Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

*Департамент анализа данных, принятия решений
и финансовых технологий*

Учебное электронное издание на диске

В.А. ПОПОВ

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Учебное пособие

для студентов вечерней и заочной форм обучения

Москва • 2017

УДК 336:51(075.8)
ББК 65.26в631
П58

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор Р.А. Саркисян
(Финансовый университет)

доктор экономических наук, профессор В.П. Семенов
(Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова)

Попов В.А.

П58 Основы финансовых вычислений: учебное пособие для студентов вечерней и заочной форм обучения / В.А. Попов – М.: Финансовый университет, 2017. – 178 с.

ISBN 978-5-7942-1402-4

Учебное пособие написано в соответствии с программой дисциплины «Основы финансовых вычислений». Дается подробное, и в то же время, несложное изложение следующих разделов: процентные расчеты, потоки платежей, облигации, теория портфеля ценных бумаг. Приводится множество примеров и задач, иллюстрирующих рассматриваемые понятия и формулы. Большое количество задач для самостоятельного решения, помещенных в конце каждой главы, и образцов контрольных и экзаменационных работ, помещенных в конце пособия, позволяет использовать его и в качестве задачника.

Издание предназначено студентам финансово-экономических вузов, особенно студентам заочной формы обучения.

УДК 336:51(075.8)
ББК 65.26в631

ISBN 978-5-7942-1402-4

Federal State – Funded Educational Institution
of Higher Education

“FINANCIAL UNIVERSITY UNDER THE GOVERNMENT
OF THE RUSSIAN FEDERATION”

*The Department of Data Analysis, Decision Making
and Financial Technologies*

Educational electronic edition on CD

VLADIMIR A. POPOV

FUNDAMENTALS OF FINANCIAL COMPUTATIONS

TUTORIAL
FOR EXTRAMURAL STUDIES

Moscow • 2017

UDC 336:51(075.8)

Reviewers:

PhD, Professor R.A. Sarkisyan
(Financial University)

PhD, Professor V.P. Semenov
(Plekhanov Russian University of Economics)

Vladimir A. Popov

Fundamentals of financial computations: tutorial for extramural studies / Vladimir A. Popov – M.: Financial University, 2017. – 178 p.

ISBN 978-5-7942-1402-4

Study guide is written in accordance with the program of the subject "Fundamentals of Financial Computations". The detailed and not complicated consideration of the following topics is given. These topics are as follows – interest, cash flaws, bonds, security portfolio. It is necessary not only to financiers but to any person who wants to know something on these topics. There are a lot of examples in order to clarify the notions and formulas which are considered. A lot of problems attached to every chapter can allow using this guide as an exercise book.

Study guide is intended for the students of Baccalaureat Programme in economics and finances and first of all for distant education.

UDC 336:51(075.8)

ISBN 978-5-7942-1402-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

ПРЕДИСЛОВИЕ

Имеется достаточно большое количество учебных пособий по финансовым расчетам. Однако все они предполагают некоторый уровень математической подготовки. В то же время те или иные финансовые расчеты необходимо проводить всем, даже очень далеким от математики лицам и организациям. Правильно считать деньги и проценты не столь уж сложно. Принципы, лежащие в основе финансовых вычислений, просты и почти не требуют привлечения серьезных математических навыков. Даже школьный курс математики избыточен для овладения основами финансовых вычислений. Основная задача данного учебного пособия состоит в том, чтобы помочь студентам, изучающим финансы, овладеть основными принципами и формулами правильного подсчета денег и процентов при отсутствии базовых знаний математики, так сказать с нуля. Небольшие навыки математических вычислений легко восстанавливаются или осваиваются заново по ходу дела.

Необходимость правильно проводить различные финансовые расчеты не вызывает ни малейших сомнений. Поэтому изучению финансовых вычислений во многих высших учебных заведениях уделяется большое внимание. Читаются различные курсы лекций (часто достаточно сложных) по финансовой математике. Тем не менее, многие специалисты с высшим образованием, и даже финансисты, неправильно вычисляют проценты. Это говорит о том, что прежде всего, должны изучаться основы финансовых вычислений с решением большого количества учебных и практических задач.

Такое изучение должно подкрепляться наличием учебников, задачников и учебных пособий. Различные руководства по финансовой математике существуют, но их изучение достаточно затруднительно для обычных студентов, и особенно для студентов заочной и вечерней форм обучения. Изложение финансовых вычислений часто носит излишне теоретический характер, изобилие формул не помогает, а лишь запутывает понимание того или иного вопроса. Поэтому основной задачей при написании учебного пособия по основам финансовых вычислений должна являться его простота.

