыто (по предыдущему), то $A=X\setminus(X\setminus A)$ замкнуто.

2.91. Пусть Y — рассматриваемое в задаче подмножество. Для $f\in Y$ положим $d(f)=\inf_{t\in[a,b]}(A-f(t))$. Ясно, что $d(f)>0$ для любой $f\in Y$. Теперь имеем: $Y=\cup_{f\in Y}B(f,d(f))$ является объединением открытых подмножеств и, следовательно, открыто.

2.92. Если $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots) \to (x_1, x_2, \ldots)$ в ℓ^p, то $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^p \to 0$ и, следовательно, $x_i^{(n)} \to x_i$ для каждого i.

2.94. Рассмотрим дискретную метрику на множестве X, содержащем не менее двух элементов. Тогда $\overline{B(x,1)} = \{x\} \neq B^c(x,1) = X$ для любой $x \in X$.

2.95.(1). $\overline{\overline{A}} = \{$наименьшее замкнутое подмножество, содержащее $\overline{A}\ \} = \overline{A}$.

(2). $\overline{A} = \{$наименьшее замкнутое подмножество, содержащее $A\} \subset \{$наименьшее замкнутое подмножество, содержащее $B\} = \overline{B}$.

(3). С одной стороны, $\overline{A} \cup \overline{B} = \{$наименьшее замкнутое подмножество, содержащее $A\} \cup \{$наименьшее замкнутое подмножество, содержащее $B\} \supset \overline{A \cup B}$. С другой стороны, $\overline{A} \cup \overline{B} = (\overline{A} \cap (\overline{A \cup B})) \cup (\overline{B} \cap (\overline{A \cup B})) \subset \overline{A \cup B}$.

(4). Так как $\overline{A} \cap \overline{B}$ замкнуто и $\overline{A} \cap \overline{B} \ \supset\ A \cap B$, то $\overline{A} \cap \overline{B} \ \supset \overline{A \cap B}$.

2.96. Для $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots) \in \ell^2$, $\varepsilon > 0$ имеем $F_n(B(x^0, \varepsilon)) \subset B(x_n^0, \varepsilon)$, откуда следует непрерывность.

2.97. Для $f \in C[a,b]$, $\varepsilon > 0$ имеем $F(B(f, \varepsilon)) \subset B(f(t_0), \varepsilon)$, откуда следует непрерывность.

2.98. Для $x \in X$, $\varepsilon > 0$ имеем $F(B(x, \varepsilon)) \subset B(d(x, x_0), \varepsilon)$, откуда следует непрерывность.

2.99.(1). Нет.

(2). Да.

(3). Нет.

2.100. Пусть X — метрическое пространство, $Y \subset X$ — компактное подмножество, F — непрерывная функция на X. Положим $M = \sup_{y \in Y} F(y)$ и рассмотрим последовательность

$\{y_n\}$ элементов подмножества Y такую, что $F(y_n) \to M$. В силу компактности подмножества Y можно считать, что $y_n \to y_0 \in Y$. Из непрерывности функции F в точке y_0 вытекает, что $F(y_n) \to F(y_0)$, откуда следует, что F ограничена сверху на Y и достигает на Y своей верхней грани. Аналогично доказывается, что F ограничена снизу на Y и достигает на Y своей нижней грани.

2.103. Нет. При отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ открытое подмножество $\mathbb{R}$ переходит в подмножество $[-1, 1]$, которое не является открытым.

2.104. Нет. При непрерывном отображении $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ замкнутое подмножество $(0, 1)$ переходит в подмножество $(0, 1)$, которое не является замкнутым.

2.105. Пусть $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение и $A \subset X$ — компактное подмножество; мы должны доказать компактность образа $\varphi(A) \subset Y$. Рассмотрим последовательность $\{y_i\} \subset \varphi(A)$. Для каждого y_i выберем $a_i \in \varphi^{-1}(y_i) \cap A$ и рассмотрим последовательность $\{a_i\} \subset A$, из которой, в силу компактности подмножества A, можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{i_n}\}$. Тогда $\{y_{i_n} = \varphi(a_{i_n})\}$ будет сходящейся подпоследовательностью последовательности $\{y_i\}$.

2.106. Утверждение задачи следует из очевидного наблюдения, что всякая последовательность Коши $\{A_n\}$ стабилизируется (т.е. $A_N = A_{N+1} = \ldots$ для некоторого N) и, следовательно, сходится.

2.107. Пусть $Y \subset X$ — подмножество полного метрического пространства X.

Допустим, что Y полно как метрическое пространство и докажем, что Y замкнуто в X. Пусть последовательность $\{y_n\} \subset Y$ сходится в X к $x \in X$; мы должны доказать, что $x \in Y$. Так как $\{y_n\}$ является последовательностью Коши в Y, то из нее можно выделить сходящуюся в Y подпоследовательность. Предел этой подпоследовательности, с одной стороны, принадлежит Y, а с другой стороны, совпадает с x и таким образом $x \in Y$.

Допустим, что Y замкнуто в X и докажем, что Y полно. Пусть $\{y_n\} \subset Y$ — последовательность Коши в Y. Тогда $\{y_n\}$ является последовательность Коши в X. Следовательно, из $\{y_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Так как Y замкнуто, то предел этой сходящейся подпоследовательности принадлежит Y и, значит, эта подпоследовательность сходится в Y.

2.108. Утверждение задачи следует из очевидного наблюдения, что в метрическом пространстве, состоящем из конечного множества точек, всякая последовательность Коши стабилизируется и, следовательно, сходится.

2.110.(1). При отображении $\varphi : (0,1] \to [1,\infty), x \mapsto \frac{1}{x}$ последовательность Коши $x_n = \frac{1}{n}$ переходит в последовательность $\{n\}$, которая не является последовательностью Коши.

(2). Пусть X — полное метрическое пространство, $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение и $\{x_n\} \subset X$ — последовательность Коши. Так как X полное, то $x_n \to x$ и из непрерывности отображения φ следует, что $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Таким образом, последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ сходится и, значит, является последовательностью Коши.

2.111. Утверждение, которое требуется доказать, следует из того, что для любого $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^p$ имеем
$(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \to x$ при $n \to \infty$.

2.116. Выполнение аксиомы (Metr_2) очевидно. Аксиома (Metr_1) не выполнена для $X = \mathbb{R}$ и подмножеств $[0,1], [1,2]$. Аксиома (Metr_3) не выполнена для $X = \mathbb{R}$ и подмножеств $[0,1], [1,2], [2,3]$.

2.117.(1). 2.

(2). 11.
2.118.(1). $\sqrt{13}$.
(2). $3\sqrt{2}$.
(3). $\sqrt{\frac{9}{2}+2\sqrt{2}}$.

3 Теория меры

3.1 Сигма-алгебры

Пусть X — произвольное множество и 2^X — множество подмножеств множества X.

Определение 3.1 *Подмножество* $\mathcal{F} \subset 2^X$ *называют* σ-алгеброй *(сигма-алгеброй) подмножеств множества* X*, если*

- $\emptyset$ *и* X *(как подмножество самого себя) входят в* $\mathcal{F}$*;*
- *для всякого подмножества* A *из* $\mathcal{F}$ *его дополнение* $X \setminus A$ *входит в* $\mathcal{F}$*;*
- *объединение и пересечение не более чем счетного множества подмножеств из* $\mathcal{F}$ *входит в* $\mathcal{F}$*.*

Иногда σ*-алгебры называют* σ*-полями. Множество с фиксированной* σ*-алгеброй подмножеств называют* измеримым пространством.

Нетрудно проверить, что если $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй подмножеств множества X, то для любых $A, B \in \mathcal{F}$ их разность $A \setminus B$ и симметрическая разность $A \Delta B$ входят в $\mathcal{F}$. Очевидно, что

- самой маленькой σ-алгеброй является σ-алгебра $\{\emptyset, X\}$, состоящая из пустого множества и всего множества X;
- самой большой σ-алгеброй является σ-алгебра 2^X, состоящая из всех подмножеств множества X.

Пример 3.2 *Пусть* $\mathcal{F}$ *— множество конечных подмножеств множества* X*. Тогда* $\mathcal{F}$ *является* σ*-алгеброй тогда и только тогда, когда множество* X *конечно.*

Пример 3.3 *Пусть $\mathcal{F}$ — множество не более чем счетных подмножеств множества X. Тогда $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй тогда и только тогда, когда множество X не более чем счетно.*

Пример 3.4 *Пусть X — множество и $\mathcal{F}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ — σ-алгебры подмножеств множества X. Тогда их пересечение*

$$\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathcal{F} = \{A \subset X \mid A \in \mathcal{F}_i \text{ для каждого } 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

является σ-алгеброй подмножеств множества X.

Пусть X — множество и I — подмножество в 2^X. В такой ситуации *σ-алгеброй, порожденной I*, называют минимальную по включению σ-алгебру, содержащую I.

Пример 3.5 *Пусть X — топологическое пространство (основным примером является случай, когда X есть n-мерное координатное пространство $\mathbb{R}^n$).* Борелевской *σ-алгеброй называют σ-алгебру, порожденную открытыми подмножествами пространства X. В частности, борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$ порождена интервалами.*

Пусть X, Y — множества, $\varphi : X \to Y$ — произвольное отображение, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств множества Y. Тогда

$$\varphi^{-1}(\mathcal{F}) := \{\varphi^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$$

является σ-алгеброй подмножеств множества X. Например, всякое отображение

$$\varphi : X \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

определяет σ-алгебру $\varphi^{-1}(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$ (в такой ситуации σ-алгебру $\varphi^{-1}(\mathcal{B})$ называют σ-алгеброй, порожденной функциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$).

Определение 3.6 *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — σ-алгебры подмножеств множеств X и Y соответственно. Рассмотрим*

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{A \times B \subset X \times Y \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \subset 2^{X \times Y}.$$

Заметим, что $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, вообще говоря, не является σ-алгеброй (см. задачу 3.52). σ-алгебру подмножеств, порожденную подмножеством $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, называют произведением *σ-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и обозначают через $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Аналогично определяют произведение любого конечного множества σ-алгебр.*

Следующая очевидная теорема дает описание σ-алгебр подмножеств конечных множеств.

Теорема 3.7 *Рассмотрим конечное множество X.*

1. *Пусть $X_1, \dots, X_n$ — попарно непересекающиеся подмножества, объединение которых есть X. Тогда*

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigsqcup_{i \in I} X_i \mid I \subset \{1, \dots, n\} \right\} \subset 2^X \tag{20}$$

образует σ-алгебру.

2. *Всякая σ-алгебра $\mathcal{F} \subset 2^X$ имеет вид (20) для некоторых попарно непересекающихся подмножеств $X_1, \dots, X_n$, объединение которых есть X.*

3.2 Определение меры

В теории меры и теории интеграла Лебега используют *расширенную числовую прямую*. Расширенной числовой прямой называют

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

При этом элементы из $\mathbb{R}$ называют *конечными числами*, а элементы $-\infty$ и $+\infty$ называют *бесконечными числами*. Часто элемент $+\infty$ обозначают через ∞. Арифметические операции, определенные над конечными числами, распостраняются на расширенную числовую прямую следующим образом:

$$a \pm \infty = \pm\infty, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{если } a > 0, \\ 0 & \text{если } a = 0, \\ \mp\infty & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

где $a \in \mathbb{R}$,

$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

и, наконец, значения

$$\infty - \infty \quad \text{и} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

неопределены. Естественным образом на $\overline{\mathbb{R}}$ определяют промежутки $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ и (a, b), где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leqslant b$.

Сначала мы определим технически самые простые меры — меры на конечных множествах, по которым каждое подмножество измеримо.

Определение 3.8 *Говорят, что на конечном множестве X задана* мера μ, *по которой каждое подмножество измеримо, если для каждого подмножества $A \subset X$ определена его мера $\mu(A) \in [0, \infty]$, причем*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. *если* $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, *то* $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

Пример 3.9 *Для подмножества A множества X положим*

$$\mu(A) := |A|.$$

Пример 3.10 *(Мера Дирака на конечном множестве.) Фиксируем $x_0 \in X$ и для подмножества A множества X положим его меру Дирака, равной*

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 0, & \text{если } x_0 \notin A, \\ 1, & \text{если } x_0 \in A. \end{cases}$$

Следующая теорема очевидна.

Теорема 3.11 *Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ - конечное множество. Тогда*

1. *всякая мера на X, по которой каждое подмножество измеримо, определяет числа*

$$\mu_1 = \mu(x_1), \ldots, \mu_n = \mu(x_n) \ \in \ [0, \infty]$$

2. *всякие числа $\mu_1, \ldots, \mu_n \ \in \ [0, \infty]$ определяют меру μ на X, по которой каждое подмножество измеримо, а именно,*

$$\mu(\{x_i \mid i \in I\}) = \sum_{i \in I} \mu_i$$

   (в частности, $\mu(x_i) = \mu_i$).

Эта теорема дает описание мер на конечных подмножествах, по которым каждое подмножество измеримо. А именно, задать такую меру на конечном множестве — это все равно, что определить меру каждого элемента этого множества; при этом мера подмножества равна сумме мер входящих в него элементов.

Рассмотрим произвольное множество X.

Кажется естественным желание определить понятие меры μ на множестве X так, чтобы для *каждого* подмножества $A \subset X$ его мера $\mu(A)$ существовала, показывала насколько оно велико и при этом для мер подмножеств были выполнены естественные свойства. Однако оказалось, что для теории и приложений необходимо рассматривать меры, по которым меры некоторых подмножеств не определены (даже в случае, когда множество X конечно). Более того, оказалось, что для многих естественно определенных мер существуют подмножества, меры которых не определены.

Пример 3.12 *В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим единичную сферу S^2. Оказывается, на сфере S^2 невозможно определить меру μ, по которой измеримыми являются все подмножества сферы и меры «хороших» подмножеств равны их площадям. Действительно, если такая мера μ существует, то согласно парадоксу Банаха — Тарского (см. §1.2) пусть*

$$S^2 = \left(\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{1\leqslant j\leqslant m} B_j\right)$$

и при этом

$$S^2 = \bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i' \qquad \text{и} \qquad S^2 = \bigsqcup_{1\leqslant j\leqslant m} B_j',$$

где $A_1', \ldots, A_n', B_1', \ldots, B_m'$ получены соответственно из $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_m$ параллельными переносами и поворотами. Тогда, с одной стороны,

$$\mu(S^2) = 4\pi,$$

а с другой стороны,

$$\mu(S^2) = \mu\left(\left(\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i\right)\bigsqcup\left(\bigsqcup_{1\leqslant j\leqslant m} B_j\right)\right) =$$

$$\mu\left(\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant n} A'_i\right) + \mu\left(\bigsqcup_{1\leqslant j\leqslant m} B'_j\right) = \mu(S^2) + \mu(S^2) = 8\pi.$$

Таким образом, *при определении меры на множестве не следует требовать, чтобы для каждого подмножества была определена его мера*

Общее определение меры следующее.

Определение 3.13 *Говорят, что на множестве X задана* мера μ, *если определены* измеримые *(также говорят μ-измеримые) подмножества множества X и для всякого измеримого подмножества A определена его мера*

$$\mu(A) \ \in\ [0, \infty]$$

так, что выполнены следующие аксиомы.

($\mathsf{Measure}_1$) $\emptyset$ *и* X *измеримы, причем* $\mu(\emptyset) = 0$.

($\mathsf{Measure}_2$) *Для всякого измеримого подмножества A его дополнение $X \setminus A$ измеримо.*

($\mathsf{Measure}_3$) *Объединение и пересечение не более чем счетного множества измеримых подмножеств измеримо, причем если*

$$A = \bigsqcup_{i\in I} A_i,$$

где I — не более чем счетно и каждое подмножество A_i измеримо, то

$$\mu(A) = \sum_{i\in I} \mu(A_i).$$

Множество X с определенной на нем мерой μ называют *пространством с мерой* и обозначают через (X, μ) или через $(X, \mathcal{F}, \mu)$, где $\mathcal{F}$ обозначает множество измеримых подмножеств пространства X. Из определения следует, что множество измеримых подмножеств пространства X является σ-алгеброй подмножеств в X. В частности, для любых измеримых подмножеств A и B их разность $A \backslash B$ и симметрическая разность $A \Delta B$ измеримы. Согласно утверждениям задач 3.60 и 3.61, возрастающий и убывающий пределы, а также верхний и нижний пределы последовательностей измеримых подмножеств измеримы.

Пространство X с мерой μ называют *вероятностным*, если $\mu(X) = 1$; меру μ при этом называют *вероятностной* мерой.

Подчеркнем, что для меры существенным является множество измеримых по ней подмножеств. Например,

$$(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1), \quad \text{где } X_1 = \{a, b\},\ \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\},$$
$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \in A, \\ 1, & \text{если } a \notin A \end{cases}$$

и

$$(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2), \quad \text{где } X_2 = \{a, b\},\ \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{a, b\}\},$$
$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \in A, \\ 1, & \text{если } a \notin A \end{cases}$$

— разные пространства с мерами, так как $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$ (хотя «вроде бы» $X_1 = X_2$ и $\mu_1 = \mu_2$).

Пространство с мерой X называют *полным*, если для любого измеримого подмножества $A \subset X$, имеющего меру нуль, любое подмножество в A измеримо и, как нетрудно вывести из аксиом меры, имеет меру нуль (не путать полные пространства с мерами с полными метрическими пространствами). Если пространство с мерой не является полным, то согласно следующей лемме его можно подправить на подмножествах меры нуль и сделать полным.

Лемма 3.14 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Определим меру μ' на X следующим образом: подмножество A является μ'-измеримым тогда и только тогда, когда существуют μ-измеримые подмножества A^- и A^+ такие, что*

$$A^- \subset A \subset A^+ \qquad \text{и} \qquad \mu(A^+ \setminus A^-) = 0;$$

для такого подмножества A положим его μ'-меру равной

$$\mu'(A) = \mu(A^-).$$

Тогда мера μ' является корректно определенной полной мерой, причем всякое μ-измеримое подмножество A также μ'-измеримо и $\mu'(A) = \mu(A)$.

Большинство мер, которые встречаются в функциональном анализе и его приложениях, являются полными.

Пространство с мерой X называют *σ-конечным*, если

$$X = \bigcup_{n \geqslant 0} X_n,$$

где каждое X_n измеримо и имеет конечную меру. Всякое вероятностное пространство σ-конечно. Пространство, состоящее из одной точки x с мерой μ такой, что $\mu(x) = \infty$, не является σ-конечным.

3.3 Примеры мер

Пример 3.15 *Всякая мера на конечном множестве, по которой измеримо всякое подмножество (см. определение 3.8), является мерой в смысле определения 3.13.*

Пример 3.16 *На произвольном множестве X определим меру μ так, что измеримым является только пустое подмножество (его мера равна нулю) и X (его мера равна 1). Тогда X с такой мерой μ является вероятностным пространством.*

Пример 3.17 (Мера Дирака) *Определим меру на множестве X следующим образом: возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и объявим всякое подмножество $A \subset X$ измеримым и положим его меру равной*

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \in A, \\ 0, & \text{если } x_0 \notin A. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что эта мера является вероятностной.

Пример 3.18 (Нулевая мера) *На произвольном множестве определим меру так, что измеримым является каждое подмножество и мера каждого подмножества равна нулю. Нулевая мера является полной.*

Пример 3.19 *На произвольном множестве X определим меру следующим образом: всякое подмножество измеримо и его мера равна числу содержащихся в нем точек. Эта мера σ-конечна тогда и только тогда, когда множество X не более чем счетно.*

Пример 3.20 *На $\mathbb{R}$ определим меру следующим образом: всякое подмножество измеримо и его мера равна числу содержащихся в нем точек с целочисленными координатами.*

Пример 3.21 *Пусть X — множество,*

$$Z \subset X$$

— подмножество и каждому элементу $z \in Z$ сопоставлено число $\mu_z \geqslant 0$. Всякое подмножество $A \subset X$ объявим измеримым и положим

$$\mu(A) = \sum_{z \in A} \mu_z$$

Нетрудно проверить, что аксиомы меры выполнены.

Пример 3.22 *Среди дискретных (т.е., не более чем счетных) вероятностных пространств в теории и приложениях чаще всего встречаются следующие.*

- $(X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \mu)$, $\mu(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, *где* $1 < p < 1$.
- $(X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \mu)$, $\mu(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$, *где* $\lambda > 0$.
- $(X = \{1, 2, 3, \ldots\}, \mu)$, $\mu(k) = p(1-p)^{k-1}$, *где* $1 < p < 1$.

Пример 3.23 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $Y \subset X$ — некоторое измеримое подмножество. Определим на Y меру $\mu|_Y$ следующим образом: подмножество $A \subset Y$ измеримо по мере $\mu|_Y$ тогда и только тогда, когда оно, как подмножество в X, измеримо по мере μ; в этом случае полагаем*

$$\mu|_Y(A) = \mu(A).$$

Нетрудно заметить, что мера $\mu|_Y$ определена корректно. Меру $\mu|_Y$ называют *ограничением меры μ на Y*. Ясно, что если мера μ полна, то ее ограничение на любое измеримое подмножество полно.

Пример 3.24 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Всякое μ-измеримое подмножество B такое, что $0 < \mu(B) < \infty$ определяет меру μ_B на X следующим образом: подмножество $A \subset X$ измеримо по мере μ_B тогда и только тогда, когда оно измеримо по мере μ; в этом случае полагаем*

$$\mu_B(A) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}.$$

Нетрудно проверить, что мера μ_B определена корректно. Ясно, что мера μ_B является вероятностной; если мера μ полна, то мера μ_B тоже полна.

Мера Лебега на $\mathbb{R}$

На интуитивном уровне, мера Лебега подмножества $A \subset \mathbb{R}$ равна длине подмножества A. Обычно меру Лебега на $\mathbb{R}$ обозначают через λ. Ограничения меры Лебега на подмножества в $\mathbb{R}$ также называют мерами Лебега и также обычно обозначают через λ.

Формально меру Лебега на $\mathbb{R}$ определяют следующим образом.

Для всякого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ определим его *внешнюю меру*

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} (b_i - a_i) \mid A \subset \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i],\ I \text{ не более чем счетно} \right\}$$

Ясно, что если $A \subset B \subset \mathbb{R}$, то

$$\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B).$$

Лемма 3.25 *Для дизъюнктного объединения промежутков*

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

где I не более чем счетно, имеем

$$\lambda^*(A) = \sum_{i \in I} |A_i|,$$

где $|A_i|$ — длина промежутка A_i.

Пример 3.26 *Для множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ имеем*

$$\mathbb{N} \subset [1, 1] \cup [2, 2] \cup [3, 3] \cup \ldots,$$

откуда следует, что $\lambda^*(\mathbb{N}) = 0$. Аналогично доказывается, что внешняя мера всякого счетного подмножества в $\mathbb{R}$ равна 0.

Пример 3.27 $\lambda^*(\mathbb{R}) = \infty$.

Пример 3.28 *Докажем, что внешняя мера канторова множества C равна* 0. *Будем использовать обозначения, которые мы ввели в §2.5 при опрелении канторова множества. Нетрудно заметить, что C_n состоит из 2^n отрезков суммарной длины $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Отсюда и из включения $C \subset C_n$ получаем*

$$\lambda^*(C) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

для всех n и, следовательно, $\lambda^*(C) = 0$.

Определим теперь меру Лебега на $\mathbb{R}$: *подмножество* $A \subset \mathbb{R}$ *назовем* измеримым по мере Лебега, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует подмножество* B, *являющееся не более чем счетным объединением отрезков, такое, что*

$$\lambda^*(A \Delta B) < \varepsilon;$$

для такого подмножества A *положим его меру Лебега равной* $\lambda^*(A)$

Доказательство того, что мера Лебега определена корректно, состоит из большого числа технических проверок, которые мы опускаем. Как видно из определения, мера Лебега является полной и σ-конечной.

Пример 3.29 *Подмножество*

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

являющееся не более чем счетным дизъюнктным объединением промежутков, измеримо, причем

$$\lambda(A) = \sum_{i \in I} |A_i|.$$

Пример 3.30 *Пусть* $A \subset \mathbb{R}$ *— произвольное подмножество и* $A \cap \mathbb{Q}$ *— множество рациональных точек подмножества* A. *Так как* $\mathbb{Q}$ *счетно, то* $A \cap \mathbb{Q}$ *счетно и, следовательно,* $\lambda^*(A \cap \mathbb{Q}) = 0$ *(см. пример 3.26), откуда следует, что* $A \cap \mathbb{Q}$ *измеримо и* $\lambda(A \cap \mathbb{Q}) = 0$.

Пример 3.31 *Подмножество* $[0,1]_{irr}$ *иррациональных точек на отрезке* $[0,1]$ *измеримо и его мера равна* 1. *Действительно,*

$$\lambda^*([0,1] \Delta [0,1]_{irr}) = \lambda^*([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$$

(см. пример 3.30), откуда следует, что $[0,1]_{irr}$ *измеримо. Имеем*

$$\lambda([0,1]_{irr}) = \lambda([0,1]\setminus([0,1]\cap\mathbb{Q})) = \lambda([0,1])-\lambda([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 1-0 = 1.$$

Напомним, что в курсе анализа подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называют подмножеством *жордановой меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетное множество отрезков $\{[a_i, b_i]\}_{i\in I}$, суммарной длины не более ε, объединение которых содержит A. Нетрудно заметить, что подмножество A имеет жорданову меру нуль тогда и только тогда, когда оно измеримо по Лебегу и имеет лебегову меру нуль.

Укажем без доказательств некоторые факты о мерах Лебега на $\mathbb{R}$.

- В $\mathbb{R}$ существуют ограниченные неизмеримые по Лебегу подмножества.

- Имеет место строгое включение

$$\left\{\begin{matrix}\text{Борелевские}\\ \text{подмножества в } \mathbb{R}\end{matrix}\right\} \subsetneqq \left\{\begin{matrix}\text{Измеримые по Лебегу}\\ \text{подмножества в } \mathbb{R}\end{matrix}\right\}.$$

  При этом для всякого измеримого по Лебегу подмножества A имеет место разложение

$$A = B \sqcup N,$$

  где B — борелевское, а N — измеримое по Лебегу подмножество меры нуль (грубо говоря, всякое измеримое по Лебегу подмножество является борелевским с точностью до подмножества лебеговой меры нуль).

Меры Лебега — Стилтьеса на $\mathbb{R}$

Конструкцию меры Лебега на $\mathbb{R}$ можно обобщить: для всякой неубывающей, непрерывной справа функции $F(t)$ можно построить *меру Лебега — Стилтьеса* μ_F. А именно, сначала измеримым объявляется всякий полуинтервал вида $(a, b]$ и для такого интервала полагается

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Затем для всякого подмножеств $A \subset \mathbb{R}$ определяется его *внешняя мера*

$$\mu_F^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} (F(b_i) - F(a_i)) \mid \right.$$
$$\left. A \subset \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i],\ I \text{ не более чем счетно} \right\}.$$

Нетрудно заметить, что если

$$A = \bigsqcup_{i \in I} (a_i, b_i]$$

— не более чем счетное дизъюнктное объединение полуинтервалов, то

$$\mu_F^*(A) = \sum_{i \in I} (F(b_i) - F(a_i)).$$

Наконец, подмножество $B \subset \mathbb{R}$ объявляется μ_F-измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетное объединение

$$A = \bigsqcup_{i \in I} (a_i, b_i]$$

полуинтервалов такое, что

$$\mu_F^*(A \Delta B) < \varepsilon.$$

Для такого подмножества B его мера $\mu_F(B)$ полагается равной $\mu_F^*(B)$.

Доказательство того, что определение меры μ_F корректно, мы опускаем. Как видно из определения, мера Лебега — Стилтьеса является полной и σ-конечной. Заметим без доказательства, что существуют измеримые по Лебегу подмножества, которые неизмеримы по некоторым мерам Лебега — Стилтьеса и существуют неизмеримые по Лебегу подмножества, которые измеримы по некоторым мерам Лебега — Стилтьеса.

Теорема 3.32 *Мера на $\mathbb{R}$ является мерой Лебега — Стилтьеса тогда и только тогда, когда всякий промежуток по ней измерим.*

Пример 3.33 *Положим $F(t) = t$. Тогда мера μ_F совпадает с мерой Лебега λ на прямой.*

Пример 3.34 *Всякая непрерывная неотрицательная функция*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

определяет неубывающую непрерывную функцию

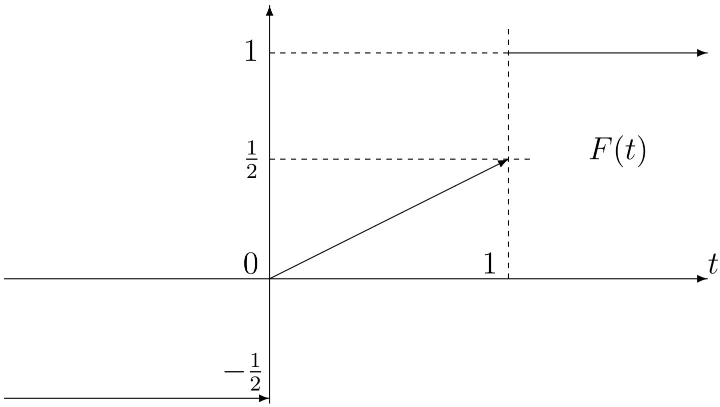
$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau,$$

которая, в свою очередь, определяет меру Лебега — Стилтьеса μ_F.

Пример 3.35 *Положим $F(t) = [t]$ — целая часть числа t. Тогда μ_F совпадает с мерой из примера 3.20.*

Пример 3.36 *Положим*

$$F(t) := \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{при } t < 0, \\ \frac{1}{2}t & \text{при } 0 \leqslant t < 1, \\ 1 & \text{при } t \geqslant 1, \end{cases}$$



Тогда мера μ_F сосредоточена на следующих подмножествах:

1. *в точке* 0*, причем* $\mu_F(0) = \frac{1}{2}$*;*
2. *в точке* 1*, причем* $\mu_F(1) = \frac{1}{2}$*;*
3. *равномерно на интервале* $(0, 1)$*, причем* $\mu_F((0, 1)) = \frac{1}{2}$.

Пример 3.37 *Рассмотрим функцию*

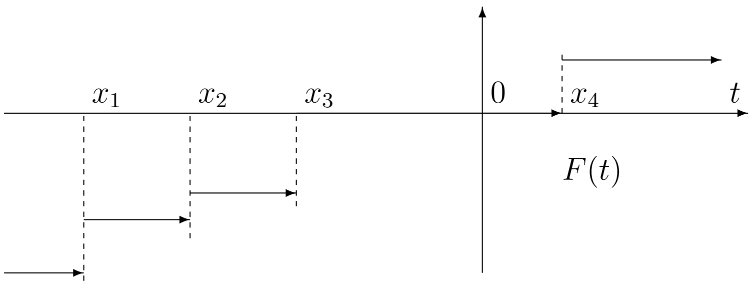
$$F(t) := \sum_{i\colon x_i \leqslant t} f_i, \tag{21}$$

где $\{x_i\}_{i \in I}$ *— не более чем счетное множество точек на прямой и* $\{f_i\}_{i \in I}$ *— соответствующее множество положительных действительных чисел (для каждого* $i \in I$ *действительное число* f_i *соответствует точке* x_i*). Ясно, что* $F(t)$ *является неубывающей, непрерывной справа функцией и, следовательно, она определяет меру Лебега — Стилтьеса* μ_F.

Нетрудно заметить, что всякое подмножество $X \subset \mathbb{R}$ является μ_F-измеримым, причем

$$\mu_F(X) = \sum_{i:\, x_i \in X} f_i.$$

Грубо говоря, мера μ_F сосредоточена в точках $\{x_i\}_{i\in I}$, причем мера точки x_i равна f_i. Для интуитивного понимания приведем график функции вида (21), для которой множество $\{x_i\}_{i\in I}$ конечно:



Следующая теорема, которую мы приводим без доказательства, дает описание неубывающих, непрерывных справа функций.

Теорема 3.38 *Для всякой неубывающей, непрерывной справа функции $F(t)$ существует единственное разложение*

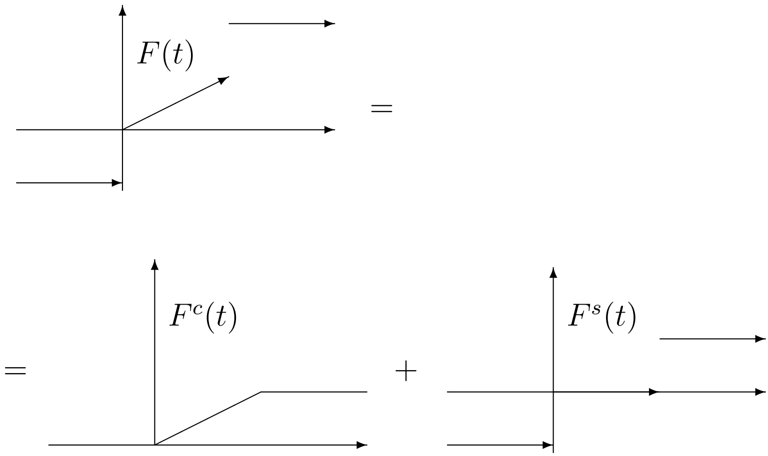
$$F(t) = F^c(t) + F^s(t),$$

где

- $F^c(t)$ — *неубывающая, непрерывная, равная нулю в нуле функция;*

- $F^s(t)$ — *функция вида (21).*

Пример 3.39 *Для функции $F(t)$ из примера 3.36 разложение, существование которого утверждается в теореме 3.38, имеет вид*



Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$

Меру Лебега на $\mathbb{R}^n$ определяют аналогично мере Лебега на $\mathbb{R}$. На интуитивном уровне мера Лебега подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ равна объему подмножества A. Обычно меру Лебега на $\mathbb{R}^n$ обозначают через λ. Ограничения меры Лебега на подмножества в $\mathbb{R}^n$ также называют мерами Лебега и также обычно обозначают через λ.

Произведения конечного множества пространств с мерами

Лемма 3.40 *Пусть $(X_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ — пространства с мерами. Тогда на их произведении*

$$X_1 \times \ldots \times X_n$$

существует единственная мера

$$\mu_1 \times \ldots \times \mu_n$$

(которую называют произведением мер $\mu_1, \ldots, \mu_n$*) такая, что:*

1. *σ-алгеброй $\mu_1 \times \ldots \times \mu_n$-измеримых подмножеств является $\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n$;*

2. *всякое подмножество вида $A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_i \in \mathcal{F}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ измеримо и имеет меру*

$$(\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n).$$

Ясно, что произведение вероятностных пространств является вероятностным пространством, а произведение пространств с полными мерами является пространством с полной мерой.

Пример 3.41 *Пространство $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега является произведением n пространств $\mathbb{R}$ с мерами Лебега.*

Пример 3.42 *Пусть*

$$(\{a_1, a_2\}, \mu), \text{ где } \mu(a_1) = \frac{1}{2}, \ \mu(a_2) = \frac{1}{3}$$

и

$$(\{b_1, b_2, b_3\}, \nu), \text{ где } \nu(b_1) = 3, \ \mu(b_2) = \frac{1}{4}, \ \nu(b_3) = 2$$

— конечные множества с мерами. Тогда для произведения $\mu \times \nu$ мер имеем

$$(\mu \times \nu)(a_1, b_1) = \frac{3}{2}, \quad (\mu \times \nu)(a_1, b_2) = \frac{1}{8}, \quad (\mu \times \nu)(a_1, b_3) = 1,$$
$$(\mu \times \nu)(a_2, b_1) = 1, \quad (\mu \times \nu)(a_2, b_2) = \frac{1}{12}, \quad (\mu \times \nu)(a_2, b_3) = \frac{2}{3}.$$

Произведения произвольного множества вероятностных пространств.

Понятие произведения конечного множества вероятностных пространств можно обобщить до понятия произведения любого (не обязательно конечного) множества вероятностных пространств. Полученные таким образом меры называют цилиндрическими.

Мы опишем наиболее важный частный случай — произведение вероятностных пространств

$$(X, \mu_i), \quad i \in I,$$

где X, I — множества, $\{\mu_i\}_{i\in I}$ — вероятностные меры на множестве X.

Итак, рассмотрим произведение множеств

$$X^I = \prod_{i\in I} X.$$

Цилиндрическим подмножеством (иногда говорят просто *цилиндром*) произведения X^I называют всякое подмножество вида

$$C = C(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}) := \prod_{\substack{i\in I, \\ B_i = A_i \text{ для } i = i_1, \ldots, i_n, \\ B_i = X \text{ для остальных } i.}} B_i, \tag{22}$$

где $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \subset X$ — измеримые подмножества.

Теорема 3.43 *На X^I существует единственная полная вероятностная мера μ (которую называют* произведением мер *$\{\mu_i\}_{i\in I}$, а также называют* цилиндрической *мерой) такая, что всякое цилиндрическое подмножество (22) измеримо и его мера равна*

$$\mu(C(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n})) = \mu_{i_1}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mu_{i_n}(A_{i_n}).$$

Пример 3.44 *Пусть*

$$(X = \{0, 1\}, \mu_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

где $\mu_i(0) = \frac{1}{3}$, $\mu_i(1) = \frac{2}{3}$. *Рассмотрим их произведение* $X^{\mathbb{N}}$ *с цилиндрической мерой* μ *и вычислим* $\mu(A)$, *где*

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots) \in X \mid x_1 \geqslant x_2\}.$$

Для этого заметим, что A *является дизъюнктным объединением цилиндрических подмножеств*

$$A_{00} = \{(x_1, x_2, \ldots) \in X \mid x_1 = x_2 = 0\},$$
$$A_1 = \{(x_1, x_2, \ldots) \in X \mid x_1 = 1\}$$

и, следовательно,

$$\mu(A) = \mu(A_{00}) + \mu(A_1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9}.$$

3.4 Некоторые понятия, связанные с мерами

Фиксируем пространство с мерой $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Линейные комбинации мер

Пусть X — множество и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — меры на множестве X, σ-алгебры измеримых подмножеств которых совпадают и равны $\mathcal{F}$. Тогда для любых $c_1, \ldots, c_n > 0$ определена мера

$$\mu = c_1\mu_1 + \ldots + c_n\mu_n.$$

А именно, σ-алгеброй μ-измеримых подмножеств является $\mathcal{F}$ и для $A \in \mathcal{F}$ имеем

$$\mu(A) = c_1\mu_1(A) + \ldots + c_n\mu_n(A).$$

При этом если каждая мера μ_i вероятностна, то мера μ вероятностна тогда и только тогда, когда $c_1 + \ldots + c_n = 1$.

Пример 3.45 *Пусть F и G — неубывающие, непрерывные справа функции на $\mathbb{R}$, μ_F и μ_G — соответствующие меры Лебега — Стилтьеса. Тогда сумма $F+G$ неубывает, непрерывна справа и соответствующая ей мера Лебега — Стилтьеса равна $\mu_{F+G} = \mu_F + \mu_G$.*

Свойства, выполненные почти всюду

Если некоторое свойство элементов пространства X выполнено всюду на пространстве X, кроме, быть может, некоторого подмножества меры нуль, то говорят, что это свойство выполнено *почти всюду на* X.

Пример 3.46 *Пусть f — функция на X. Говорят, что функция f равна нулю почти всюду, если f равна нулю всюду, кроме, быть может, некоторого подмножества меры нуль. Например, нулевая функция и функция Дирихле*

$$f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

почти всюду (относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$) равны нулю.

Пример 3.47 *Пусть f и g — функции на X. Говорят, что f равна g почти всюду, и пишут $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$, если $f(x) = g(x)$ всюду, кроме, быть может, некоторого подмножества меры нуль. Ясно, что*

$$f \overset{\text{п.в.}}{=} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f - g \overset{\text{п.в.}}{=} 0.$$

Сходимость измеримых подмножеств

На множестве $\mathcal{F}$ μ-измеримых подмножеств «напрашивается» функция расстояния

$$d(A, B) := \mu(A \Delta B).$$

Однако $\mathcal{F}$ с такой функцией расстояния может не быть метрическим пространством. Во-первых, если $\mu(X) = \infty$, то

$$d(X, \emptyset) = \mu(X) = \infty,$$

что недопустимо для метрических пространств. Во-вторых, если A — непустое подмножество в X меры нуль, то

$$d(A, \emptyset) = \mu(A) = 0 \quad \text{и} \quad A \neq \emptyset$$

и, значит, не выполнена аксиома (Metr_1) метрических пространств.

Хотя функция d, вообще говоря, не является метрикой на $\mathcal{F}$, однако она позволяет определить на $\mathcal{F}$ понятие сходимости. А именно, последовательность μ-измеримых подмножеств $\{A_n\}$ называют *сходящейся по мере* к μ-измеримому подмножеству A и пишут

$$A_n \xrightarrow{\mu} A,$$

если

$$d(A_n, A) = \mu(A_n \Delta A) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Таким образом на $\mathcal{F}$ имеется несколько типов пределов: возрастающий, убывающий, верхний, нижний и по мере. Согласно утверждению задачи 3.62, меры хорошо согласованы с этими пределами.

Абсолютная непрерывность мер

Меру ν на пространстве X называют *абсолютно непрерывной по мере* μ, и пишут $\mu \ll \nu$ если:

1. всякое μ-измеримое подмножество ν-измеримо;
2. для всякого μ-измеримого подмножества $A \subset X$ такого, что $\mu(A) = 0$ выполнено $\nu(A) = 0$.

Пример 3.48 *Несложно проверить, что*

1. *Всякая мера μ абсолютно непрерывна по самой себе.*
2. *Нулевая мера абсолютно непрерывна по любой мере.*
3. *По нулевой мере абсолютно непрерывна только нулевая мера.*
4. *На $\mathbb{R}$ мера Дирака не является абсолютно непрерывной по мере Лебега, и мера Лебега не является абсолютно непрерывной по мере Дирака.*

3.5 Задачи

Задача 3.49 *Рассмотрим конечное множество $X = \{a_1, \ldots, a_5\}$. Перечислите элементы σ-алгебры, порожденной подмножествами*

$$A = \{a_1, a_4, a_5\}, \quad B = \{a_1, a_2, a_3, a_5\}.$$

Задача 3.50 *Пусть σ-алгебра $\mathcal{F}$ подмножеств некоторого множества конечна. Докажите, что число входящих в $\mathcal{F}$ подмножеств равно 2^n, где $n \in \mathbb{N}$.*

Задача 3.51 *На множестве*

$$X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

рассмотрим функции f и g, где

$$f(a_1) = f(a_2) = 0, \quad f(a_3) = f(a_4) = 1$$

$$g(a_1) = g(a_3) = 0, \quad g(a_2) = g(a_4) = 1.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, порожденная функциями f и g.

1. *Приведите пример вероятностной меры на X множество измеримых подмножеств, по которой совпадает с $\mathcal{F}$.*

2. *Можно ли в (1) так подобрать вероятностную меру, чтобы f и g (рассматриваемые как случайные величины) были независимы?*

Задача 3.52 *Пусть*

$$X = \{x_1, x_2\},\ \mathcal{A} = 2^X, \qquad Y = \{y_1, y_2\},\ \mathcal{B} = 2^Y.$$

1. *Проверьте, что*

$$C = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \subset 2^{X \times Y}$$

не является σ-алгеброй.

2. *Докажите, что σ-алгебра, порожденная подмножеством C, совпадает с $2^{X \times Y}$.*

Задача 3.53 *Пусть X — множество и*

$$\mathcal{F} := \{A \subset X \mid |A| < \infty\} \cup \{A \subset X \mid |X \setminus A| < \infty\} \ \subset \ 2^X.$$

Докажите, что $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй тогда и только тогда, когда X конечно.

Задача 3.54 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что для любых измеримых подмножеств $A, B \subset X$ выполнено:*

1. $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$;

2. $|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(A \Delta B)$.

Задача 3.55 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $A, B \subset X$ — такие измеримые подмножества, что $\mu(A \Delta B) = 0$. Докажите, что $\mu(A) = \mu(B)$.*

Задача 3.56 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что для любых измеримых подмножеств A_1, A_2 множества X выполнено*

$$\mu(A_1 \cup A_2) \; = \; \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2).$$

Задача 3.57 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что для любых измеримых подмножеств A_1, A_2, A_3 множества X выполнено*

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \; = \; \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) -$$
$$- \left(\mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \cap A_3) + \mu(A_2 \cap A_3)\right) + \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Задача 3.58 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой. На множестве μ-измеримых подмножеств множества X рассмотрим бинарное отношение $\sim$, где*

$$A \sim B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(A \Delta B) = 0.$$

Докажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности.

Задача 3.59 *Пусть X — множество и $A_n \subset X$, $n \geqslant 1$ — подмножества. Докажите, что*

$$\bigcup_{n \geqslant 1} A_n \; = \; \bigsqcup_{n \geqslant 1} \left(A_n \setminus \bigcup_{k<n} A_k \right) =$$
$$A_1 \bigsqcup (A_2 \setminus A_1) \bigsqcup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \bigsqcup \ldots,$$

Задача 3.60 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $A_n \subset X$, $n \geqslant 1$ — измеримые подмножества. Докажите, что:*

1. *объединение* $\cup_{n\geqslant 1} A_n$ *измеримо, причем*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n);$$

2. *пересечение* $\cap_{n\geqslant 1} A_n$ *измеримо, причем*

$$\mu\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \mu(A_n).$$

Задача 3.61 *Пусть* (X,μ) *— пространство с мерой и* $\{A_n\}$ *— последовательность измеримых подмножеств. Докажите, что верхний и нижний пределы последовательности* $\{A_n\}$ *измеримы.*

Задача 3.62 *Пусть* (X,μ) *— пространство с мерой и* $\{A_n\}$ *— последовательность измеримых подмножеств. Докажите, что:*

1. *если* $A_n \uparrow A$, *то* A *измеримо и* $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$;
2. *если* $A_n \downarrow A$, *то* A *измеримо и* $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$;
3. *если* A *измеримо и* $A_n \xrightarrow{\mu} A$, *то* $\mu(A_n) \to \mu(A)$;
4. *если* $A_n \longrightarrow A$, *то* A *измеримо и* $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

Задача 3.63 (Лемма Бореля — Кантелли) *Пусть* (X,μ) *— пространство с мерой,* $A_1, A_2, \ldots$ *— измеримые подмножества пространства* X *и*

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Докажите, что:

1. *если ряд* $\sum_{n\geqslant 1}\mu(A_n)$ *сходится, то* $\mu(A)=0$.

2. *если* X *— вероятностное пространство, подмножества* $\{A_n\}$ *(рассматриваемые как события) независимы и ряд* $\sum_{n\geqslant 1}\mu(A_n)$ *расходится, то* $\mu(A)=1$.

Задача 3.64 *Верно ли, что всякое измеримое по Лебегу подмножество* $A\subset\mathbb{R}$, *мера которого строго больше нуля, содержит некоторый интервал?*

Задача 3.65 *Найдите меру Лебега чисел, лежащих на отрезке* $[0,1]$, *десятичная запись которых не содержит цифру* 5.

Задача 3.66 *Найдите меру Лебега чисел, лежащих на отрезке* $[0,1]$, *в десятичной записи которых нет подряд идущих одинаковых цифр.*

Задача 3.67 *Докажите следующие утверждения.*

1. *Функция* $F(t)=t^3+t$ *возрастает и бесконечно дифференцируема (и, следовательно, определяет меру Лебега — Стилтьеса* μ_F*).*

2. $\mu_F(I)\geqslant\lambda(I)$ *для любого промежутка* $I\subset\mathbb{R}$.

Задача 3.68 *Докажите, что если мера Лебега — Стилтьеса* μ_F *на* $\mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна по мере Лебега, то функция* F *непрерывна.*

Задача 3.69 *Рассмотрим вероятностные пространства*

$$(X=\{-1,1\},\mu_i),\qquad 1\leqslant i\leqslant 2n-1,$$

где $\mu_i(-1) = \mu_i(1) = \frac{1}{2}$, *и их произведение*

$$X^{2n-1} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant 2n-1} X$$

с произведением мер $\mu = \mu_1 \times \ldots \times \mu_{2n-1}$. *Докажите, что подмножество*

$$A = \left\{ (x_1, \ldots, x_{2n-1}) \mid \sum_{1 \leqslant i \leqslant 2n-1} x_i \geqslant 1 \right\}$$

измеримо и найдите его меру.

Задача 3.70 (Схема Бернулли) *Фиксируем* $0 \leqslant p \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$ *и рассмотрим вероятностные пространства*

$$(X = \{0, 1\}, \mu_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где $\mu_i(0) = p$, $\mu_i(1) = 1 - p$, *и их произведение*

$$X^n = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} X$$

с произведением мер $\mu = \mu_1 \times \ldots \times \mu_n$.

1. *Докажите, что каждая точка* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$ *(как подмножество в* X*) измерима и найдите ее меру.*

2. *Для* $0 \leqslant k \leqslant n$ *вычислите* $\mu(A_k)$, *где*

$$A_k = \left\{ a \in X \mid \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i = k \right\}.$$

Задача 3.71 *Рассмотрим вероятностные пространства*

$$(X = \{0, 1\}, \mu_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

где $\mu_i(0) = \mu_i(1) = \frac{1}{2}$, *и их произведение* $X^{\mathbb{N}}$ *с цилиндрической мерой* μ. *Докажите измеримость следующих подмножеств пространства* $X^{\mathbb{N}}$ *и найдите их меры:*

1. $\{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_1 + x_2 \geqslant x_3 + 1\}$;
2. $\{(a_1, a_2, \ldots)\}$, *где* $a_1, a_2, \ldots$ — *некоторая последовательность из нулей и единиц;*
3. $\{(x_1, x_2, \ldots) \mid \sum_{n\geqslant 1} x_n = \infty\}$;
4. $A_k = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid \sum_{n\geqslant 1} x_n \cdot \ldots \cdot x_{n+k} = \infty\}$.

Задача 3.72 *Рассмотрим вероятностные пространства*

$$(X = [0, 1], \mu_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

где $\mu_i = \lambda$ — *мера Лебега, и их произведение* $X^{\mathbb{N}}$ *с цилиндрической мерой* μ. *Докажите, что следующие подмножества измеримы и найдите их меры:*

1. $\left\{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_2 \leqslant \frac{1}{2}\right\}$;
2. $\left\{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_1 \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \leqslant x_3 \leqslant \frac{4}{5}\right\}$;
3. $\{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_n \leqslant 1 - n^{-1}$ *для* $n \geqslant 2\}$.

Задача 3.73 (Канторова лестница) *Рассмотрим функцию*

$$c : [0,1] \to [0,1],$$
$$c(\underbrace{0.a_1a_2a_3\ldots}_{\text{в троичной системе}}) =$$
$$= \begin{cases} \underbrace{0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\frac{a_3}{2}\ldots}_{\text{в двоичной системе}}, & \text{если } a_i \neq 1 \text{ для всех } i, \\ \underbrace{0.\frac{a_1}{2}\ldots\frac{a_{n-1}}{2}a_n}_{\text{в двоичной системе}}, & \text{если } a_i \neq 1 \text{ для } i < n \text{ и } a_n = 1. \end{cases}$$

Докажите, что функция $c(t)$:

1. *определена корректно;*
2. *непрерывна;*
3. *неубывает;*
4. *локально постоянна вне канторова множества;*
5. *взаимно однозначно отображает канторово множество на отрезок $[0,1]$.*

Замечание. Функцию c из задачи 3.73 называют *канторовой лестницей*, или *чертовой функцией*; на отрезке $[0,1]$ она растет только на канторовом подмножестве (которое имеет меру 0) и при этом успевает вырасти от 0 до 1. Кроме того, c непрерывно и взаимно однозначно отображает канторово множество C (имеющее меру 0) на отрезок $[0,1]$ (имеющий меру 1). С помощью канторовой лестницы несложно построить подмножество $A \subset [0,1]$, которое не является борелевским, но измеримо по Лебегу.

Задача 3.74 *Положим*

$$F(t) := \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ c(t), & \text{если } t \in [0,1], \\ 1, & \text{если } t > 1, \end{cases}$$

где $c(t)$ — канторова лестница и рассмотрим меру Лебега — Стилтьеса μ_F. Вычислите:

1. $\mu_F(\mathbb{R})$;
2. $\mu_F(\mathbb{Q})$;
3. $\mu_F([\frac{1}{8}, \frac{1}{2}))$;
4. $\mu_F([\frac{\sqrt{2}}{7}, \frac{3\pi}{10}])$;

Задача 3.75 *Докажите, что мера Лебега — Стилтьеса μ_F из задачи 3.74 не является абсолютно непрерывной по мере Лебега и мера Лебега не является абсолютно непрерывной по мере μ_F.*

Указания к задачам

3.49. Множества A и B разбивают пространство X на 4 дизъюнктных подмножества: $X = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (X \setminus (A \cup B))$. Искомую σ-алгебру образуют всевозможные объединения этих подмножеств (включая пустое объединение).

3.51. (1) и (2). Имеем отображение $\varphi : X \to \mathbb{R}^2$, $a \mapsto (f(a), g(a))$. При этом $\varphi(X) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Пересечение σ-алгебры борелевских множеств в $\mathbb{R}^2$ с $\varphi(X)$ содержит все одноэлементные подмножества $\varphi(X)$, а значит, совпадает с $2^{\varphi(X)}$. Поэтому σ-алгебра, порожденная функциями

f, g, есть $\mathcal{F} = 2^X$. Вероятностная мера на $\mathcal{F}$ задается условиями $\mu(a_i) = p_i$, где $p_i \geqslant 0$ — произвольные числа такие, что $\sum_i p_i = 1$. При $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$ случайные величины f и g независимы.

3.52. (1). Имеем $(x_1, y_1) \in C$, $(x_2, y_2) \in C$, но $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \notin C$.

(2). Следует из того, что C содержит все одноэлементные подмножества множества $X \times Y$.

3.53. Пусть $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй, докажем от противного, что X конечно. Если X бесконечно, то X содержит счетное подмножество $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Так как каждое одноэлементное подмножество $\{x_i\}$ входит в $\mathcal{F}$, то $Y = \{x_2, x_4, \ldots\}$ и его дополнение $X \setminus Y = \{x_1, x_3, \ldots\}$ входят в $\mathcal{F}$, причем Y и $X \setminus Y$ бесконечны. Противоречие. Если X конечно, то, очевидно, $\mathcal{F} = 2^X$ является σ-алгеброй.

3.54.(1). $\mu(A) = \mu((A \cap B) \sqcup (A \setminus B)) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$.

(2). $|\mu(A) - \mu(B)| = |\mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) - \mu(B \cap A) - \mu(B \setminus A)| = |\mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A)| \leqslant \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \Delta B)$.

3.55. Вытекает из утверждения (2) задачи 3.54.

3.58. Рефлексивность и симметричность очевидны. Транзитивность следует из включения $A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$.

3.59. Очевидно, что в доказываемом равенстве левая часть содержит правую часть. То, что правая часть содержит левую часть и то, что объединение подмножеств в правой части дизъюнктно, вытекает из того, что всякий элемент из левой части входит в единственное подмножество вида $A_n \setminus \cup_{k<n} A_k$, а именно, в подмножество $A_{n(x)} \setminus \cup_{k<n(x)} A_k$, где $n(x) = \min\{n \mid x \in A_n\}$.

3.60. (1). Используя утверждение задачи 3.59, получаем $\mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n \setminus \cup_{k<n} A_k) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n)$.

(2). Следует из включения $\cap_{n\geqslant 1} A_n \subset A_k$, которое имеет место для любого $k \geqslant 1$.

3.61. Следует из того, что не более чем счетные объединения и пересечения измеримых подмножеств измеримы.

3.62. (1). Положим $A_0 = \emptyset$. Из разложения $\cup_{n\geqslant 1} A_n = \sqcup_{n\geqslant 1}(A_n \setminus A_{n-1})$ получаем $\mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$. Рассмотрим ряд в правой части этого равенства. Так как этот ряд знакоположителен, то его частичные суммы монотонно сходятся к правой части, т.е., к $\mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n)$. Осталось заметить, что n-я частичная сумма рассматриваемого ряда равна $\mu(A_n)$.

(2). Доказывется аналогично (1).

(3). Вытекает из утверждения (2) задачи 3.54.

(4). Измеримость подмножества A следует из утверждения задачи 3.61. Положим $B_n = \cup_{k\geqslant n} A_k$, $C_n = \cap_{k\geqslant n} A_k$. По условию имеем $\cap_{n\geqslant 1} B_n = \cup_{n\geqslant 1} C_n = A$. Имеем $C_n \uparrow A$ и, согласно утверждению (2) этой задачи, $\mu(C_n) \uparrow \mu(A)$. Аналогично $\mu(B_n) \downarrow \mu(A)$. С другой стороны, при любом n имеем $B_n \supseteq A_n \supseteq C_n$ и, следовательно, $\mu(B_n) \geqslant \mu(A_n) \geqslant \mu(C_n)$.

3.63. (1). Имеем $\mu(A) \leqslant \mu(\cup_{k\geqslant n} A_k) \leqslant \sum_{k\geqslant n} \mu(A_k)$, причем последняя сумма стремится к 0 как остаточная сумма сходящегося ряда $\sum_{k\geqslant 0} \mu(A_k)$.

(2) Заметим, что $\prod_{k\geqslant n}(1 - \mu(A_k))^{-1} = \prod_{k\geqslant n}(1 + \mu(A_k) + \mu(A_k)^2 + \ldots) \geqslant 1 + \sum_{k\geqslant n} \mu(A_k) = \infty$ и, следовательно, $\prod_{k\geqslant n}(1 - \mu(A_k)) = 0$. Используя это соотношение, получаем $\mu(\cup_{k\geqslant n} A_k) = 1 - \mu(X \setminus (\cup_{k\geqslant n} A_k)) = 1 - \mu(\cap_{k\geqslant n}(X \setminus A_k)) = 1 - \prod_{k\geqslant n} \mu(X \setminus A_k) = 1 - \prod_{k\geqslant n}(1 - \mu(A_k)) = 1$ (мы использовали независимость событий $\{X \setminus A_k\}$, которая следует из независимости событий $\{A_k\}$). Осталось заметить, что $(\cup_{k\geqslant n} A_k) \downarrow A$ и, следовательно, $1 = \mu(\cup_{k\geqslant n} A_k) \downarrow \mu(A)$ (см. задачу 3.62 (2)).

3.64. Нет. Рассмотрите множество иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$.

3.65. Пусть A_n — множество чисел отрезка $[0,1]$, у которых первые n цифр отличны от 5. Очевидно, $\{A_n\}$ — убывающая последовательность и $A=\cap_{n\geqslant 1}A_n$ есть множество чисел отрезка $[0,1]$, у которых все цифры отличны от 5. Имеем: $\lambda(A)=\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)=\lim_{n\to\infty}(\frac{9}{10})^n=0$.

3.66. Мера равна 0; решение этой задачи аналогично решению задачи 3.65.

3.69. Заметим, что X^{2n-1} — вероятностное пространство, причем меры составляющих его точек одинаковы. Далее, отображение

$$\varphi : X^{2n-1}\to X^{2n-1}, \qquad \varphi(x_1,\ldots,x_{2n-1})=(-x_1,\ldots,-x_{2n-1})$$

взаимно однозначно переводит A в $X^{2n-1}\setminus A$. Следовательно,

$$\mu(A)=\mu(X^{2n-1}\setminus A)=\frac{1}{2}\mu(X^{2n-1})=\frac{1}{2}.$$

3.70. (1) Измеримость точек (как одноэлементных подмножеств) очевидна, $\mu(a)=(1-p)^kp^{n-k}$, где k — число равных 1 координат точки a.

(2). $\mu(A_k)=|A_k|(1-p)^kp^{n-k}=\binom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k}$.

3.71. Для последовательности $a_1,\ldots,a_k$ состоящей из нулей и единиц, положим $A_{a_1,\ldots,a_k}=\{x\in X^{\mathbb{N}}\mid x_1=a_1,\ldots,x_k=a_k\}$. Ясно, что $\mu(A_{a_1,\ldots,a_k})=2^{-k}$.

(1). Имеем $\mu(\{x\mid x_1+x_2\geqslant x_3+1\})=\mu(A_{11}\sqcup A_{100}\sqcup A_{010})=\mu(A_{11})+\mu(A_{100})+\mu(A_{010})=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.

(2). Имеем $\mu(a_1,a_2,\ldots)\leqslant\mu(A_{a_1,\ldots,a_k})=2^{-k}$ для любого k откуда следует, что $\mu(a_1,a_2,\ldots)=0$.

(3). Мера рассматриваемого множества равна 1, так как его дополнение состоит из счетного множества точек и, согласно утверждению (2) этой задачи, мера всякой точки множества X равна 0.

(4). Положим $Y_n = \{x \mid x_{(k+1)n+1} = \ldots = x_{(k+1)(n+1)} = 1\}$. Имеем $\mu(Y_n) = 2^{-k-1}$ и, следовательно, ряд $\sum \mu(Y_n)$ расходится. Так как события $Y_0, Y_1, \ldots$ независимы, то по лемме Бореля — Кантелли $\mu(\limsup_{n\to\infty} Y_n) = 1$. Осталось заметить, что $\limsup_{n\to\infty} Y_n$ содержится в рассматриваемом в задаче множестве.

3.72. (1). Мера равна $\frac{1}{2}$.

(2). Мера равна $\frac{3}{10}$.

(3). Положим $A_n = \{x \mid x_n \geqslant 1 - n^{-1}\}$, $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$. Тогда события $A_1, A_2, \ldots$ независимы и ряд $\sum_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ расходится. По лемме Бореля — Кантелли $\mu(A) = 1$. Осталось заметить, что рассматриваемое в задаче множество лежит в $X \setminus A$ и, следовательно, его мера равна 0.

3.74. (1). 1.

(2). 0.

(3). $\frac{1}{4}$.

(4). $\frac{5}{8}$.

4 Интеграл Лебега

4.1 Предварительные замечания

Для конечного множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ с мерой μ, по которой каждое подмножество измеримо, интеграл Лебега определяют от любой функции вида

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

формулой

$$\int\limits_X f(x)d\mu := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(x_i), \tag{23}$$

причем сумму в этой формуле следует вычислять, используя арифметику расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$. Таким образом, для суммы 23 имеются три взаимоисключающие возможности:

- сумма определена и равна конечному числу — в этом случае говорят, что функция f *интегрируема по Лебегу на* X *по мере* μ;
- сумма определена (равна конечному числу или $\pm\infty$) — в этом случае говорят, что интеграл Лебега от f на X по мере μ существует;
- сумма неопределена — в этом случае говорят, что интеграл Лебега от f на X по мере μ не существует.

Пример 4.1 *Пусть*

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, \qquad \mu(x_1) = \frac{1}{2}, \quad \mu(x_2) = 1, \quad \mu(x_3) = \frac{1}{3},$$
$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x_1) = -1, \quad f(x_2) = 3, \quad f(x_3) = \frac{1}{8}.$$

Тогда

$$\int\limits_X f(x)d\mu = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{61}{24}.$$

Пример 4.2 *Пусть*

$$X = \{x_1, x_2\}, \qquad \mu(x_1) = 1, \quad \mu(x_2) = \infty,$$
$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x_1) = \infty, \quad f(x_2) = -1.$$

Тогда интеграл Лебега

$$\int\limits_X f(x)d\mu = (\infty)\cdot 1 + (-1)\cdot\infty = \infty - \infty$$

не существует.

В общем случае интеграл Лебега определяется на произвольном пространстве X с мерой μ (например, на произвольном вероятностном пространстве). Определяется интеграл Лебега по следующему плану.

1. Рассматриваются функции вида

$$f : X \ \to \ \overline{\mathbb{R}} \tag{24}$$

   и среди них выделяются *измеримые* функции.

2. Среди измеримых функций выделяют функции, для которых существует интеграл Лебега; при этом интеграл Лебега равен конечному числу или $\pm\infty$. Если интеграл Лебега от функции существует и равен конечному числу, то функцию называют *интегрируемой по Лебегу.*

Множество интегрируемых по Лебегу функций обозначается через $\mathcal{L}^1(X,\mu)$, а интеграл Лебега от $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ обозначается через

$$\int\limits_X f d\mu.$$

На интуитивном уровне интеграл Лебега есть сумма значений функции f по точкам пространства X, причем каждая точка учитывается с мерой.

Всюду в этой главе, говоря о функциях на пространстве с мерой, мы будем подразумевать функции вида (24).

4.2 Измеримые функции

Фиксируем пространство X с мерой μ.

Определение 4.3 *Функцию f на пространстве X называют* измеримой по мере μ*, если для всякого отрезка $[a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ (случаи $a = -\infty$ и $b = \infty$ допускаются) его прообраз $f^{-1}([a,b])$ измерим. Измеримые по мере функции называют также просто* измеримыми.

Пример 4.4 *Всякая непрерывная на $\mathbb{R}^n$ функция измерима по Лебегу.*

Пример 4.5 *Характеристическая функция*

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A, \\ 1, & \text{если } x \in A \end{cases}$$

подмножества $A \subset X$ измерима тогда и только тогда, когда подмножество A измеримо.

Теорема 4.6 *Если $f_1, \dots, f_m$ — ограниченные измеримые функции на X и $g(z_1, \dots, z_m)$ — непрерывная функция от переменных $z_1, \dots, z_m$, то функция $g(f_1, \dots, f_m)$ измерима.*

Из этой теоремы следует, что модуль измеримой функции, а также сумма и произведение измеримых функций измеримы. Следующая теорема утверждает, что предел (в любом смысле) измеримых функций измерим.

Теорема 4.7 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций на X и f — функция на X. Утверждается, что в каждом из следующих случаев:*

1. $f = \sup f_n$;
2. $f = \inf f_n$;
3. $f = \limsup f_n$;
4. $f = \liminf f_n$;
5. $f_n \longrightarrow f$;
6. $f_n \rightrightarrows f$;
7. $f_n \xrightarrow{п.в.} f$

— функция f измерима. Другими словами, предел (в любом смысле) измеримых функций измерим.

Теорема 4.8 (Теорема Лузина) *Функция вида $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $f_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$\lambda(\{x \in [a, b] \mid f(x) \neq f_\varepsilon(x)\}) < \varepsilon.$$

Грубо говоря, теорема Лузина утверждает, что всякая измеримая и принимающая конечные значения функция на отрезке «приблизительно» является непрерывной функцией.

Для измеримых функций на пространстве с мерой определим еще один тип сходимости — сходимость по мере.

Определение 4.9 *Говорят, что последовательность* $\{f_n\}$ *измеримых функций* сходится по мере *к измеримой функции* f *и пишут*

$$f_n \xrightarrow{\mu} f,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ *имеем*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0.$$

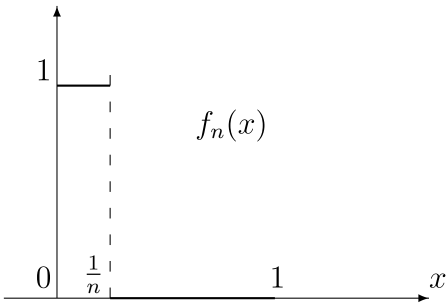
Пример 4.10 *На прямой* $\mathbb{R}$ *с мерой Лебега рассмотрим последовательность функций*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{при} } x \in [n, n+1], \\ 0, & \text{\textit{при} } x \notin [n, n+1]. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что последовательность $\{f_n\}$ *сходится поточечно к нулевой функции, но не сходится по мере, не сходится почти всюду и не сходится равномерно к какой-либо функции.*

Пример 4.11 *На отрезке* $[0,1]$ *с мерой Лебега рассмотрим последовательность функций*

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{при} } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & \text{\textit{при} } x \in (\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$



Нетрудно заметить, что последовательность $\{f_n\}$ *сходится поточечно, по мере и почти всюду к функции*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \textit{если } x = 1, \end{cases}$$

но не сходится равномерно к какой-либо функции.

Пример 4.12 *Рассмотрим отрезок* $[0,1]$ *с мерой Лебега. Для* $n \in \mathbb{N}$ *и* $1 \leqslant m \leqslant n$ *определим функцию*

$$f_{nm} : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_{nm}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{при } x \in [\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}], \\ 0, & \textit{при } x \notin [\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}] \end{cases}$$

и рассмотрим последовательность функций

$$f_{11},\ f_{21}, f_{22},\ f_{31}, f_{32}, f_{33},\ \dots,\ f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{nn},\ \dots$$

Нетрудно заметить, что эта последовательность сходится к нулевой функции по мере, но не сходится почти всюду, не сходится поточечно и не сходится равномерно к какой-либо функции.

Теорема 4.13 *Рассмотрим последовательность* $\{f_n\}$ *измеримых функций на пространстве с мерой* (X, μ).

1. *Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к функции f, то она сходится к этой функции почти всюду и по мере.*

2. *Если $\mu(X) < \infty$ и последовательность $\{f_n\}$ сходится почти всюду к функции f, то она сходится к этой функции по мере.*

Доказательство. (1) очевидно.

(2). Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in X \mid |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}, \qquad B_k(\varepsilon) = \bigcup_{n \geqslant k} A_n(\varepsilon).$$

Имеем включения

$$B_1(\varepsilon) \supset B_2(\varepsilon) \supset B_3(\varepsilon) \supset \ldots .$$

Из условия теоремы и утверждения (1) задачи 3.62 получаем

$$0 = \mu\left(\bigcap_{n \geqslant 1} B_n(\varepsilon)\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n(\varepsilon)). \tag{25}$$

Отсюда и из включения $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$ следует

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n(\varepsilon)) = 0,$$

что и означает, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$. ■

Примеры 4.11 и 4.12 показывают, что из сходимости по мере не следует сходимость почти всюду, а из сходимости почти всюду не следует равномерная сходимость. С другой стороны, как показывают следующие далее теорема 4.14 и теорема Егорова, из сходимости последовательности измеримых функций по мере следует некоторое утверждение о сходимости почти всюду, а из сходимости последовательности измеримых функций почти всюду следует некоторое утверждение о равномерной сходимости.

Теорема 4.14 *Пусть последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций на пространстве с мерой X сходится по мере к функции f. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность, сходящаяся к f почти всюду.*

Теорема 4.15 (Теорема Егорова) *Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $\mu(X) < \infty$ и последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций на X стремится к функции f почти всюду. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $E_\varepsilon \subset X$ такое, что*

$$\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \text{и} \qquad f_n|_{X\setminus E_\varepsilon} \rightrightarrows f|_{X\setminus E_\varepsilon}$$

Грубо говоря, теорема Егорова утверждает, что всякая поточечно сходящаяся последовательность функций на пространстве с конечной мерой «приблизительно» является равномерно сходящейся.

Замечание 4.16 *Рассмотрим вероятностное пространство (X, μ). Измеримые функции на X, принимающие конечные значения, называют* случайными величинами. *Пусть f — случайная величина. Положим*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(t) := \mu(f^{-1}(-\infty, t]).$$

Ясно, что

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} F(t) = 1.$$

Функцию F называют распределением *случайной величины f.*

Лемма 4.17 *Функция $F(t)$ неотрицательна, неубывает и непрерывна справа. В частности, функция $F(t)$ определяет меру Лебега — Стилтьеса μ_F.*

Доказательство. *Очевидно, $F(t)$ неотрицательна.*

Для любого $t \in \mathbb{R}$ и любого $\Delta t > 0$ имеем

$$F(t + \Delta t) - F(t) = \mu(f^{-1}(t, t + \Delta t]) \geqslant 0,$$

откуда следует, что $F(t)$ неубывает.

Для доказательства непрерывности справа мы должны доказать, что

$$\mu(f^{-1}(t, t + \Delta t]) \to 0 \quad \textit{при} \quad \Delta t \to 0.$$

Для этого достаточно доказать, что для любой последовательности t_n, монотонно стремящейся к t справа, выполнено

$$\mu(f^{-1}(t, t_n]) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to 0.$$

Так как

$$(t, t_1] = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (t_{i+1}, t_i],$$

то

$$f^{-1}(t, t_1] = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(t_{i+1}, t_i],$$

откуда

$$\mu(f^{-1}(t, t_1]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(t_{i+1}, t_i]).$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(t_{i+1}, t_i])$$

сходится, т.е.

$$\sum_{i=n}^{\infty} \mu(f^{-1}(t_{i+1}, t_i]) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to 0.$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{i=n}^{\infty} \mu(f^{-1}(t_{i+1}, t_i]) = \mu\left(\bigsqcup_{i=n}^{\infty} f^{-1}(t_{i+1}, t_i]\right) = \mu(f^{-1}(t, t_n]).$$

■

4.3 Определение интеграла Лебега

Фиксируем пространство X с мерой μ.

Определение 4.18 *Функцию f на пространстве X называют* простой, *если она может быть представлена в виде*

$$f = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i \mathbf{1}_{A_i}, \tag{26}$$

где $A_1, \dots, A_n \subset X$ — измеримые подмножества, $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$.

Например, на $\mathbb{R}$ с мерой Лебега λ функция Дирихле является простой, на любом конечном отрезке $[a, b]$ с мерой Лебега λ функция

$$f(x) = [x] \quad \text{(целая часть числа } x\text{)}$$

является простой.

В определении 4.18 разложение (26) всегда не единственно. Например,

$$0 = \mathbf{1}_X - \mathbf{1}_X.$$

Ясно, что простые функции измеримы.

Лемма 4.19 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Тогда для всякой простой функции существует единственное разложение вида*

$$f = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i \mathbf{1}_{A_i},$$

где

$$X = \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i,$$

$A_1, \ldots, A_n \subset X$ — измеримые подмножества и $f_1, \ldots, f_n$ — попарно различные вещественные числа.

Разложение, существование которого утверждается в этой лемме, называют *каноническим.*

Определение 4.20 *Интеграл Лебега от измеримой функции f на пространстве X определяют индуктивно следующим образом.*

(Leb_1) *Функция f простая, $f \geqslant 0$ и*

$$f = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i \mathbf{1}_{A_i}$$

— ее каноническое разложение; в этом случае

$$\int\limits_X f d\mu := \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i \mu(A_i).$$

(Leb_2) *Функция f неотрицательна; в этом случае*

$$\int\limits_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ простая}, \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left\{ \int\limits_X g d\mu \right\}.$$

(Leb_3) *Для произвольной функции f рассматриваем ее разложение $f = f^+ - f^-$ (см. задачу 4.51) и полагаем*

$$\int\limits_X f d\mu := \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu.$$

Мы опускаем довольно длинное техническое доказательство того, что это определение корректно. Функцию f на X называют *интегрируемой по Лебегу*, если она измерима и от нее существует интеграл Лебега, равный конечному числу. Множество интегрируемых по Лебегу функций на пространстве с мерой (X, μ) обозначают через $\mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Пример 4.21 *Постоянная функция $f(x) \equiv c$ интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда $c = 0$ или $\mu(X) < \infty$, и в этих случаях*

$$\int\limits_X c d\mu = c\mu(X).$$

Пример 4.22 *Пусть $f(t)$ — функция Дирихле. Тогда*

$$\int\limits_{[0,1]} f d\lambda = 0$$

(заметим, что интеграл Римана $\int_0^1 f(t)dt$ не существует).

Пример 4.23 *Рассмотрим множество X, точку $x_0 \in X$ и меру Дирака μ на X такую, что $\mu(x_0) = 0$. Тогда любая функция f на X интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда $f(x_0) \neq \pm\infty$, и в этом случае*

$$\int\limits_X f d\mu = f(x_0).$$

Пример 4.24 *На множестве X с нулевой мерой μ всякая функция f интегрируема по Лебегу, причем*

$$\int\limits_X f d\mu = 0.$$

Естественным образом определяют интеграл Лебега от комплекснозначных функций. А именно, на пространстве X с мерой μ рассматривают комплекснозначные функции вида

$$f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1} f_2(x), \tag{27}$$

где

$$f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Функцию вида (27) называют:

- измеримой, если измеримыми являются f_1 и f_2;
- интегрируемой по Лебегу, если интегрируемыми являются функции f_1 и f_2; в этом случае интеграл Лебега от f полагают равным

$$\int\limits_X f d\mu := \int\limits_X f_1 d\mu + \sqrt{-1} \int\limits_X f_2 d\mu.$$

4.4 Свойства интеграла Лебега

Интеграл Лебега и интеграл Римана

В анализе имеется развитая техника для практических вычислений интегралов Римана. При вычислениях интегралов Лебега по мере Лебега на $\mathbb{R}^n$ их, как правило, сводят к вычислениям соответствующих интегралов Римана, используя следующую теорему.

Теорема 4.25 *Пусть $f = f(t_1, \dots, t_n)$ — неотрицательная, непрерывная в области $D \subset \mathbb{R}^n$ функция. Утверждается, что интеграл Лебега от f на D существует тогда и только тогда, когда f интегрируема по Риману на D (возможно несобственно), причем в этом случае*

$$\int\limits_D f d\lambda = \int\limits_D f dt_1 \dots dt_n.$$

Например,

$$\int\limits_{[0,1]} t d\lambda = \int\limits_{\{0\}\cup\{1\}} t d\lambda + \int\limits_{(0,1)} t d\lambda = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int\limits_{(0,1)} \frac{1}{\sqrt{t}}\, d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \ = \ \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \ = \ \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\sqrt{t}\Big|_\varepsilon^1 = 2.$$

Теорема Радона — Никодима

Рассмотрим пространство с мерой (X, μ).

Определение 4.26 *Пусть f — измеримая функция на X и A — измеримое подмножество в X. Если ограничение $f|_A$ функции f на A интегрируемо по Лебегу на A по мере $\mu|_A$, то говорят, что* функция f интегрируема по Лебегу на A по мере μ *и интеграл $\int\limits_A f|_A\ d(\mu|_A)$ обозначают через $\int\limits_A f d\mu$.*

Лемма 4.27 *Пусть f — интегрируемая по Лебегу на X функция и A — измеримое подмножество в X. Тогда функция f интегрируема по Лебегу на A по мере μ.*

Лемма 4.28 *Пусть f — интегрируемая по Лебегу на X функция. Тогда если*

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

где I — не более чем счетно и каждое подмножество A_i измеримо, то

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{i \in I} \int\limits_{A_i} f d\mu,$$

причем ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Следствие 4.29 *(Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.) Пусть f — интегрируемая по Лебегу функция на X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что*

$$A \subset X \text{ измеримо, } \mu(A) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \int\limits_A f d\mu \right| < \varepsilon.$$

Следствие 4.30 *Пусть f — интегрируемая по Лебегу на X функция, A и A_n, $n \in \mathbb{N}$ — измеримые подмножества в X. Тогда*

$$\left\{ \begin{array}{c} A_n \uparrow A \quad \text{или} \\ A_n \downarrow A \quad \text{или} \\ A_n \longrightarrow A \quad \text{или} \\ A_n \xrightarrow{\mu} A \end{array} \right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \int\limits_{A_n} f d\mu \longrightarrow \int\limits_A f d\mu$$

(грубо говоря, утверждается, что интеграл Лебега $\int\limits_A f d\mu$ «хорошо ведет себя» при предельных переходах по A).

Следствие 4.31 *Всякая неотрицательная интегрируемая по Лебегу на X функция f определяет меру μ^f на X. А именно,*

μ^f-измеримыми подмножествами пространства X являются μ-измеримые подмножества и для всякого такого подмножества A его μ^f-мера полагается равной

$$\mu^f(A) = \int\limits_A f d\mu.$$

Пример 4.32 *Пусть $(X, \mu) = ([0,1], \lambda)$, где λ — мера Лебега, $f(t) = t$. Тогда*

$$\mu^f(A) = \int\limits_A t d\lambda.$$

Например,

$$\mu^f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \int\limits_{[0,\frac{1}{2}]} t d\lambda = \int_0^{\frac{1}{2}} t dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Пример 4.33 *Рассмотрим пространство с мерой $(\mathbb{R}, \lambda)$, где λ — мера Лебега,*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathbf{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ — параметры. Тогда

$$\mu^f(A) = \int\limits_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\lambda.$$

Теорема 4.34 (Теорема Радона — Никодима) *Пусть (X, μ) — σ-конечное пространство с мерой и ν — абсолютно непрерывная по мере μ мера на X. Тогда существует неотрицательная интрегрируемая по Лебегу на X по мере μ функция*

f (которую называют производной Радона — Никодима меры ν по мере μ и обозначают через $\frac{d\nu}{d\mu}$*) такая, что для любого μ-измеримого подмножества A имеем*

$$\nu(A) = \mu^f(A) = \int\limits_A f d\mu.$$

Функция f при этом определена однозначно с точностью до прибавления почти всюду равной нулю функции.

Пример 4.35

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, \qquad \mu(x_1) = 1, \quad \mu(x_2) = 3, \quad \mu(x_3) = 2,$$
$$\nu(x_1) = 4, \quad \nu(x_2) = 1, \quad \nu(x_3) = 0.$$

Тогда $\frac{d\nu}{d\mu} = f$, где

$$f(x_1) = 4, \quad f(x_2) = \frac{1}{3}, \quad f(x_3) = 0.$$

Интеграл Лебега $\int\limits_X f d\mu$ как функция от f

Рассмотрим пространство с мерой (X, μ) .

Лемма 4.36 *Пусть f — измеримая функция на X, g — интегрируемая по Лебегу на X функция, причем $0 \leqslant f \leqslant g$. Тогда функция f интегрируема по Лебегу на X и*

$$0 \leqslant \int\limits_X f d\mu = \int\limits_X g d\mu.$$

Лемма 4.37 (Линейность интеграла Лебега) *Для любых интегрируемых по Лебегу функций f_1 и f_2 их линейная комбинация $c_1 f_1 + c_2 f_2$ интегрируема по Лебегу, причем*

$$\int\limits_X (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\mu = c_1 \int\limits_X f_1 d\mu + c_2 \int\limits_X f_2 d\mu.$$

В частности, $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ является векторным пространством.

Следствие 4.38 *Измеримая на X функция f интегрируема по Лебегу на X тогда и только тогда, когда ее модуль $|f|$ интегрируем по Лебегу на X, причем в этом случае*

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f| d\mu.$$

Доказательство. Вытекает из леммы 4.37 и соотношения

$$|f| = f + 2f^-$$

■

Через $\mathcal{N}(X,\mu)$ мы будем обозначать множество почти всюду равных нулю функций на X. Напомним, что пространства с мерами, которые мы рассматриваем, предполагаются полными. На таких пространствах, как нетрудно доказать, почти всюду равные нулю функции измеримы.

Лемма 4.39 *Пусть f — функция на X. Тогда $f \in \mathcal{N}(X,\mu)$ тогда и только тогда, когда f интегрируема и*

$$\int\limits_X |f| d\mu \ = \ 0.$$

Следствие 4.40 *Если f и g — интегрируемые функции на X и $f \overset{п.в.}{=} g$, то*

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X g d\mu.$$

Следствие 4.41 *Подмножество $\mathcal{N}(X,\mu)$ является линейным подпространством в $\mathcal{L}^1(X,\mu)$.*

Доказательство. Действительно, для любых $f_1, f_2 \in \mathcal{N}(X, \mu)$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 \leqslant |c_1 f_1 + c_2 f_2| \leqslant |c_1||f_1| + |c_2||f_2|. \qquad (28)$$

Теперь из интегрируемости f_1 и f_2 и следствия 4.38 получаем интегрируемость $|f_1|$ и $|f_2|$, откуда, используя лемму 4.37, получаем интегрируемость $|c_1||f_1|+|c_2||f_2|$, из которой, используя лемму 4.36, (28) и следствие 4.38, получаем интегрируемость $c_1 f_1 + c_2 f_2$. Наконец,

$$\int\limits_X |c_1 f_1 + c_2 f_2| d\mu \leqslant \int\limits_X (|c_1||f_1| + |c_2||f_2|) d\mu \leqslant$$
$$|c_1| \int\limits_X |f_1| d\mu + |c_2| \int\limits_X |f_2| d\mu = 0.$$

■

В следующих далее теоремах Леви и Лебега утверждается, что интеграл Лебега $\int\limits_X f d\mu$ «хорошо ведет себя» при предельных переходах по f.

Теорема 4.42 (Теорема Леви о монотонной сходимости) *Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ — последовательность интегрируемых по Лебегу функций, причем предел*

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n d\mu$$

конечен. Тогда функция

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

интегрируема по Лебегу, причем

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

Теорема 4.43 (Т. Лебега об ограниченной сходимости) *Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $\{f_n\}$ — последовательность интегрируемых по Лебегу функций. Предположим, что:*

1. *$|f_n| \leqslant g$, где g — некоторая интегрируемая по Лебегу функция;*

2. *$f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, где f — некоторая функция.*

Тогда функция f интегрируема по Лебегу и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

Теорема Фубини

Для интеграла Лебега имеется теорема Фубини, которая аналогична теореме о повторном интегрировании для интеграла Римана.

Теорема 4.44 (Теорема Фубини) *Пусть (X, μ), (Y, ν) — σ-конечные пространства с мерами и $f(x, y)$ — $\mu\times\nu$-измеримая функция на $X \times Y$.*

1. *Если $f(x, y)$ интегрируема по мере $\mu \times \nu$, то*

   (a) *существуют повторные интегралы*

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) d\nu\right) d\mu \qquad \text{и} \qquad \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y) d\mu\right) d\nu \tag{29}$$

(существование первого повторного интеграла означает, что для почти всех $x \in X$ функция $f(x, y)$ (как функция от y) интегрируема на Y по мере ν и $\int\limits_Y f(x, y)d\nu$ (как функция от x) интегрируем на X по мере μ; аналогично понимается существование второго повторного интеграла);

(b) *повторные интегралы* (29) *равны между собой и равны интегралу*

$$\int\limits_{X \times Y} f(x, y)d(\mu \times \nu).$$

2. *Если функция $f(x, y)$ неотрицательна и существует хотя бы один из повторных интегралов в* (29)*, то функция $f(x, y)$ интегрируема на $X \times Y$ по мере $\mu \times \nu$ (и, таким образом, выполнены утверждения (a) и (b) из (1)).*

Интеграл Лебега с точки зрения теории метрических пространств

Согласно лемме 4.37, $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ является векторным пространством. Определим функцию расстояния d_1 между элементами пространства $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ следующим образом:

$$d_1(f, g) := \int\limits_X |f - g| d\mu.$$

Нетрудно заметить, что, вообще говоря, пространство $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ с такой функцией расстояния не является метрическим пространством. А именно, свойство (Metr_1) метрических пространств может не выполняться: если f — почти всюду равная, но тождественно не равная нулю функция, то $d_1(f, 0) = 0$, но $f \neq 0$.

Рассмотрим факторпространство

$$L^1(X,\mu) := \mathcal{L}^1(X,\mu)/\mathcal{N}(X,\mu)$$

(см. §1.1). На интуитивном уровне элементы пространства $L^1(X,\mu)$ — это интегрируемые на X функции, определенные с точностью до прибавления измеримых почти всюду равных нулю функций (также на интуитивном уровне можно сказать, что элементы пространства $L^1(X,\mu)$ — это интегрируемые на X функции, причем две такие функции считаются равными, если они равны почти всюду). Всякую функцию $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ можно рассматривать как элемент пространства $L^1(X,\mu)$ (и при этом, по сложившейся традиции, ее обозначают той же буквой).

Определим функцию расстояния d_1 между элементами пространства $L^1(X,\mu)$ следующим образом:

$$d_1(f,g) := \int\limits_X |f-g|d\mu. \tag{30}$$

Теорема 4.45 *Пространство $L^1(X,\mu)$ с функцией расстояния (30) является метрическим пространством.*

Фиксируем параметр $p \in [1,\infty]$ и определим пространство $L^p(X,\mu)$ (при $p=1$ пространство $L^p(X,\mu)$ будет совпадать с $L^1(X,\mu)$).

- Для $p \neq \infty$ положим

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) := \{f \mid f \text{ измерима и } |f|^p \in \mathcal{L}^1(X,\mu)\}.$$

- Для $p = \infty$ определим $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ как множество измеримых существенно ограниченных функций на X (функцию f на пространстве X с мерой μ называют *существенно ограниченной*, если существует константа $C = C(f)$ такая, что $|f(x)| \leqslant C$ почти всюду).

Лемма 4.46 *Для любых $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ имеем*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathcal{L}^p(X, \mu),$$

в частности, $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ является векторным пространством.

Из леммы 4.39 следует, что

$$\mathcal{N}(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu)$$

и мы полагаем

$$L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu)/\mathcal{N}(X, \mu).$$

По построению $L^p(X, \mu)$ является вещественным векторным пространством.

Определим функцию расстояния d_p между элементами пространства $L^p(X, \mu)$ следующим образом:

$$d_p(f, g) := \left(\int\limits_X |f - g|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \text{при } p \neq \infty, \tag{31}$$
$$d_\infty(f, g) := \inf\{C \mid |f(x) - g(x)| \leqslant C \text{ почти всюду}\}.$$

Теорема 4.47 *Пространство $L^p(X, \mu)$ с функцией расстояния (31) является метрическим пространством.*

Замечание 4.48 *В дальнейшем мы увидим, что $L^p(X, \mu)$ является полным метрическим пространством.*

Пример 4.49 *Рассмотрим пространство с мерой*

$$(X = \mathbb{N}, \mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}, \mu),$$

где $\mu(i) = \mu_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$. Ясно, что всякая функция на пространстве $\mathbb{N}$ измерима. Пусть $p \geqslant 1$. Для функции f на $\mathbb{N}$ имеем

$$f \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = 0$$

и, следовательно,

$$L^p(\mathbb{N}, \mu) = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mu).$$

Нетрудно заметить, что

$$f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mu) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{ряд} \quad \sum_{n \geqslant 1} |f(n)|^p \mu_n \quad \text{сходится}$$

и для $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mu)$ имеем

$$d_p(f, g) = \left(\sum_{n \geqslant 1} |f(n) - g(n)|^p \mu_n \right)^{1/p}.$$

В случае $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = 1$ имеем биективное, сохраняющее расстояния, отображение метрических пространств

$$\varphi : L^p(\mathbb{N}, \mu) \to \ell^p, \qquad \varphi(f) = (f(1), f(2), \ldots).$$

Множество интегрируемых по Лебегу комплекснозначных функций на пространстве с мерой (X, μ) обозначают через $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ (т.е. так же, как множество интегрируемых по Лебегу вещественнозначных функций) и называют *комплексным*

$\mathcal{L}^1(X,\mu)$. Аналогично определяют комплексные $\mathcal{N}(X,\mu)$, $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ и $L^p(X,\mu)$, где $p \in [1,\infty]$, для которых выполнены свойства, аналогичные соответствующим свойствам их вещественных аналогов. В частности, комплексное $L^p(X,\mu)$ является полным метрическим пространством.

4.5 Задачи

Задача 4.50 *Пусть (X,μ) — пространство с мерой. Докажите, что функция на X является простой тогда и только тогда, когда она ограничена, измерима и принимает конечное множество значений.*

Задача 4.51 *[частный случай теоремы 4.6]. Пусть f — измеримая функция на пространстве с мерой. Докажите, что каждая из функций*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

неотрицательна, измерима и

1. $f = f^+ - f^-$;
2. $|f| = f + 2f^-$.

Задача 4.52 *Пусть f — измеримая по Лебегу функция на $[0,1]$, причем $f \overset{\text{п.в.}}{=} x^{-1}$. Докажите, что f неограничена на $[0,1]$.*

Задача 4.53 *Рассмотрим вероятностные пространства*

$$(X = \{0,1\}, \mu_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

где $\mu_i(0) = \mu_i(1) = \frac{1}{2}$*, и их произведение* $X^{\mathbb{N}}$ *с цилиндрической мерой* μ*. Докажите, что функция*

$$f : X^{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad f(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{x_n}{n}$$

измерима и почти всюду равна ∞*.*

Задача 4.54 *Рассмотрим конечное множество* $X = \{x_1, \ldots, x_6\}$ *с мерой* μ*, где*

$$\mu(x_1) = 1,\ \mu(x_2) = 2,\ \mu(x_3) = 1,\ \mu(x_4) = 1,\ \mu(x_5) = 2,\ \mu(x_6) = 0.$$

Вычислите интеграл Лебега $\int\limits_X f d\mu$*, где:*

1. $f(x_n) = (2n-1)^2$;
2. $f(x_n) = 2^{n-2}$.

Задача 4.55 *Вычислите интегралы Лебега:*

1. $\int\limits_{[0,1)} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda$; *(2)* $\int\limits_{(0,\infty]} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d\lambda$; *(3)* $\int\limits_{(-1,2)} x^{-\frac{2}{3}} d\lambda$.

Задача 4.56 *Вычислите интеграл Лебега* $\int\limits_{[0,1]} c(x) d\lambda$*, где* $c(x)$ *— канторова лестница. Существует ли интеграл Римана* $\int_0^1 c(x) dx$*?*

Задача 4.57 *Рассмотрим вероятностные пространства*

$$(X = \{0,1\}, \mu_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

где $\mu_i(0) = \mu_i(1) = \frac{1}{2}$*, и их произведение* $X^{\mathbb{N}}$ *с цилиндрической мерой* μ*. Вычислите интегралы Лебега:*

1. $\int_{X^{\mathbb{N}}}(x_1 + x_2x_3)d\mu$;

2. $\int_{X^{\mathbb{N}}} 2^{x_1+x_2}d\mu$;

3. $\int_{X^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{n\geqslant 1} x_n\right) d\mu$;

4. $\int_{X^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{x_n}{2^n}\right) d\mu$.

Задача 4.58 *Докажите, что:*

1. $x^{-\frac{1}{2}} \in L^1([0,1],\lambda)$;

2. $x^{-\frac{1}{2}} \notin L^2([0,1],\lambda)$.

Задача 4.59 *На множестве X рассмотрим меры μ и ν, по которым каждое подмножество измеримо и*

$$\mu(\{x\}) = f(x), \quad \nu(\{x\}) = g(x),$$

где

$$f, g : X \to [0, \infty]$$

— некоторые функции. Докажите, что мера ν абсолютно непрерывна по мере μ тогда и только тогда, когда $g(x) = 0$ для всякого $x \in X$ такого, что $f(x) = 0$, и в этом случае найдите $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Указания к задачам

4.50. Очевидно, если функция проста, то она измерима. Наоборот, предположим, что функция $f(x)$ измерима и принимает конечное множество значений $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Тогда подмножества $A_i = f^{-1}([f_i, f_i])$ измеримы и $f = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} f_i \mathbf{1}_{A_i}$ — простая функция.

4.51. Достаточно доказать измеримость функции $f^+(x)$, а измеримость этой функции следует из

$$(f^+)^{-1}([a,b]) = \begin{cases} f^{-1}([a,b]), & \text{если } a \geqslant 0, \\ f^{-1}([0,b]), & \text{если } a < 0 \leqslant b, \\ \emptyset, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

4.52. От противного. Если $|f| < C$ на $[0,1]$, то $f \neq x^{-1}$ на интервале $(0, \frac{1}{C})$, мера Лебега которого положительна.

4.53. Имеем $f(x) \geqslant F_2(x) + \ldots + F_n(x) + \ldots$, где $F_n(x) = \frac{1}{2^n}(x_{2^{n-1}+1} + \ldots + x_{2^n})$. Положим $A_n = \{x \in X \mid F_n(x) \geqslant \frac{1}{4}\}$. Каждое A_n, будучи цилиндрическим подмножеством, измеримо и, следовательно, $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$ измеримо. Достаточно доказать, что $\mu(A) = 1$. Нетрудно заметить, что (а) подмножества $\{A_n\}$ (рассматриваемые как события) независимы, (б) $\mu(A_n) \geqslant \frac{1}{2}$ и, значит, ряд $\sum_{n\geqslant 2} \mu(A_n)$ расходится. Следовательно, по лемме Бореля — Кантелли, $\mu(A) = 1$.

4.54.(1). 255.

(2) $\frac{49}{2}$.

4.55. Интегралы Лебега в этих задачах равны соответствующим несобственным интегралам Римана.

(1). 2.

(2). ∞.

(3). $3\sqrt[3]{2} + 3$.

4.56. Из непрерывности функции $c(x)$ следует ее интегрируемость по Риману. Нетрудно заметить, что $c(x)+c(1-x) \equiv 1$. Используя это, получаем $1 = \int_0^1 dx = \int_0^1 (c(x) + c(1-x))dx = 2\int_0^1 c(x)dx$, откуда находим $\int_0^1 c(x)dx = \frac{1}{2}$.

4.57. Для последовательности $a_1, \ldots, a_k$, состоящей из нулей и единиц, положим $A_{a_1,\ldots,a_k} = \{x \in X^{\mathbb{N}} \mid x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k\}$. Имеем $\mu(A_{a_1,\ldots,a_k}) = 2^{-k}$.

(1). Ясно, что функция $x_1+x_2x_3$ — простая. Следовательно, $\int_{X^{\mathbb{N}}}(x_1+x_2x_3)d\mu = 2\cdot\mu(A_{111})+1\cdot\mu(A_{100})+1\cdot\mu(A_{101})+1\cdot\mu(A_{110})+1\cdot\mu(A_{011}) = \frac{3}{4}$.

(2). Ясно, что функция $2^{x_1+x_2}$ — простая. Следовательно, $\int_{X^{\mathbb{N}}} 2^{x_1+x_2}d\mu = \mu(A_{00}) + 2\cdot\mu(A_{01}) + 2\cdot\mu(A_{10}) + 4\cdot\mu(A_{11}) = \frac{9}{4}$.

(3). Положим $Y = \{x \in X^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\geqslant 1} x_n = \infty\}$. Согласно решению задачи 3.71.(3), $\mu(Y) = 1$ и, следовательно, $\mu(X\setminus Y) = 0$. Имеем $\int_X(\sum_{n\geqslant 1} x_n)d\mu = \int_Y(\sum_{n\geqslant 1} x_n)d\mu+\int_{X\setminus Y}(\sum_{n\geqslant 1} x_n)d\mu = \infty + 0 = \infty$.

(4). Обозначим подинтегральную функцию через $f(x)$. Имеем $\int_{X^{\mathbb{N}}} f(x)d\mu = \int_{A_0} f(x)d\mu + \int_{A_1} f(x)d\mu$. Нетрудно заметить, что первый интеграл в правой части равен $\frac{1}{4}\int_{X^{\mathbb{N}}} f(x)d\mu$, а второй равен $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\int_{X^{\mathbb{N}}} f(x)d\mu$. Отсюда получаем $\int_{X^{\mathbb{N}}} f(x)d\mu = \frac{1}{2}$.

4.58.(1). $\int_{[0,1]} x^{-\frac{1}{2}}d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} 2x^{\frac{1}{2}}|_\varepsilon^1 = 2 < \infty$.

(2). $\int_{[0,1]} x^{-1}d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 x^{-1}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln(x)|_\varepsilon^1 = \infty$.

5 Банаховы и гильбертовы пространства

5.1 Нормированные пространства

Определение 5.1 *Пусть V — вещественное или комплексное векторное пространство.* Нормой *в пространстве V называют функцию*

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_V \ : \ V \to \mathbb{R}$$

такую, что:

(Norm_1) *для любого $v \in V$ выполнено $\|v\| \geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $v = 0$;*

(Norm_2) *для любого скаляра λ и любого $v \in V$ выполнено $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$;*

(Norm_3) *для любых $v, u \in V$ выполнено $\|v + u\| \leqslant \|v\| + \|u\|$*

Вещественное (соотв. комплексное) векторное пространство V с фиксированной нормой $\|\cdot\|$ называют *вещественным* (соотв. *комплексным*) *векторным нормированным пространством* (часто называют просто *нормированным пространством*) и обозначают через $(V, \|\cdot\|)$ или через V, когда из контекста ясно, как определена норма $\|\cdot\|$.

В рассуждениях с участием нормированных пространств может быть не указано поле $\mathbf{K}$, над которым они определены; в этом случае считается, что рассуждения проводятся для нормированных пространств, определенных над любым полем (т.е. над $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ или над $\mathbf{K} = \mathbb{C}$).

Пусть V — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Заметим следующее.

- Для любого $c > 0$ функция

$$c\|\cdot\| \ : \ V \to \mathbb{R}, \qquad v \mapsto c\|v\|$$

является нормой.

- Для всякого ненулевого вектора $v \in V$ норма вектора $\frac{v}{\|v\|}$ равна единице. Действительно,

$$\left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|v\|}v\right\| = \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1.$$

- Всякое линейное подпространство $U \subset V$ является нормированным пространством с нормой

$$\|\cdot\|_U : U \to \mathbb{R}, \qquad \|u\|_U := \|u\|.$$

Теорема 5.2 *Всякое нормированное пространство V с нормой $\|\cdot\|$ является метрическим пространством с метрикой*

$$d(v, u) := \|v - u\|.$$

Доказательство. Мы должны проверить аксиомы метрического пространства.

(Metr_1) $d(v, u) = \|v - u\| \geqslant 0$ по аксиоме (Norm_1). Если $0 = d(v, u) = \|v - u\|$, то, по аксиоме (Norm_1), $v - u = 0$ и, следовательно, $v = u$.

(Metr_2) Используя аксиому (Norm_2), получаем

$$d(v, u) = \|v - u\| = \|(-1)(u - v)\| = |-1|\|u - v\| = d(u, v).$$

(Metr_3) Используя аксиому (Norm_3), получаем

$$d(v, u) + d(u, w) = \|v - u\| + \|u - w\| \geqslant$$
$$\|(v - u) + (u - w)\| = \|v - w\| = d(v, w).$$

■

Как видно из следующих ниже примеров, многие определенные ранее метрические пространства являются нормированными пространствами.

Пример 5.3 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *является вещественным нормированным пространством, а* $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *является комплексным нормированным пространством.*

Пример 5.4 *При* $p \geqslant 1$ *метрическое пространство* $(\mathbb{R}^n, d_p)$ *является нормированным пространством с нормой*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p := \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Это нормированное пространство обозначают через $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$*. Аналогично определяют комплексное пространство* $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$*.*

Пример 5.5 *Метрическое пространство* $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ *является нормированным пространством с нормой*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Это нормированное пространство обозначают через $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$*. Аналогично определяют комплексное нормированное пространство* $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$*.*

Пример 5.6 *Метрическое пространство* $C[a, b]$ *является вещественным нормированным пространством с нормой*

$$\|f(t)\| := \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|.$$

Пример 5.7 *Метрическое пространство $C_1[a,b]$ является вещественным нормированным пространством с нормой*

$$\|f(t)\|_1 := \int_a^b |f(t)|dt.$$

Пример 5.8 *При $p \geqslant 1$ вещественное и комплексное $L^p(X,\mu)$ являются нормированными пространствами; нормы в этих пространствах определяются формулой*

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

То, что вещественное и комплексное $L^p(X,\mu)$ действительно являются нормированными пространствами, вытекает из интегрального неравенства Минковского

$$\left(\int\limits_X |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g|^p d\mu\right)^{1/p},$$

которое мы приводим без доказательства.

Пример 5.9 *Вещественное и комплексное $L^\infty(X,\mu)$ являются нормированными пространствами с нормой*

$$\|f\|_\infty := \inf\{C \mid |f(x)| \leqslant C \text{ почти всюду}\}.$$

Пример 5.10 *На прямом произведении нескольких метрических пространств можно различными способами определить метрику (см. пример 2.14). Аналогично, если*

$$(V_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (V_n, \|\cdot\|_n)$$

— нормированные пространства, то на прямой сумме

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n := \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i \in V_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

можно определить различные нормы, по которым V будет нормированным пространством. Вот наиболее часто используемые нормы:

$$\|(v_1, \ldots, v_n)\| = \max\{\|x_1\|_1, \ldots, \|x_n\|_n\},$$
$$\|(v_1, \ldots, v_n)\| = \left(\|x_1\|_1^p + \ldots + \|x_n\|_n^p\right)^{1/p}, \quad \text{где} \quad p \in [1, \infty).$$

Нетрудно заметить, что нормированные пространства $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ и $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p)$ являются прямыми суммами одномерных нормированных пространств $(\mathbf{K}, |\cdot|)$.

Вещественные и комплексные ℓ^p и ℓ^∞

Лемма 5.11 *1. При $p \geqslant 1$ вещественное (соотв. комплексное) ℓ^p является линейным подпространством в $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ (соотв. $\mathbb{C}^\mathbb{N}$).*

2. Вещественное (соотв. комплексное) ℓ^∞ является линейным подпространством в $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ (соотв. $\mathbb{C}^\mathbb{N}$).

Доказательство. (1) следует из неравенства Минковского, (2) несложно доказать непосредственно. ■

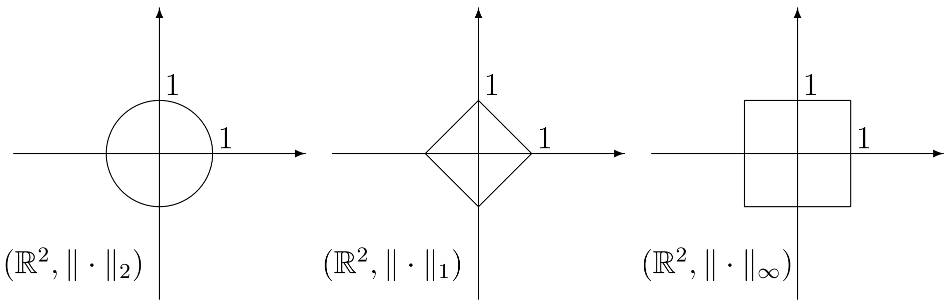
Следствие 5.12 *1. При $p \geqslant 1$ вещественное (комплексное) ℓ^p является нормированным пространством с нормой*

$$\|(x_1, x_2, \ldots)\|_p := \left(\sum_{i \geqslant 1} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

2. *Вещественное (комплексное)* ℓ^∞ *является нормированным пространством с нормой*

$$\|(x_1, x_2, \ldots)\|_\infty := \sup_{i \geqslant 1} |x_i|.$$

Для интуитивного понимания норм ниже приведены рисунки замкнутых единичных шаров в некоторых нормированных пространствах.



Определение 5.13 *Пусть* V *— векторное пространство.*

- *Говорят, что норма* $\|\cdot\|_1$ не слабее *нормы* $\|\cdot\|_2$, *если существует константа* $a > 0$ *такая, что*

$$a\|v\|_1 \geqslant \|v\|_2 \quad \text{для всех } v \in V.$$

- *Говорят, что нормы* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ *в пространстве* V сравнимы, *если одна из них не слабее другой.*

- *Говорят, что нормы* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ *в пространстве* V эквивалентны, *если каждая из них не слабее другой, другими словами, существуют константы* $a > 0$ *и* $b > 0$ *такие, что*

$$a\|v\|_1 \geqslant \|v\|_2 \quad \text{и} \quad b\|v\|_2 \geqslant \|v\|_1 \quad \text{для всех } v \in V.$$

В дальнейшем мы докажем, что в конечномерных векторных пространствах все нормы эквивалентны. В бесконечномерных пространствах существуют неэквивалентные и несравнимые нормы (см. задачу 5.76).

Лемма 5.14 *Пусть V — векторное пространство с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, причем норма $\|\cdot\|_1$* не слабее *нормы $\|\cdot\|_2$. Тогда всякая последовательность элементов пространства V, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_1$, также сходится по норме $\|\cdot\|_2$, причем к тому же пределу.*

5.2 Операторы в нормированных пространствах

Отображение нормированного пространства в нормированное пространство называют *оператором.* Линейное отображение нормированного пространства в нормированное пространство называют *линейным оператором.* Напомним, что отображение $\varphi : V \to U$ векторных пространств называют линейным, если

$$\varphi(\lambda v + \lambda' v') = \lambda\varphi(v) + \lambda'\varphi(v')$$

для любых $v, v' \in V$, $\lambda, \lambda' \in \mathbf{K}$. В функциональном анализе изучают линейные операторы и называют их просто операторами (операторы, не являющиеся линейными — *нелинейные операторы,* — изучают в нелинейном функциональном анализе). Обычно (но не всегда) операторы обозначают заглавными латинскими буквами, например, A, B, ... , а действие оператора на вектор записывают, приписывая слева букву, обозначающую оператор к букве, обозначающую вектор, например, Av, Bv, ...

Среди всех операторов на нормированном пространстве V особую роль играют функционалы. *Функционалом* на вещественном (соотв. комплексном) нормированном пространстве

V называют оператор вида

$$\varphi : V \to \mathbb{R} \qquad (\text{соотв. } \varphi : V \to \mathbb{C}).$$

Пример 5.15 *Отображение*

$$\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(t) \mapsto f(0)$$

является функционалом.

Пример 5.16 *Отображение*

$$A : C[0,1] \to C[0,1], \qquad A(f)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

является оператором.

Определение 5.17 *Пусть V и U — нормированные пространства и $A : V \to U$ — оператор.*

1. Нормой *оператора A называют число*

$$\|A\| := \sup_{\|v\| \leqslant 1} \|Av\|$$

(допускается значение ∞).

2. *Оператор A называют* ограниченным, *если его норма конечна.*

В частности, оператор A может быть функционалом и, таким образом,

$(1)'$ нормой *функционала f на нормированном пространстве V называют число*

$$\|f\| := \sup_{\|v\| \leqslant 1} \|f(v)\|;$$

(2)$'$ *функционал f называют* ограниченным, *если его норма конечна.*

Пример 5.18 *Норма функционала φ из примера 5.15 равна* 1, *а норма оператора A из примера 5.16 равна $\frac{1}{2}$.*

Теорема 5.19 (Критерий непрерывности оператора) *Оператор непрерывен (как отображение метрических пространств) тогда и только тогда, когда он ограничен. В частности, функционал на нормированном пространстве непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Доказательство. (1) Докажем, что если оператор $A : V \to U$ непрерывен, то он ограничен. Из непрерывности A в 0 следует, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$A(B_V(0, \delta)) \subset B_U(0, 1).$$

Имеем

$$A(B_V(0, 1)) = A\left(\frac{1}{\delta} B_V(0, \delta)\right) = \frac{1}{\delta} A(B_V(0, \delta)) \subset \frac{1}{\delta} B_U(0, 1),$$

откуда

$$\sup_{\|v\| \leqslant 1} \|Av\| \leqslant \delta^{-1}$$

и, следовательно, оператор A ограничен.

(2) Докажем, что если оператор A ограничен, то он непрерывен. Можно считать, что оператор A ненулевой. Пусть $v_0 \in V$ и $\varepsilon > 0$. Мы должны доказать, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$A(B(v_0, \delta)) \subset B(Av_0, \varepsilon). \tag{32}$$

Утверждается, что в качестве такого δ можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Действительно, если $v \in B(v_0, \delta)$, то

$$d(Av, Av_0) = \|Av - Av_0\| = \|A(v - v_0)\| \leqslant \\ \|A\|\|v - v_0\| < \|A\|\frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon,$$

откуда следует (32). ■

Пример 5.20 *Оператор*

$$A : \ell^2 \to \ell^2, \qquad A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(\frac{1}{1}x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots\right)$$

непрерывен. Действительно,

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\sum |x_i|^2 \leqslant 1} \sum \frac{|x_i|^2}{i^2} \leqslant 1,$$

т.е. оператор A ограничен и, следовательно, непрерывен.

Пример 5.21 *Оператор*

$$A : C_1[0, 1] \to C[0, 1], \qquad A(f(t)) = f(t)$$

не является непрерывным. Действительно, рассмотрим функцию

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n - 2n^2 t, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{n} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$ — параметр. Имеем

$$\|f_n\|_{C_1[0,1]} = \int_0^1 |f_n(t)| dt = 1$$

и, следовательно,

$$\|A\| = \sup_{\|f\|_{C_1[0,1]} \leqslant 1} \|Af\|_{C[0,1]} \geqslant \|Af_n\|_{C[0,1]} = 2n$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что оператор A неограничен и, следовательно, не непрерывен.

Лемма 5.22 *Пусть $A : V \to U$ — непрерывный оператор, где V, U — нормированные пространства. Тогда*

$$\|Av\| \leqslant \|A\|\|v\| \qquad \text{для любого } v \in V.$$

В частности, для всякого непрерывного функционала f на нормированном пространстве V выполнено

$$\|f(v)\| \leqslant \|f\|\|v\| \qquad \text{для любого } v \in V.$$

Доказательство.

$$\|Av\| = A\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\|v\| \leqslant \|A\|\|v\|.$$

■

Лемма 5.23 *Функционал f на нормированном пространстве V непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро*

$$\mathbf{Ker}(f) := f^{-1}(0)$$

замкнуто.

Доказательство. Допустим, что f непрерывен и докажем, что $\mathbf{Ker}(f)$ замкнуто. Согласно утверждению задачи 2.98, из непрерывности функционала f следует, что $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ открыто. Следовательно,

$$V \setminus \left(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) = f^{-1}(0) = \mathbf{Ker}(f)$$

замкнуто.

Теперь допустим, что $\mathbf{Ker}(f)$ замкнуто и докажем, что f непрерывен. Возьмем какую-нибудь точку $v_0 \in V \setminus \mathbf{Ker}(f)$. Из замкнутости $\mathbf{Ker}(f)$ следует, что $B(v_0,\varepsilon)\cap\mathbf{Ker}(f)=\emptyset$ для некоторого $\varepsilon>0$. Следовательно,

$$0\notin f(B(v_0,\varepsilon))=f(v_0+B(0,\varepsilon))=f(v_0)+f(B(0,\varepsilon))$$

или

$$f(B(0,\varepsilon))\not\ni -f(v_0).$$

Отсюда и из уравновешенности подмножества $f(B(0,\varepsilon))\subset\mathbb{R}$ (см. задачу 5.66) следует

$$|f(B(0,\varepsilon))|<|f(v_0)|.$$

Значит, функционал f ограничен и, следовательно, непрерывен (теорема 5.19). ■

Замечание 5.24 *Из того, что оператор непрерывен, вытекает, что его ядро замкнуто. Однако из того, что ядро оператора замкнуто не вытекает, что этот оператор непрерывен. Например, ядро оператора из примера 5.21 нулевое, но этот оператор не непрерывен.*

Теорема 5.25 *Рассмотрим непрерывные операторы, отображающие нормированное пространство V в нормированное пространство U. Тогда:*

1. *для любого непрерывного оператора A выполнено $\|A\|\geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $A=0$;*

2. *произведение λA непрерывного оператора A на скаляр λ является непрерывным оператором, причем $\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|$;*

3. *сумма* $A + B$ *непрерывных операторов* A *и* B *является непрерывным оператором, причем* $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

Пусть V — нормированное пространство над $\mathbf{K}$. Обозначим через V' множество непрерывных функционалов на V. Из теоремы 5.25 следует, что V' является векторным пространством (вещественным, если $\mathbf{K} = \mathbb{R}$; комплексным, если $\mathbf{K} = \mathbb{C}$). Более того, V' является нормированным векторным пространством. А именно, нормой на пространстве V' является определенная выше норма функционалов (то, что норма функционалов удовлетворяет аксиомам нормы, следует из теоремы 5.25). Нормированное пространство V' называют *сопряженным пространством.*

Рассмотрим естественный вопрос: *верно ли, что на каждом ненулевом нормированном пространстве существует ненулевой непрерывный функционал?* Другими словами, *верно ли, что для каждого ненулевого нормированного пространства его сопряженное пространство ненулевое?* Ответ (положительный) на этот вопрос вытекает из следующей теоремы, которая считается одним из трех китов, на которых стоит функциональный анализ (двумя другими китами являются теорема Банаха — Штейнгауза и теорема Банаха об обратном операторе).

Теорема 5.26 (Теорема Хана — Банаха) *Рассмотрим (вещественное или комплексное) нормированное пространство* V *с нормой* $\|\cdot\|$. *Пусть* $U \subset V$ — *линейное подпространство (напомним, что в этой ситуации подпространство* U *с нормой* $\|\cdot\|_U$ *само является нормированным пространством). Утверждается, что для любого непрерывного функционала* f *на* U *существует непрерывный функционал* F *на* V *такой, что:*

1. *$F|_U = f$;*
2. *$\|F\| = \|f\|$*

(другими словами, всякий непрерывный функционал на U можно продолжить до непрерывного функционала на всем пространстве V с сохранением нормы).

Доказательство. Мы докажем теорему Хана — Банаха только для вещественных нормированных пространств. Для комплексных пространств доказательство теоремы Хана — Банаха можно или провести аналогично, или вывести из теоремы Хана — Банаха для вещественных пространств.

Сначала докажем теорему Хана — Банаха в частном случае, когда U является гиперплоскостью в V.

В этом случае

$$V = U \oplus \langle v_0 \rangle, \quad \text{где} \quad v_0 \in V \setminus U,$$

т.е. всякий вектор $v \in V$ можно единственным образом разложить

$$v = u + \lambda v_0, \quad \text{где} \quad u \in U, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Достаточно доказать, что на V существует функционал F такой, что $F|_U = f$ и

$$|F(u + \lambda v_0)| \leqslant \|f\| \|u + \lambda v_0\| \quad \text{для всех} \quad u \in U, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

(тогда автоматически F будет непрерывным и будет выполнено условие (2)).

По линейности для искомого функционала F имеем

$$F(u + \lambda v_0) = F(u) + \lambda F(v_0) = f(u) + \lambda F(v_0)$$

и, значит, F полностью определяется значением $F(v_0)$. Таким образом, мы должны подобрать $F(v_0)$ так, чтобы было выполнено условие

$$|f(u) + \lambda F(v_0)| \leqslant \|f\| \|u + \lambda v_0\| \quad \text{для всех} \quad u \in U, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Заменив u на $\lambda u'$ и разделив обе части неравенства в этом условии на $|\lambda|$, получаем эквивалентное условие

$$|f(u') + F(v_0)| \leqslant \|f\| \|u' + v_0\| \quad \text{для всех} \quad u' \in U.$$

или

$$F(v_0) \in [-f(u') - \|f\| \|u' + v_0\|, -f(u') + \|f\| \|u' + v_0\|] \\ \text{для всех} \quad u' \in U.$$

Это условие выполняется для некоторого $F(v_0)$ тогда и только тогда, когда пересечение отрезков

$$[-f(u') - \|f\| \|u' + v_0\|, -f(u') + \|f\| \|u' + v_0\|], \quad u' \in U$$

непусто. А это имеет место тогда и только тогда, когда левый край любого такого отрезка не лежит правее правого края любого такого отрезка, т.е. когда

$$-f(u_1') - \|f\| \|u_1' + v_0\| \leqslant \ - f(u_2') + \|f\| \|u_2' + v_0\| \\ \text{для любых} \quad u_1', u_2' \in U.$$

или

$$f(u_2' - u_1') \leqslant \|f\| (\|u_2' + v_0\| + \|u_1' + v_0\|) \tag{33}$$

$$\text{для любых} \quad u_1', u_2' \in U. \tag{34}$$

Осталось заметить, что (33) следует из неравенств

$$f(u_2' - u_1') \leqslant \|f\| \|u_2' - u_1'\|$$

и

$$\|u_2' - u_1'\| \leqslant \|u_2' + v_0\| + \|u_1' + v_0\|.$$

Теорема Хана — Банаха в общем случае выводится из уже доказанного частного случая и леммы Цорна. ■

Следствие 5.27 *Пусть V — конечномерное нормированное пространство. Тогда*

$$\dim(V') = \dim(V). \tag{35}$$

Другими словами, всякая линейная функция на V непрерывна.

Доказательство. Мы докажем эту теорему для вещественных пространств (для комплексных пространств доказательство аналогичное).

Будем доказывать от противного, т.е. допустим, что (35) не верно и получим противоречие.

Если (35) не верно, то существует $0 \neq v_0 \in V$ такой, что $g(v_0) = 0$ для всех $g \in V'$. На прямой $\langle v_0 \rangle$ рассмотрим линейную функцию

$$f : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}, \quad f(\lambda v_0) = \lambda.$$

Согласно утверждению задачи 5.65(2), функция f непрерывна. По теореме Хана — Банаха существует непрерывное продолжение F функции f на все пространство V. По построению, $F(v_0) = f(v_0) = 1 \neq 0$. Противоречие. ■

Следствие 5.28 *На конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему для вещественных пространств (для комплексных пространств доказательство аналогично).

Согласно утверждению задачи 5.75, достаточно доказать, что на $\mathbb{R}^n$ всякая норма $\|\cdot\|$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_\infty$ (см. пример 5.5). Пусть B и B_∞ — шары с центром в нуле радиуса 1 по нормам $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_\infty$ соответственно.

Заметим, что замыкание шара B_∞ является выпуклой оболочкой конечного множества точек

$$S = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i = \pm 1\}.$$

Из конечности множества S следует, что существует $a > 0$ такое, что

$$aS \subset B.$$

Из этого включения и выпуклости шара B вытекает включение $aB_\infty \subset B$, из которого, используя утверждение задачи 5.74, получаем

$$\|\cdot\| \leqslant \frac{1}{a}\|\cdot\|_\infty. \tag{36}$$

Из следствия 5.27 вытекает, что для всякой линейной функции f на V и всякого $c > 0$ подмножество

$$\{v \mid |f(v)| < c\} \subset V$$

открыто по норме $\|\cdot\|$. Следовательно, шар

$$\begin{aligned} B_\infty = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i| < 1, 1 \leqslant i \leqslant n\} = \\ = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i| < 1\} \end{aligned}$$

открыт по норме $\|\cdot\|$. Так как шар B_∞ содержит 0, то он содержит некоторую ε-окрестность нуля по норме $\|\cdot\|$, т.е. содержит шар εB. Используя утверждение задачи 5.74, получаем отсюда, что

$$\|\cdot\|_\infty \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|\cdot\|. \tag{37}$$

Осталось заметить, что неравенства (36) и (37) как раз означают, что метрики $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_\infty$ эквивалентны. ■

Следствие 5.29 *Пусть $\varphi : V \to U$ — линейное отображение нормированных пространств, причем V — конечномерно. Тогда φ непрерывно.*

Пусть V, U — нормированные пространства. Оператор

$$A : V \to U$$

называют *изоморфизмом нормированных пространств*, если A (как отображение) взаимно однозначно и

$$\|Av\| = \|v\| \quad \text{для любого } v \in V.$$

Например, построенное в примере 4.49 отображение φ, является изоморфизмом нормированных пространств.

Лемма 5.30

1. *Теоретико-множественное обратное отображение к изоморфизму нормированных пространств является изоморфизмом нормированных пространств.*
2. *Композиция изоморфизмов нормированных пространств является изоморфизмом нормированных пространств.*

5.3 Банаховы пространства

Нормированное пространство называют *банаховым*, если оно полно как метрическое пространство.

Теорема 5.31 *Пусть V — нормированное пространство. Тогда сопряженное пространство V' банахово.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему только для вещественных нормированных пространств (для комплексных пространств доказательство аналогичное).

Пусть $\{f_n\} \subset V'$ — последовательность Коши. Мы должны доказать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к некоторому $f \in V'$.

Лемма A. Для любого $v \in V$ последовательность $\{f_n(v)\} \subset \mathbb{R}$ сходится Доказательство. Можно считать, что $v \neq 0$. Достаточно доказать, что последовательность $\{f_n(v)\}$ является последовательностью Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\{f_n\}$ является последовательностью Коши, то существует N такое, что

$$\|f_i - f_j\|_{V'} < \frac{\varepsilon}{\|v\|}$$

для всех $i, j > N$. Используя это, получаем

$$|f_i(v) - f_j(v)| = |(f_i - f_j)(v)| \leqslant \|f_i - f_j\|_{V'}\|v\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|v\|}\|v\| = \varepsilon$$

для всех $i, j > N$. ■

Согласно лемме A корректно определено отображение

$$f : V \to \mathbb{R}, \qquad v \to \lim_{n\to\infty} f_n(v).$$

Лемма B. Отображение f является функционалом Доказательство. Линейность, которую мы должны проверить, получается предельным переходом:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lim_{n\to\infty} (\lambda_1 f_n(v_1) + \lambda_2 f_n(v_2)) =$$
$$\lambda_1 \lim_{n\to\infty} f_n(v_1) + \lambda_2 \lim_{n\to\infty} f_n(v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

■

Лемма C. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\|f - f_n\|_{V'} < \varepsilon$ для любого $n > N$ Доказательство. Так как f_n является последовательностью Коши, то существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\|f_i - f_j\|_{V'} < \varepsilon$ для всех $i, j > N$. Используя это, получаем

$$\|f - f_n\|_{V'} = \sup_{\|v\| \leqslant 1} |(f - f_n)(v)| = \sup_{\|v\| \leqslant 1} \left(\lim_{i \to \infty} |f_i(v) - f_n(v)| \right) \leqslant$$
$$\sup_{\|v\| \leqslant 1} \left(\sup_{i > N} |f_i(v) - f_n(v)| \right) \leqslant \sup_{\|v\| \leqslant 1} \left(\sup_{i > N} \|f_i - f_n\|_{V'} \|v\|_V \right) < \varepsilon.$$

■

Согласно лемме C для $\varepsilon = 1$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\|f - f_n\|_{V'} < 1$ для любого $n > N$. Для $m = N + 1$ имеем

$$\|f\| = \sup_{\|v\| \leqslant 1} \|f(v)\| = \sup_{\|v\| \leqslant 1} \|f(v) - f_m(v) + f_m(v)\| \leqslant$$
$$\sup_{\|v\| \leqslant 1} (\|(f - f_m)(v)\| + \|f_m(v)\|) < \varepsilon + \|f_m\| < \infty,$$

откуда следует непрерывность функционала f. Наконец, снова используя лемму C, получаем сходимость $\{f_n\}$ к f. ■
В следующих ниже леммах мы вычислим сопряженные пространства к некоторым нормированным пространствам.

Предварительно укажем неравенства Гельдера, которые нам при этом понадобятся.

Неравенство Гельдера I Рассмотрим $p, q \in [1, \infty]$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Утверждается, что для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$ выполнено

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \cdot \|y\|_q. \tag{38}$$

При этом для любого $x \in \mathbb{C}^n$ существует $y \in \mathbb{C}^n$ такой, что в (38) имеет место равенство.

Неравенство Гельдера II Рассмотрим вещественные или комплексные ℓ^p и ℓ^q, где $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Утверждается, что для любых $x \in \ell^p$, $y \in \ell^q$ выполнено

$$\sum_{i \geqslant 1} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \cdot \|y\|_q. \tag{39}$$

При этом для любого $x \in \ell^p$ существует $y \in \ell^q$ такой, что в (39) имеет место равенство.

Неравенство Гельдера III Рассмотрим пространство с мерой (X, μ) и вещественные или комплексные $L^p(X, \mu)$ и $L^q(X, \mu)$, где $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Утверждается, что для любых $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^q(X, \mu)$ функция fg интегрируема по Лебегу на X и имеет место неравенство

$$\int_X |fg| d\mu \leqslant \|f\|_{L^p(X,\mu)} \cdot \|g\|_{L^q(X,\mu)}. \tag{40}$$

При этом для любой $f \in L^p(X, \mu)$ существует $g \in L^q(X, \mu)$ такая, что в (40) имеет место равенство.

Доказательство неравенств Гельдера см. в [KG] или [KF]. Заметим, что неравенства Гельдера I и II являются частными случаями неравенства Гельдера III.

Лемма 5.32 *Всякий функционал на пространстве* $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p)$, *где* $p \in [1, \infty]$ *имеет вид*

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}, \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i x_i,$$

причем

$$\|f\|_{(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p)'} = \|f\|_q, \qquad \text{где} \quad q \in [1, \infty], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Доказательство. Согласно следствию 5.27, всякий функционал f на пространстве $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p)$ имеет указанный в лемме вид и мы должны доказать указанную в лемме формулу для нормы функционала f.

Для $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbf{K}^n$, используя неравенство Гельдера I, получаем

$$\|f\|_{(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p)'} = \sup_{\|x\|_p \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_p \leqslant 1} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i x_i| \right) = \|f\|_q.$$

■

Утверждение этой леммы можно записать одной формулой

$$(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p)' = (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_q), \quad \text{где} \quad p, q \in [1, \infty], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Следствие 5.33 *Пространство* $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p)$, *где* $p \in [1, \infty]$ *банахово.*

Лемма 5.34 *Пусть* $p \in [1, \infty)$. *Утверждается, что всякий функционал на пространстве* ℓ^p *над полем* $\mathbf{K}$ *имеет вид*

$$f = (f_1, f_2, \dots) \ : \ \ell^p \to \mathbf{K}, \qquad f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i \geqslant 1} f_i x_i, \tag{41}$$

где $f \in \ell^q$, $q \in (1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *причем*

$$\|f\|_{(\ell^p)'} = \|f\|_q.$$

Доказательство. Докажем, что для всякого $f \in \ell^q$ формула (41) определяет непрерывный функционал на ℓ^p, норма которого, как функционала на ℓ^p, равна $\|f\|_{\ell^q}$. Действительно, из неравенства Гельдера II следует, что для любого $x \in \ell^p$ ряд

$\sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i$ сходится и значит отображение f определено корректно. Очевидно, f — линейный функционал и из неравенства Гельдера II следует, что

$$\|f\|_{(\ell^p)'} = \sup_{\|x\|_p \leqslant 1} \left| \sum_{i \geqslant 1} f_i x_i \right| = \sup_{\|x\|_p \leqslant 1} \sum_{i \geqslant 1} |f_i x_i| = \|f\|_q,$$

откуда, в частности, следует непрерывность функционала f.

Пусть теперь f — непрерывный функционал на ℓ^p. Из линейности функционала f следует, что он имеет вид (41), где $f \in \mathbf{K}^\infty$. Доказательство того, что $f \in \ell^q$, мы оставляем читателю в качестве упражнения. ■

Утверждение этой леммы можно записать одной формулой

$$(\ell^p)' = \ell^q, \quad \text{где} \quad p \in [1, \infty), \quad q \in (1, \infty], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Следствие 5.35 *Пространство ℓ^p, где $p \in (1, \infty]$, банахово.*

Заметим, что пространство ℓ^1 также банахово (это несложно доказать непосредственно).

Лемма 5.36 *Пусть X — пространство с σ-конечной мерой μ. Тогда всякий функционал на нормированном пространстве $L^p(X, \mu)$, где $p \in [1, \infty)$ имеет вид*

$$f \;:\; L^p(X, \mu) \to \mathbf{K}, \qquad f(g) = \int\limits_X f g \, d\mu, \tag{42}$$

где $f \in L^q(X, \mu)$, $q \in (1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, причем

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)'} = \|f\|_q. \tag{43}$$

Утверждение этой леммы можно записать одной формулой

$$L^p(X,\mu)' = L^q(X,\mu), \quad \text{где} \quad p \in [1,\infty), \quad q \in (1,\infty], \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Следствие 5.37 *Пространство $L^p(X,\mu)$, где $p \in (1,\infty]$, банахово.*

Заметим, что пространство $L^1(X,\mu)$ также банахово (это несложно доказать непосредственно).

Рассмотрим произвольное множество X и пусть $\mathbf{K}^X$ — множество $\mathbf{K}$-значных функций на X (таким образом, $\mathbb{R}^X$ — множество вещественнозначных функций на X и $\mathbb{C}^X$ — множество комплекснозначных функций на X). Очевидно, множество $\mathbf{K}^X$ является векторным пространством (вещественным в случае $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ и комплексным в случае $\mathbf{K} = \mathbb{C}$). Определим подмножество

$$\mathbf{K}^X_\infty := \left\{ f \in \mathbf{K}^X \mid \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty \right\}.$$

Нетрудно заметить, что $\mathbf{K}^X_\infty$ является подпространством в $\mathbf{K}^X$. Определим норму на $\mathbf{K}^X_\infty$ следующим образом:

$$\|\cdot\| \ : \ \mathbf{K}^X_\infty \to \mathbb{R}, \qquad \|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|. \tag{44}$$

То, что это действительно норма, является утверждением задачи 5.86. Эту норму (а также ее ограничения на подпространства пространства $\mathbf{K}^X_\infty$) называют *равномерной нормой.*

Теорема 5.38 *Пространство $\mathbf{K}^X_\infty$ с равномерной нормой банахово.*

Из утверждения задачи 2.107 следует, что всякое замкнутое подпространство в $\mathbf{K}_\infty^X$ является банаховым нормированным пространством по равномерной норме. В следующей теореме разобран важный случай, когда возникает такая ситуация.

Теорема 5.39 *Пусть X — метрическое пространство. Определим нормированное пространство $C(X)$ как подпространство в $\mathbf{K}_\infty^X$, состоящее из непрерывных ограниченных $\mathbf{K}$-значных функций на X с равномерной нормой. Утверждается, что $C(X)$ замкнуто в $\mathbf{K}_\infty^X$ по равномерной норме. В частности, пространство $C(X)$ банахово.*

5.4 Гильбертовы пространства

Определение 5.40 *Пусть V — вещественное векторное пространство.* Скалярным произведением *в V называют отображение*

$$(\cdot,\cdot)\ :\ V\times V\to\mathbb{R}$$

такое, что:

1. $(v,u)=(u,v)$ *для любых $v,u\in V$ (симметричность);*

2. $(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2,u)=\lambda_1(v_1,u)+\lambda_2(v_2,u)$ *для любых $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $v_1,v_2,u\in V$ (линейность по первому множителю);*

3. $(v,\lambda_1u_1+\lambda_2u_2)=\lambda_1(v,u_1)+\lambda_2(v,u_2)$ *для любых $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $v,u_1,u_2\in V$ (линейность по второму множителю);*

4. $(v,v)\geqslant 0$ *для любого $v\in V$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $v=0$ (положительная определенность).*

Определение 5.41 *Пусть V — комплексное векторное пространство.* Эрмитовым скалярным произведением *в V называют отображение*

$$(\cdot, \cdot) \ : \ V \times V \to \mathbb{C}$$

такое, что:

1. $(v, u) = \overline{(u, v)}$ *для любых $v, u \in V$ (антисимметричность) (из этого свойства следует, что $(v, v) \in \mathbb{R}$ для любого $v \in V$);*

2. $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, u) = \lambda_1 (v_1, u) + \lambda_2 (v_2, u)$ *для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, u \in V$ (линейность по первому множителю);*

3. $(v, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \overline{\lambda}_1 (v, u_1) + \overline{\lambda}_2 (v, u_2)$ *для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v, u_1, u_2 \in V$ (антилинейность по второму множителю);*

4. $(v, v) \geqslant 0$ *для любого $v \in V$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $v = 0$ (положительная определенность).*

В определениях выше аксиома (3) включена в список аксиом для большей ясности; на самом деле она следует из аксиом (1) и (2).

Векторные пространства со скалярными произведениями называют *предгильбертовыми.* Простейшими примерами предгильбертовых пространств являются конечномерные евклидовы и эрмитовы пространства, которые изучают в линейной алгебре.

Теорема 5.42 *Пусть V — предгильбертово пространство. Тогда для любых векторов $v, u \in V$ имеет место* неравенство

Коши –– Буняковского

$$|(v,u)|^2 \leqslant (v,v)(u,u), \tag{45}$$

в котором равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы v,u коллинеарны.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $(v,u) \in \mathbb{R}$. В этом случае для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$0 \leqslant (v+tu, v+tu) = (v,v) + 2t(v,u) + t^2(u,u).$$

Отсюда следует, что дискриминант D квадратного трехчлена $(v,v) + 2t(v,u) + t^2(u,u)$ неположителен, т.е.

$$D = 4((v,u)^2 - (v,v)(u,u)) \leqslant 0,$$

откуда следует (45).

Теперь рассмотрим общий случай. Можно считать, что $(v,u) \neq 0$. Рассмотрим

$$v' = v, \quad u' = (v,u)u.$$

Тогда

$$(v',u') = (v,(v,u)u) = \overline{(v,u)}(v,u) \in \mathbb{R}$$

и, следовательно, по уже доказанному для этого случая неравенству Коши — Буняковского, имеем

$$|(v',u')|^2 \leqslant (v',v')(u',u')$$

или

$$|(v,(v,u)u)|^2 \leqslant (v,v)|(v,u)|^2(u,u)$$

откуда следует (45). ■

Пусть V — предгильбертово пространство. Из аксиом скалярного произведения и неравенства Коши — Буняковского вытекает, что отображение

$$\|\cdot\| \ : \ V \to \mathbb{R}, \qquad \|v\| = \sqrt{(v,v)}$$

определяет норму в пространстве V. Таким образом, *всякое предгильбертово пространство является нормированным (и, следовательно, метрическим) пространством.* Заметим, что скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ можно восстановить через определяемую им норму $\|\cdot\|$, а именно,

$$(v_1,v_2) = \frac{1}{2}(\|v_1+v_2\|^2 - \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2).$$

Лемма 5.43 *Пусть V — предгильбертово пространство. Тогда для любого $v_0 \in V$ отображение*

$$(\cdot, v_0) : V \to \mathbf{K}, \qquad v \mapsto (v, v_0)$$

является линейным непрерывным функционалом, причем

$$\|(\cdot, v_0)\|_{V'} = \|v_0\|.$$

Доказательство. Очевидно, функционал $(\cdot, v_0)$ линеен и нам достаточно доказать указанную в лемме формулу для его нормы. С одной стороны, используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\sup_{\|v\|\leqslant 1} |(v,v_0)| \leqslant \|v_0\|,$$

а с другой стороны,

$$\sup_{\|v\|\leqslant 1} |(v,v_0)| \geqslant \left(\frac{v_0}{\|v_0\|}, v_0\right) = \frac{(v_0,v_0)}{\|v_0\|} = \|v_0\|$$

и, значит,

$$\|(\cdot, v_0)\|_{V'} = \sup_{\|v\| \leqslant 1} |(v, v_0)| = \|v_0\|.$$

■

Следствие 5.44 *Для всякого подмножества X предгильбертова пространства V подмножество*

$$\{v \in V \mid (v, x) = 0 \text{ для любого } x \in X\}$$

является замкнутым подпространством в V.

Доказательство. Действительно, подмножество X замкнуто, так как оно является пересечением замкнутых подмножеств $\{v \in V \mid (v, x) = 0\}$, $x \in X$. ■

Определение 5.45 Гильбертовым пространством *называют предгильбертово пространство такое, что соответствующее нормированное пространство полно.*

Пример 5.46 *В вещественном n-мерном координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ имеем стандартное скалярное произведение*

$$((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \tag{46}$$

а в комплексном n-мерном координатном пространстве $\mathbb{C}^n$ имеем стандартное эрмитово скалярное произведение

$$((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = x_1 \overline{y}_1 + \ldots + x_n \overline{y}_n. \tag{47}$$

Соответствующие нормированные пространства — $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ и $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ — полны согласно следствию 5.33. Следовательно, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ со стандартными скалярными произведениями (46) и (47) являются гильбертовыми пространствами.

Пример 5.47 *В вещественном ℓ^2 имеем стандартное скалярное произведение*

$$((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots, \tag{48}$$

а в комплексном ℓ^2 имеем стандартное эрмитово скалярное произведение

$$((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) = x_1 \overline{y}_1 + x_n \overline{y}_n + \ldots \tag{49}$$

(сходимость рядов следует из неравенства Гельдера II). Соответствующие нормированные пространства — вещественное и комплексное ℓ^2 — полны. Следовательно, вещественное и комплексное ℓ^2 со скалярными произведениями (48) *и* (49) *являются гильбертовыми пространствами.*

Пример 5.48 *Пусть (X, μ) — пространство с мерой. В вещественном $L^2(X, \mu)$ имеем скалярное произведение*

$$(f, g) := \int\limits_X f g d\mu, \tag{50}$$

а в комплексном $L^2(X, \mu)$ имеем эрмитово скалярное произведение

$$(f, g) := \int\limits_X f \overline{g} d\mu \tag{51}$$

(существование и конечность интегралов следует из неравенства Гельдера III). Соответствующие нормированные пространства — вещественное и комплексное $L^2(X, \mu)$ — полны согласно следствию 5.37. Следовательно, вещественное и комплексное $L^2(X, \mu)$ со скалярными произведениями (50) *и* (51) *являются гильбертовыми пространствами.*

Пример 5.49 *Если $V_1, \ldots, V_n$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_1, \ldots, (\cdot, \cdot)_n$ соответственно, то их произведение*

$$V = V_1 \times \ldots \times V_n$$

является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$((v_1, \ldots, v_n), (v'_1, \ldots, v'_n)) = (v_1, v'_1)_1 + \ldots + (v_n, v'_n)_n.$$

Пример 5.50 *Пусть V — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и X — замкнутое подпространство в V. Рассмотрим на X скалярное произведение — ограничение скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$. Тогда X с этим скалярным произведением является гильбертовым пространством. Действительно, полнота пространства X вытекает из утверждения задачи 2.107.*

Напомним, что *системой векторов* векторного пространства называют упорядоченное множество векторов этого пространства.

Определение 5.51 *Пусть $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in I}$ — система векторов гильбертова пространства V.*

- *Систему векторов $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in I}$ называют* ортогональной, *если*

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0 \quad \text{для всех } i \neq j.$$

- *Ортогональную систему векторов $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in I}$ называют* ортонормированной, *если*

$$\|\mathbf{e}_i\| = 1 \quad \text{для всех } i \in I.$$

- *Ортонормированную систему векторов* $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in I}$ *называют* полной, *если*

$$v \in V,\ (v,\mathbf{e}_i) = 0 \text{ для всякого } i \quad\Longrightarrow\quad v = 0.$$

Гильбертовым базисом *гильбертова пространства называют полную ортонормированную систему векторов этого пространства.*

Пример 5.52 *Нетрудно заметить, что в* $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_2)$, *где* $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ *или* $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, *гильбертовым базисом является* стандартный *базис*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,0,0,\dots,0,0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,0,\dots,0,0),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \mathbf{e}_n &= (0,0,0,\dots,0,1). \end{aligned}$$

Пример 5.53 *Нетрудно заметить, что в вещественном и комплексном* ℓ^2 *система векторов*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,0,0,0,\dots),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,0,0,\dots),\\ \mathbf{e}_3 &= (0,0,1,0,\dots),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

образует гильбертов базис (его называют стандартным гильбертовым базисом*).*

Теорема 5.54 *1. В вещественном* $L^2([-\pi,\pi],\lambda)$ *система векторов*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(t),\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(t),$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2t),\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2t),\quad \dots$$

образует гильбертов базис;

2. *в комплексном* $L^2([-\pi,\pi],\lambda)$ *система векторов*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm\sqrt{-1}t},\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm2\sqrt{-1}t},\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm3\sqrt{-1}t},\quad \ldots$$

образует гильбертов базис.

Второе утверждение этой теоремы несложно вывести из первого. Доказательство первого утверждения — чисто техническое, причем в нем используются некоторые нетривиальные факты о рядах Фурье.

Используя лемму Цорна, несложно доказать следующую теорему.

Теорема 5.55 *Пусть V — гильбертово пространство. Тогда:*

1. *в пространстве V существует гильбертовы базисы;*
2. *гильбертовы базисы пространства V равномощны;*
3. *всякую ортонормированную систему векторов пространства V можно дополнить до гильбертова базиса.*

Наиболее важными в функциональном анализе и его приложениях являются гильбертовы пространства с конечными или счетными гильбертовыми базисами. **В этом курсе мы будем рассматривать только гильбертовы пространства, гильбертовы базисы в которых конечны или счетны.**

Лемма 5.56 *Пусть $v_1,\ldots,v_n$ — ортогональная система векторов гильбертова пространства. Тогда*

$$\|v_1+\ldots+v_n\|^2=\|v_1\|^2+\ldots+\|v_n\|^2.$$

Доказательство.

$$\|v_1 + \ldots + v_n\|^2 = (v_1 + \ldots + v_n, v_1 + \ldots + v_n) =$$
$$(v_1, v_1) + \ldots + (v_1, v_n) + \ldots + (v_n, v_1) + \ldots + (v_n, v_n) =$$
$$\|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2.$$

■

Неравенство Бесселя. *Пусть* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ *— конечная или счетная ортонормированная система векторов гильбертова пространства. Тогда для любого* $v \in V$ *имеем*

$$\sum_{i \geqslant 1} |(v, \mathbf{e}_i)|^2 \leqslant \|v\|$$

(ряд в левой части неравенства сходится и его сумма не превосходит правую часть) Доказательство. Можно считать, что система $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ конечна, скажем, состоит из n векторов. Рассмотрим

$$u = v - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (v, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i.$$

Тогда

$$(u, \mathbf{e}_j) = (v, \mathbf{e}_j) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (v, \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0 \quad \text{для каждого } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

т.е. система векторов $u, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ ортогональна. По лемме 5.56

$$\|v\|^2 = \|u + \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_n\|^2 =$$
$$\|u\|^2 + \|(v, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1\|^2 + \ldots + \|(v, \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n\|^2 =$$
$$\|u\|^2 + |(v, \mathbf{e}_1)|^2 + \ldots + |(v, \mathbf{e}_n)|^2,$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Рассмотрим гильбертово пространства V и в нем счетную ортонормированную систему векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ (например, гильбертов базис пространства V). Говорят, что ряд

$$\sum_{n\geqslant 1} x_i \mathbf{e}_i \tag{52}$$

сходится, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \mathbf{e}_i\right) \tag{53}$$

его частичных сумм; в этом случае сумма ряда (52) полагается равной пределу (53).

Лемма 5.57 *Ряд* (52) *сходится тогда и только тогда, когда* $(x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$.

Доказательство. Имеем

$$\text{Ряд (52) сходится} \iff$$

$$\text{частичные суммы } \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\mathbf{e}_i$$

$$\text{образуют последовательность Коши} \iff$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \text{такое, что}$$

$$\left\| \sum_{1\leqslant i\leqslant n'} x_i\mathbf{e}_i - \sum_{1\leqslant i\leqslant n''} x_i\mathbf{e}_i \right\| < \varepsilon \;\; \forall\, n', n'' > N \iff$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \text{такое, что}$$

$$\left\| \sum_{n'\leqslant i\leqslant n''} x_i\mathbf{e}_i \right\|^2 < \varepsilon \;\; \forall\, n'' \geqslant n' > N \iff$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \text{такое, что}$$

$$\sum_{n'\leqslant i\leqslant n''} |x_i|^2 < \varepsilon \;\; \forall\, n'' \geqslant n' > N \iff$$

$$\text{ряд } \sum_{i\geqslant 1} |x_i|^2 \text{ сходится} \iff (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2.$$

■

Пусть V, U — гильбертовы пространства. Оператор

$$A : V \to U$$

называют *изоморфизмом гильбертовых пространств*, если A (как отображение) взаимно однозначно и

$$(Av, Av') = (v, v') \quad \text{для любых } v, v' \in V.$$

В частности, изоморфизм гильбертовых пространств является изоморфизмом соответствующих им нормированных пространств.

Лемма 5.58 *1. Теоретико-множественное обратное отображение к изоморфизму гильбертовых пространств является изоморфизмом гильбертовых пространств.*

2. Композиция изоморфизмов гильбертовых пространств является изоморфизмом гильбертовых пространств.

Теорема Рисса — Фишера. *Пусть V — гильбертово пространство и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ — его гильбертов базис. Тогда*

$$\varphi : \ell^2 \to V, \quad \varphi(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n \geqslant 1} x_i \mathbf{e}_i$$

является изоморфизм гильбертовых пространств. Обратным к φ является оператор

$$\varphi^{-1} : V \to \ell^2, \quad \varphi^{-1}(v) = ((v, \mathbf{e}_1), (v, \mathbf{e}_2), \ldots).$$

Следствие 5.59 *Любые два гильбертова пространства, имеющие одинаковую размерность, изоморфны.*

Из теоремы Рисса — Фишера следует, что если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ — его гильбертов базис гильбертова пространства V, то для всякого вектора $v \in V$ определено разложение по базису

$$v = \sum_{i \geqslant 1} (v, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i$$

и, в частности, имеет место *равенство Парсеваля*

$$\|v\|^2 = \sum_{i \geqslant 1} |(v, \mathbf{e}_i)|^2.$$

Напомним, что векторное пространство V называют *прямой суммой* его подпространств X и Y и пишут

$$V = X \dot{+} Y \qquad \text{(также пишут } V = X \oplus Y\text{)},$$

если для любого $v \in V$ существует единственное разложение

$$v = x + y, \qquad \text{где } x \in X,\ y \in Y.$$

Теорема 5.60 *Пусть V — гильбертово пространство и X — замкнутое подпространство в V. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Подмножество*

$$X^{\perp} := \{v \in V \mid (v, x) = 0 \text{ для всякого } x \in X\}$$

является замкнутым подпространством в V (его называют ортогональным дополнением к X в V*).*

2. $V = X \dot{+} X^{\perp}$

3. *Существует оператор $\mathbf{pr}_X : V \to V$ такой, что*

   (a) $\mathbf{Ker}(\mathbf{pr}_X) = X^{\perp}$;

   (b) $\mathbf{pr}_X(x) = x$ *для любого* $x \in X$;

   (c) $\|\mathbf{pr}_X\| = 1$

(оператор $\mathbf{pr}_X$ называют ортогональным проектором пространства V на X*).*

4. Для любых $v \in V$, $x \in X$ выполнено

$$\|v - \mathbf{pr}_X(v)\| \leqslant \|v - x\|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{pr}_X(v)$ (другими словами, ближайшим к v вектором, лежащим на X, является $\mathbf{pr}_X(v)$).

Теорема Рисса. *В гильбертовом пространстве V всякий непрерывный функционал имеет вид $(\cdot, v_0)$ для некоторого $v_0 \in V$*

Из теоремы Рисса следует, что сопряженное к вещественному гильбертовому пространству V изоморфно ему самому. А именно, изоморфизм определяется оператором

$$\varphi : V \to V', \qquad \varphi(v) = (\cdot, v) : V \to \mathbb{R}.$$

Аналогично сопряженное к комплексному гильбертовому пространству V *антиизоморфно* ему самому. А именно, антиизоморфизм определяется оператором

$$\varphi : V \to V', \qquad \varphi(v) = (\cdot, v) : V \to \mathbb{C}.$$

5.5 Задача приближения

В этом параграфе мы рассмотрим частные случаи *задачи приближения.*

Сначала сформулируем задачу приближения в наиболее общем виде.

Задача приближения. *Дано метрическое пространство V, подмножество $X \subset V$ и элемент $v_0 \in V$. Требуется найти ближайший к v_0 элемент $x_0 \in X$*

Лемма 5.61 *Пусть V — гильбертово пространство, X — замкнутое линейное подпространство в V и $v_0 \in V$. Тогда ближайший к v_0 элемент $x_0 \in X$ существует и единственен.*

Пример 5.62 *На примере покажем как находить ближайщий элемент в гильбертовом пространстве в случае, когда подпространство X конечномерно.*

Пусть $V = L^2([-1,1],\lambda)$, $X = \langle 1, t, t^2\rangle$, $v_0 = t^3$. Если

$$x_0 = a + bt + ct^2 \in X$$

— ближайщий к v_0 элемент, то

$$0 = (v_0 - x_0, 1) = \int\limits_{[-1,1]} (t^3 - a - bt - ct^2)dt = -2a - \frac{2}{3}c,$$

$$0 = (v_0 - x_0, x) = \int\limits_{[-1,1]} (t^4 - at - bt^2 - ct^3)dt = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}b,$$

$$0 = (v_0 - x_0, x^2) = \int\limits_{[-1,1]} (t^5 - at^2 - bt^3 - ct^4)dt = -\frac{2}{3}a - \frac{2}{5}c,$$

откуда получаем $a = c = 0$, $b = \frac{3}{5}$. Таким образом, ближайшим к $v_0 = t^3$ элементом является $x_0 = \frac{3}{5}t$.

К сожалению, в случае негильбертовых пространств не существует простых алгоритмов решения задачи приближения. В следующих ниже двух примерах без доказательств приводятся ответы к задаче приближения в частных случаях для негильбертовых пространств.

Пример 5.63 *Пусть $V = C[-1,1]$, $X = \langle 1, t, \dots, t^{n-1}\rangle$, $v_0 = t^n$. В этом случае единственным ближайшим к v_0 элементом является*

$$2^{1-n}T_n(t) - t^n,$$

где $T_n(t)$ — n-й полином Чебышева 1-го рода. В частности, при $n = 3$ ближайшим элементом к t^3 является $\frac{3}{4}t$.

Пример 5.64 *Пусть $V = C_1[-1, 1]$ (см. пример 5.7), $X = \langle 1, t, \ldots, t^{n-1} \rangle$, $v_0 = t^n$. В этом случае единственным ближайшим к v_0 элементом является*

$$2^{-n} U_n(t) - t^n,$$

где $U_n(t)$ — n-й полином Чебышева 2-го рода. В частности, при $n = 3$ ближайшим элементом к t^3 является $\frac{1}{2}t$.

5.6 Задачи

Задача 5.65 *Пусть V — одномерное векторное пространство (вещественное или комплексное) и $0 \neq v_0 \in V$. Докажите, что:*

1. *всякая норма на V имеет вид*

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}, \quad \|\lambda v_0\| = |\lambda| c,$$

   где $c > 0$;

2. *всякая линейная функция на V непрерывна.*

Задача 5.66 *Докажите, что в нормированном пространстве шар $B(0, 1)$ и замкнутый шар $B^c(0, 1)$ являются выпуклыми, уравновешенными подмножествами (подмножество X векторного пространства называют* уравновешенным, *если для любого $x \in X$ и любого скаляра λ, где $|\lambda| \leqslant 1$ выполнено $\lambda x \in X$).*

Задача 5.67 *В нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_p)$ найдите:*

1. $\|(1,-1,1,-1)\|_3$;

2. $\|(1,2,0,2,3)\|_1$;

3. $\|(1,2,0,2,3)\|_\infty$.

Задача 5.68 *В нормированном пространстве ℓ^p найдите:*

1. $\| \left(-1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots\right) \|_1$;

2. $\| \left(-1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots\right) \|_2$;

3. $\|(1,2,0,2,3,1,1,1,\ldots)\|_\infty$.

Задача 5.69 *В нормированном пространстве $C[-1,1]$ найдите:*

1. $\|t^2\|$;

2. $\|\sin(t)\|$;

3. $\|t^2-t\|$.

Задача 5.70 *В нормированном пространстве $L^p([-\pi,\pi],d\lambda)$ найдите:*

1. $\|\sin(t)\|_2$;

2. $\|\cos(2t)\|_1$;

3. $\|t^3\|_2$.

Задача 5.71 *Докажите, что в нормированном пространстве V выполнено*

1. *$B(v, r) = v + B(0, r)$ для любого $v \in V$, $r > 0$;*

2. *$\lambda B(0, r) = B(0, \lambda r)$ для любых $\lambda, r > 0$.*

Задача 5.72 *Пусть V — нормированное пространство. Докажите, что отображения:*

1. *$f : V \to \mathbb{R}$, $f(v) = \|v\|$;*

2. *$\varphi : V \to V$, $\varphi(v) = \lambda v$, где $\lambda \in \mathbf{K}$;*

3. *$\varphi : V \to V$, $\varphi(v) = v + v_0$, где $v_0 \in V$*

— непрерывны (как отображения метрических пространств).

Задача 5.73 *Докажите, что в нормированном пространстве для всякого шара его замыкание совпадает с замкнутым шаром с тем же центром и радиусом.*

Задача 5.74 *Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — нормы в векторном пространстве V, B_1 и B_2 — шары радиуса 1 с центром в нуле по нормам $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Докажите, что норма $\|\cdot\|_1$ не слабее нормы $\|v\|_2$ тогда и только тогда, когда $B_1 \subseteq aB_2$ для некоторого $a > 0$.*

Задача 5.75 *Докажите, что в векторном пространстве:*

1. *всякая норма эквивалентна самой себе;*

2. *если норма $\|\cdot\|_1$ эквавалентна норме $\|\cdot\|_2$, а норма $\|\cdot\|_2$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_3$, то норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_3$.*

Задача 5.76 *Докажите, что на векторном пространстве непрерывных на отрезке* $[a, b]$ *функций норма*

$$\|f(t)\|_{C[a,b]} := \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|$$

не слабее нормы

$$\|f(t)\|_{C_1[a,b]} := \int_a^b |f(t)| dt,$$

но не наоборот (и, таким образом, эти нормы неэквивалентны).

Задача 5.77 *Приведите пример векторного пространства с несравнимыми нормами.*

Задача 5.78 *Пусть* $A : V \to U$ *— оператор. Докажите, что:*

1. *образ (прообраз) выпуклого подмножества является выпуклым подмножеством;*

2. *образ (прообраз) уравновешенного подмножества является уравновешенным подмножеством.*

Задача 5.79 *Пусть* $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ *и* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. *Рассмотрим отображение*

$$\varphi : C[a, b] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(f) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Докажите, что φ *является функционалом и найдите его норму.*

Задача 5.80 *Пусть* $x_1, x_2, \ldots \in [a, b]$ *и* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{R}$ *причем ряд* $\sum_{n \geqslant 1} |\lambda_n|$ *сходится. Докажите, что отображение*

$$\varphi : C[a, b] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(f) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_n f(x_n)$$

корректно определено, является функционалом и найдите его норму.

Задача 5.81 *Докажите, что отображение*

$$\varphi : C[0,2] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(f) = \int_0^2 f(t)t^2 dt$$

является функционалом и найдите его норму.

Задача 5.82 *Докажите, что отображение*

$$\varphi : C[-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(f) = \int_{-1}^1 f(t)t dt$$

является функционалом и найдите его норму.

Задача 5.83 *Докажите, что в нормированном пространстве всякое конечномерное подпространство замкнуто.*

Задача 5.84 *Рассмотрим пространство ℓ^p, где $p \geqslant 1$. Докажите, что:*

1. *подмножество*

   $$L := \{(x_1, x_2, \ldots) \in \ell^p \mid x_n = 0 \text{ для почти всех } n\}$$

   является линейным подпространством в ℓ^p;

2. $\dim(L) = \infty$;

3. *подпространство L не замкнуто в ℓ^p;*

4. $\overline{L} = \ell^p$.

Задача 5.85 *Рассмотрим пространство $C[a,b]$. Докажите, что:*

1. *подмножество $P[a,b]$, состоящее из многочленов, является линейным подпространством в $C[a,b]$;*

2. $\dim(P[a,b]) = \infty$*;*

3. *подпространство $P[a,b]$ не замкнуто в $C[a,b]$.*

Задача 5.86 *Пусть X — произвольное множество. Докажите, что формула (44) определеяет норму в векторном пространстве $\mathbf{K}_\infty^X$.*

Задача 5.87 *Докажите, что в предгильбертовом пространстве для нормы $\|\cdot\|$, которая определена скалярным произведением, выполнено* равенство параллелограмма

$$\|v+u\|^2 + \|v-u\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|u\|^2).$$

Задача 5.88 *Докажите, что на нормированном пространстве $C_1[a,b]$ (см. пример 5.7) не существует скалярного произведения, которое определяет его норму.*

Задача 5.89 *Докажите, что банахово пространство K^X (см. §5.3) не является гильбертовым.*

Задача 5.90 *В пространстве ℓ^2 найти $x_0 \in X$ ближайшую к v_0, где*

$$X = \langle (1, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots), (-1, 1, 1, 0, 0, \ldots) \rangle,$$
$$v_0 = (1, 3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, \ldots)$$

Задача 5.91 *В пространстве $L^2(0, \frac{\pi}{2})$ найти $x_0 \in X$ ближайшую к v_0, где*

$$X = \langle (\sin(t), \cos(t) \rangle, \quad v_0 = 1.$$

Указания к задачам

5.65.(1). А именно, $c = \|v_0\|$.

(2). Пусть $f : V \to \mathbb{R}$ — линейная функция. Можно считать, что $f \neq 0$ и, следовательно, $f(v_0) \neq 0$. Мы должны доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $v, v' \in V$ таких, что $\|v - v'\| < \delta$ выполнено $|f(v) - f(v')| < \varepsilon$. Мы утверждаем, что для $\varepsilon > 0$ в качестве такого δ можно взять $\delta = \frac{\varepsilon\|v_0\|}{|f(v_0)|}$. Действительно, пусть $v, v' \in V$. Так как V одномерно, то $v = \lambda v_0$, $v' = \lambda' v_0$, где $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. Условие $\|v - v'\| < \delta$ означает, что $\|\lambda v_0 - \lambda' v_0\| = \|(\lambda - \lambda')v_0\| = |\lambda - \lambda'| \cdot \|v_0\| < \frac{\varepsilon\|v_0\|}{|f(v_0)|}$, т.е. $|\lambda - \lambda'| < \frac{\varepsilon}{|f(v_0)|}$. Теперь имеем $|f(v) - f(v')| = |f(\lambda v_0) - f(\lambda' v_0)| = |(\lambda - \lambda')f(v_0)| = |\lambda - \lambda'| \cdot |f(v_0)| < \varepsilon$.

5.66. Докажем выпуклость открытого шара $B(0,1)$. Пусть $x, y \in B(0,1)$, т.е. $\|x\| < 1$, $\|y\| < 1$. Тогда $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| < 1$. Для замкнутого шара доказательство выпуклости аналогично. Уравновешенность открытых и замкнутых шаров очевидна.

5.71.(1). $B(v,r) = \{v' \in V \mid \|v' - v\| < r\} = \{v + v'' \in V \mid \|v + v'' - v\| < r\} = v + \{v'' \in V \mid \|v''\| < r\} = v + B(0,r)$.

(2). $\lambda B(0,r) = \lambda\{v \in V \mid \|v\| < r\} = \{\lambda v \in V \mid \|v\| < r\} = \{v' \in V \mid \|v\| < \lambda\} = B(0, \lambda r)$.

5.73. Из утверждения (1) задачи 5.72 следует, что замкнутые шары замкнуты и, следовательно, $\overline{B(v,r)} \subset B^c(v,r)$. Обратное включение следует из того, что всякий элемент $v' \in B^c(v,r)$, являясь пределом сходящейся последовательности $\{v_n = (1 - \frac{1}{n})v'\} \subset B(v,r)$, принадлежит замыканию $\overline{B(v,r)}$.

5.74. Если норма $\|\cdot\|_1$ не слабее нормы $\|\cdot\|_2$, то для любого $v \in B_1$ имеем $\|v\|_2 \leqslant a\|v\|_1 < 2a$, что доказывает включение $B_1 \subset 2aB_2$. Наоборот, предположим, что $B_1 \subset aB_2$. Тогда для любого $0 \neq v \in V$ имеем $\frac{v}{2\|v\|_1} \in B_1$, откуда $\|\frac{v}{2\|v\|_1}\|_2 \leqslant a$ и, следовательно, $\|v\|_2 = \left\|2\|v\|_1 \frac{v}{2\|v\|_1}\right\|_2 \leqslant 2a\|v\|_1$.

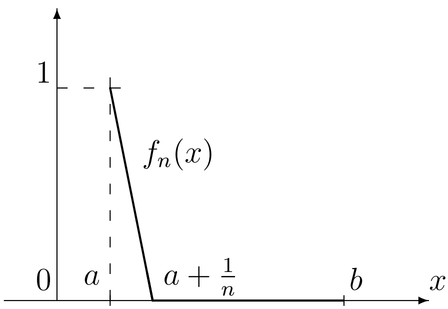
5.75.(1). Очевидно.

(2) Так как норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_2$, то $a_1\|v\|_2 \leqslant \|v\|_1 \leqslant a_2\|v\|_2$ для любого $v \in V$. Так как норма $\|\cdot\|_2$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_3$, то $b_1\|v\|_3 \leqslant \|v\|_2 \leqslant b_2\|v\|_3$ для любого $v \in V$. Из предыдущего вытекает, что $a_1 b_1\|v\|_3 \leqslant \|v\|_1 \leqslant a_2 b_2\|v\|_3$ для любого $v \in V$ и, значит, норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_3$

5.76. То, что норма $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ не слабее нормы $\|\cdot\|_{C_1[a,b]}$, следует из доказываемого в курсе анализа неравенства $\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)| \geqslant (b-a)\int_a^b |f(t)|dt$. Для доказательства второго утверждения рассмотрим функцию

$$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 + n(a-t), & \text{при } x \in [a, a+\frac{1}{n}], \\ 0, & \text{при } x \in (a+\frac{1}{n}, b], \end{cases}$$

где n — параметр,



Тогда $\|f_n(t)\|_{C[a,b]} = 1$, $\|f_n(t)\|_{C_1[a,b]} = \frac{1}{2n}$, откуда следует, что норма $\|\cdot\|_{C_1[a,b]}$ не может быть не слабее нормы $\|\cdot\|_{C[a,b]}$.

5.77. Из утверждения предыдущей задачи несложно вывести, что в пространстве $C[0,2]$ нормы

$$\|f\| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)| + \int_1^2 |f(t)|dt \qquad \text{и}$$

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt + \sup_{1\leqslant t\leqslant 2}|f(t)|$$

несравнимы.

5.79. $\|\varphi\| = |\lambda_1|+\ldots+|\lambda_n|$. Действительно, (1) для $f\in C[a,b]$ имеем $|\varphi(f)| \leqslant |\lambda_1||f(x_1)| + \ldots + |\lambda_n||f(x_n)| \leqslant |\lambda_1|\|f\| + \ldots + |\lambda_n|\|f\| = \|f\|(|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|)$ и, следовательно, $\|\varphi\| \leqslant |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|$, (2) для кусочно-линейной функции $f(t)\in C[a,b]$, имеющей узлы в точках $a, x_1, \ldots, x_n, b$ со значениями $f(a) = \pm 1$, $f(x_i) = \mathbf{sgn}(\lambda_i)$, $f(b) = \pm 1$ имеем $\|f(t)\|_{C[a,b]} = 1$ и $|\varphi(f)| = |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|$.

5.80. $\|\varphi\| = \sum_{i\geqslant 1}|\lambda_i|$. Действительно, (1) для $f\in C[a,b]$ имеем $|\varphi(f)| \leqslant \sum_{i\geqslant 1}|\lambda_i||f(x_i)| \leqslant \sum_{i\geqslant 1}|\lambda_i|\|f\| = \|f\|\sum_{i\geqslant 1}|\lambda_i|$ и, следовательно, $\|\varphi\| \leqslant \sum_{i\geqslant 1}|\lambda_i|$, (2) для любого $n\geqslant 1$ для кусочно-линейной функции $f(t)\in C[a,b]$, имеющей узлы в точках $a, x_1, \ldots, x_n, b$ со значениями $f(a) = \pm 1$, $f(x_i) = \mathbf{sgn}(\lambda_i)$, $f(b) = \pm 1$ имеем $\|f(t)\|_{C[a,b]} = 1$ и $|\varphi(f)| = \sum_{i\geqslant 1}^n |\lambda_i|$ и, следовательно, $\|\varphi\| \geqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i\geqslant 1}^n |\lambda_i| = \sum_{i\geqslant 1}|\lambda_i|$.

5.81. $\|\varphi\| = \frac{8}{3}$.

5.82. $\|\varphi\| = 1$.

5.83. Пусть V — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $L\subset V$ — конечномерное подпространство. Мы должны доказать, что для произвольной сходящейся последовательности $\{v_i\}\subset L$ ее предел v принадлежит L. Так как $v\in B_V(0, 2\|v\|)$, то $v_i\in B_V(0,2\|v\|)$ начиная с некоторого i; другими словами, последовательность $\{v_i\}$ ограничена в L по норме $\|\cdot\|_1$ — ограничения на L нормы $\|\cdot\|$. В пространстве L рассмотрим также норму $\|\cdot\|_2$ такую, что $\|x_1e_1 + \ldots + x_ne_n\|_1 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, где $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый фиксированный базис пространства L. Так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то $\{v_i\}$ ограничена в L по норме $\|\cdot\|_2$. Заметим, что пространство L с нормой $\|\cdot\|_2$ — это обычное пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой метрикой d_2. По теореме Больцано — Вейерштрасса из последовательности $\{v_i\}$ можно выделить сходящуюся по норме $\|\cdot\|_2$ подпоследовательность $\{v_{i_k}\}$ (скажем, сходящуюся к $v' \in L$). Так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то подпоследовательность $\{v_{i_k}\}$ сходится к v' по норме $\|\cdot\|_1$. Следовательно, $\{v_{i_k}\}$, как последовательность в V, сходится к v' по норме $\|\cdot\|$, откуда следует, что $v = v' \in L$.

5.84.(1). Очевидно.

(2). Бесконечная система векторов $(1, 0, 0, \ldots), (0, 1, 0, \ldots), \ldots$ линейно независима и, следовательно, $\dim(L) = \infty$.

(4). Следует из того, что всякий $(x_1, x_2, \ldots) \in \ell^p$ является пределом последовательности $\{x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\} \subset L$.

(3). Следует из (4).

5.85.(1). Очевидно.

(2). Бесконечная система векторов $1, t, t^2, \ldots$ линейно независима и, следовательно, $\dim(P[a, b]) = \infty$.

(3). Последовательность $\{f_n(t) = 1 + \frac{t^1}{1!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\} \subset P[a, b]$ сходится к $e^t \notin P[a, b]$.

5.88. Для $t - a$ и $b - t$ не выполнено равенство параллелограмма.

5.89. Для $\mathbf{1}_A$ и $\mathbf{1}_{X \setminus A}$, где $A \subseteq X$ — произвольное непустое подмножество не выполнено равенство параллелограмма.

6 Приложения

6.1 Индекс Херфиндаля и его обобщения

Согласно современным взглядам науки, рынки (мировой, отдельной страны, большого города и т.п.) являются *сложными системами*. Существуют и другие сложные системы, например, экосистемы (островов, континентов и т.п.), политические партии и движения в стране. Их изучением занимается *теория сложных систем*. Согласно этой теории, *составляющие* всякой сложной системы

1. разнообразны;
2. зависят друг от друга;
3. постоянно адаптируются.

Причем перечисленными свойствами составляющие обладают в меру — не слишком слабо и не слишком сильно. Если у составляющих сложной системы каким-либо образом слишком ослабить или слишком усилить хотя бы одно из этих свойств, то система будет разрушена (перестанет быть сложной системой).

Существенным обстоятельством является то, что большинство сложных систем, с которыми имеет дело человечество, не следует разрушать. Для этого, в частности, необходимо следить, чтобы составляющие таких системы в меру обладали свойством (1), т.е. были в меру разнообразны. Для контроля над разнообразием составляющих сложной системы используют *индексы разнообразия*. Индексы разнообразия можно определять многими способами и самого лучшего универсального определения не существует.

В экономике в качестве индекса разнообразия чаще всего используют индекс Херфиндаля и называют его степенью концентрации рынка (производителей автомобилей, грузоперевозчиков и т.п.). А именно, если на рынке работают фирмы

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

товарообороты которых соотносятся как

$$k_1 : k_2 : \ldots : k_n,$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1$, то индексом Херфиндаля называют число

$$H := k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_n^2.$$

При этом:

- при $H \leqslant 0.01$ рынок считается неконцентрированным высококонкурентным;
- при $0.01 \leqslant H \leqslant 0.1$ рынок считается неконцентрированным;
- при $0.1 \leqslant H \leqslant 0.18$ рынок считается среднеконцентрированным;
- при $0.18 \leqslant H$ рынок считается высококонцентрированным.

В биологии в качестве индексов разнообразия чаще всего используют *индекс Симпсона* и *энтропию Шеннона.* Если биосистему составляют виды

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

биомассы которых соотносятся как

$$k_1 : k_2 : \ldots : k_n,$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1$, то индексом Симпсона называют число

$$k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_n^2,$$

а энтропией Шеннона называют число

$$-k_1 \ln k_1 - k_2 \ln k_2 - \ldots - k_n \ln k_n.$$

Чтобы понять, почему перечисленные выше индексы могут давать неправильное представление о разнообразии, приведем примеры.

Пример 6.1 *Рассмотрим два рынка. На каждом работают по 15 фирм с равными товарооборотами. На первом рынке контрольными пакетами акций фирм владеют разные банки, на втором рынке один банк владеет контрольными пакетами акций каждой из 15 фирм. Индексы Херфиндаля этих рынков одинаковы и равны* $\frac{1}{15}$. *Однако ясно, что первый рынок неконцентрирован, а на втором рынке фактически имеет место высокая концентрация.*

Пример 6.2 *Рассмотрим две биосистемы. Первая содержит 5 видов птиц, 5 видов грызунов и 5 видов рыб, а вторая — 15 видов грызунов. Индексы Симпсона этих систем одинаковы и равны* $\frac{1}{15}$. *Однако очевидно, что первая система разнообразнее, чем вторая.*

На этих примерах ясно почему индексы Симпсона и Херфиндаля могут давать неправильные представления о разнообразии: эти индексы не учитывают то, насколько близки составляющие системы. Возникает естественная

Задача: *Для сложных систем данного типа определить индекс разнообразия, который бы учитывал степень близости составляющих системы*

Эту задачу можно решать следующим образом.

1-й шаг. Для возможных составляющих сложных систем данного типа определяются степени близости между возможными составляющими этих систем (о том, как это можно сделать, см. замечание 2.19). После этого для всякой системы $\mathcal{A}$ данного типа с составляющими $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на множестве

$$A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

определяется метрика d так, что расстояние $d(A_i, A_j)$ равно степени близости составляющих A_i и A_j. На метрическом пространстве A мы имеем вероятностную меру μ такую, что

$$\mu(A_i) := \{\text{доля составляющей } A_i \text{ в системе } \mathcal{A}\}.$$

Таким образом, A является *конечным вероятностным метрическим пространством.*

2-й шаг. Ищется универсальная для всех систем данного типа функция

$$\Phi : \left\{ \begin{matrix} \textit{конечные вероятностные} \\ \textit{метрические пространства} \end{matrix} \right\} \to \mathbb{R},$$

подставляя в которую конечное вероятностное метрическое пространство, соответствующее сложной системе данного типа, будем получать индекс разнообразия этой сложной системы. Придумать «хорошую» функцию Φ — математическая задача. Функция Φ на примерах оценивается специалистами по сложным системам данного типа на предмет того, насколько она хорошо определяет индекс разнообразия.

6.2 Интеграл Лебега в теории вероятностей

Вероятностное пространство — это пространство с мерой (Ω, p) такое, что $p(\Omega) = 1$. Вероятностное пространство интерпретируется как математическая модель эксперимента, при проведении которого в результате получают один из исходов $\omega \in \Omega$. Всякое подмножество A множества Ω интерпретируется как *событие*, состоящее в том, что в результате эксперимента получен исход, принадлежащий подмножеству A. Для измеримого подмножества A его мера $p(A)$ интерпретируется как вероятность события A. События $A, B \subset \Omega$ называются *независимыми*, если

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

По смыслу, события независимы, если вероятность того, что произошло одно из них не меняется при поступлении информации о том, что произошло другое. Для подмножества B такого, что

$$0 < p(B),$$

число

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

интерпретируется как вероятность наступления события A при условии, что произошло событие B, и называется *вероятностью события A при условии B*. По смыслу, если не известно, какой исход ω получен при проведении эксперимента, но известно, что $\omega \in B$ (т.е. что произошло событие B), то вероятность того, что $\omega \in A$ (т.е. что произошло событие A) равна $p(A \mid B)$.

Пусть (Ω, p) — вероятностное пространство. Измеримые вещественнозначные функции вида

$$f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$$

называются *случайными величинами* (рассматриваются также комплекснозначные случайные величины). Случайную величину f называют *дискретной*, если она принимает не более чем счетное множество значений. По определению, σ-алгеброй, порожденной случайной величиной f, называется $f^{-1}(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра на $\overline{\mathbb{R}}$. Случайные величины f, g называются независимыми, если для любых $[a, b], [c, d] \subset \overline{\mathbb{R}}$ события $f^{-1}([a, b])$ и $g^{-1}([c, d])$ независимы. По смыслу, случайные величины независимы, если вероятностные ожидания того, какое значение приняла одна из них, не меняются при поступлении информации о значении, которое приняла другая.

Интеграл Лебега

$$\int\limits_{\Omega} f dp$$

называется *математическим ожиданием* случайной величины f и обозначается через $\mathbf{M}[f]$. По смыслу, математическое ожидание случайной величины f показывает какое «в среднем» значение примет функция $f(x)$, если $x \in X$ взять случайно. *Дисперсией* случайной величины f называется значение интеграла Лебега

$$D[f] := \int\limits_{\Omega} (f - \mathbf{M}[f])^2 dp.$$

Так как интеграл Лебега от измеримой функции может не существовать, то случайная величина может не иметь математического ожидания, а также может иметь математическое ожидание и иметь дисперсию, равную ∞.

Пример 6.3 *Рассмотрим эксперимент при котором одновременно бросаются 3 монеты достоинством 1, 2 и 5 рублей.*

Каждая монета может упасть вверх орлом O или решкой R. Таким образом,

$$\Omega = \{OOO,\ OOR,\ ORO,\ ORR,\ ROO,\ ROR,\ RRO,\ RRR\}$$

(первая буква указывает, как упал 1 рубль, вторая — 2 рубля и третья — 5 рублей). Интуитивно ясно, что вероятность каждого из 8 исходов одинакова и, следовательно, эта вероятность равна $\frac{1}{8}$. Событие A, состоящее в том, что орлом выпало $\leqslant 1$ монеты, есть

$$A = \{ORR, ROR, RRO, RRR\}.$$

Вероятность события A равна

$$p(A) = p(ORR) + p(ROR) + p(RRO) + p(RRR) = \frac{1}{2}.$$

Пусть B — событие, состоящее в том, что монета достоинством 1 рубль упала вверх орлом:

$$B = \{OOO, OOR, ORO, ORR\}.$$

Вероятность события A при условии B равна

$$\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(ORR)}{p(OOO) + p(OOR) + p(ORO) + p(ORR)} = \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим случайную величину

$$f : \Omega \to \mathbb{R},$$

где $f(x)$ — суммарное достоинство (в рублях) всех монет, упавших вверх орлом. Например,

$$f(OOO) = 8, \quad f(RRR) = 0, \quad f(ORO) = 2.$$

Нетрудно вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины f:

$$M[f] = \int_{\Omega} f dp = (8+7+6+5+3+2+1+0)\frac{1}{8} = 4;$$

$$D[f] = \int_{\Omega} (f-4)^2 dp = (2\cdot 4^2 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 1^2)\frac{1}{8} = \frac{15}{2}$$

Следует понимать, что свойства математического ожидания и дисперсии, которые приводят в курсах теории вероятностей, являются ничем иным, как свойствами интеграла Лебега, изложенными в терминах теории вероятностей. Типичным утверждением такого типа является

Лемма 6.4 (Неравенство Маркова) *Пусть (X, μ) — пространство с мерой, f — неотрицательная интегрируемая по Лебегу функция на X и $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\int_X f d\mu \geqslant \varepsilon\mu(\{x \in X \mid f(x) \geqslant \varepsilon\}).$$

Доказательство. Обозначим $A := \{x \in X \mid f(x) \geqslant \varepsilon\}$. Имеем

$$\int_X f d\mu \geqslant \int_A f d\mu \geqslant \int_A \varepsilon d\mu = \varepsilon\mu(A).$$

■

Заключение

Функциональный анализ является обязательным компонентом математического образования специалистов в области точных наук. Данное пособие, несмотря на свою компактность, содержит изложение наиболее важного материала, необходимого для изучения теории вероятностей, дифференциальных уравнений и для понимания современной научной литературы по финансовой математике. В сравнении с классическими учебниками по функциональному анализу в пособии уделено меньше внимания теории операторов. Имеется большое число учебников и учебных пособий, в которых излагаются основные понятия и методы функционального анализа и их приложения. Заинтересованный читатель может изучить соответствующие разделы функционального анализа по учебникам, приведенным в списке литературы.

Список литературы

[BP] Божокин С.В., Паршин Д.А., *Фракталы и мультифракталы.* — Ижевск, 2001.

[CK] Capinski M, Kopp E., *Measure, Integral and Probability*, Springer, 2005.

[GO] Гелбаум Б., Олмстед Дж., *Контрпримеры в анализе.* — М.: Мир, 1967.

[KF] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., *Элементы теории функций и функционального анализа.* — 7-е изд. — М.: Физматлит, 2009.

[KG] Кириллов А.А., Гвишиани А.В., *Теоремы и задачи функционального анализа.* — 2-е изд. — М.: Наука, 1988.

[Kr] Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, 1978.

[RF] Royden H.L., Fitzpatrick P.M., *Real Analysis.* — China Machine Press, 2010.

[SS] Stein E.M, Shakarchi R., *Real Analysis. Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton, 2004.

[VGP] Виленкин Н.Я., Граев М.И., Петров В.А., *Элементы функционального анализа в задачах*, — М.: Просвещение, 1978.

Учебное издание

Владимир Борисович Гисин
Павел Иванович Кацыло
Евгений Валерьевич Маевский

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Публикуется в авторской редакции
Корректор Т.Н. Кузнецова
Оформление обложки и титула В.А. Селина
Формат 60x90/16. Гарнитура Computer Modern
Подписано в печать 07.10.2014
Усл.п.л. 13,75. Уч.изд.л. 9,50
Тираж 100 экз. Заказ № 504

Финансовый университет
Ленинградский проспект, 49, Москва, 125993
(ГСП-3)
Отпечатано в ООП (Ленинградский, 51)
Издательства Финансового университета

ДЛЯ ЗАМЕТОК