Наличие учебных материалов необходимо всем студентам для самостоятельной работы, но особенно актуальны учебные руководства для студентов заочников, так как при дистанционном обучении частые контакты с преподавателем не предполагаются. Основной целью предлагаемого пособия является не только доступное изложение основ финансовых вычислений, но и решение большого количества задач. Приводится не только подробный разбор примеров, но и дается множество аналогичных упражнений для самостоятельного решения. Эти упражнения могут быть использованы при составлении контрольных работ. Как показывает опыт работы автора в заочном институте финансового университета именно решение задач позволяет студентам при помощи различных учебных пособий самостоятельно прийти к пониманию сути финансовых вычислений.

Пособие состоит из четырех глав, в каждой из которых разбирается большое количество вычислительных примеров, и содержится специальный раздел с задачами и ответами. В первой главе приведены основные формулы вычисления процентов. Анализируются, так называемые, простые и сложные проценты, кратное и непрерывное начисление процентов. Изучаются различные виды дисконтирования. Выводится формула Фишера для вычисления реальной процентной ставки при учете инфляции. Выводятся также формулы для доходности и инфляции за несколько периодов, исследуется синергетический эффект. Приводится понятие эквивалентных платежей и процентных ставок, а также понятие эффективной процентной ставки.

Вторая глава посвящена потокам платежей. Дается понятие приведенной и наращенной суммы совокупности платежей. Определяется внутренняя норма доходности потока платежей. Рассматриваются такие понятия как средний срок и дюрация потока платежей, рассчитываются параметры рент. Подробно изучаются регулярные потоки платежей и различные виды рент. Выводятся формулы коэффициентов приведения и наращения рент постнумерандо и пренумерандо. Приводится обоснованный метод сравнения рент, понятие эквивалентности, рассматривается конверсия рент.

В третьей главе изучаются облигации. Определяются основные числовые характеристики облигации: срок погашения, номинальная стоимость, купонный доход и купонная ставка. Выводится формула для вычисления текущей стоимости облигации. Сравнивается номинальная стоимость облигации и ее рыночная цена, определяется курс облигации. Выводятся формулы вычисления текущей доходности, доходности к погашению. Рассматриваются средний срок поступления дохода и дюрация.

Четвертая глава изучает портфели ценных бумаг. Эта глава носит характер дополнения к основному курсу и рассматривает лишь основные понятия. Изучаются по большей части портфели, состоящие из двух ценных бумаг. Анализируется связь между доходностью портфеля и его риском. Используя формулы зависимости риска портфеля от рисков составляющих его активов, вычисляются ценовые доли портфеля минимального риска.

Каждая глава содержит большое количество задач. В общей сложности в пособии содержится 154 задач, решение которых подробно разбирается, и 157 задач, снабженных только ответами, а также, 3 образца контрольных работ (по 10 задач в каждой) и 5 демонстрационных вариантов экзаменационных работ (по 6 задач в каждом). Поэтому, данное пособие может быть использовано не только в качестве учебника, но и в качестве задачника.

Учебное пособие предназначено для бакалавров всех финансовых, экономических и управленческих направлений, а в рамках этих направлений – для бакалавров всех профилей, включая финансы и кредит, бухгалтерский учет и аудит, налоги, страхование, финансовый менеджмент, международные экономические отношения и др. Но, прежде всего, оно предназначается студентам заочного отделения.

Следует заметить, что данное пособие может оказаться полезным всем, изучающим финансы, в том числе при проведении факультативных занятий по экономике и финансам со школьниками. Желающие приобрести более глубокие знания по финансовой математике могут обратиться к книгам, рекомендованным в списке литературы.

Глава 1
ПРОЦЕНТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1.1. Понятие процента

Сотая часть рубля называется копейкой, сотая часть доллара – центом (лат. *centum* – сто), сотая часть метра – сантиметром и т.д.

Процентом называется сотая часть любой величины или числа (1% = 1/100 = 0,01).

Следовательно, одна копейка – один процент рубля, один цент – один процент доллара, 1 см – один процент метра, число 0,07 – один процент от 7.

Понятие процента тесно связано с десятичными дробями.

• Чтобы обратить десятичную дробь в проценты, ее нужно умножить на 100. Наоборот, чтобы перевести проценты в десятичную дробь, нужно их число разделить на 100.

Пример 1.1.

• Представьте десятичные дроби в процентах.

□ 0,32 = 32% (так как $0,32 \cdot 100 = 32$);

6,478 = 647,8% (так как $6,478 \cdot 100 = 647,8$);

0,0536 = 5,36% (так как $0,0536 \cdot 100 = 5,56$). ■

• Запишите проценты в виде десятичных дробей.

□ 51% = 0,51 (так как 51 : 100 = 0,51);

213% = 2,13 (так как 213 : 100 = 2,13);

0,0381% = 0,000381 (так как 0,0381:100 = 0,000381). ■

Три основные задачи на проценты

1. Для того, чтобы найти p процентов от данного числа A (число B), нужно:

- перевести p процентов в десятичную дробь;
- умножить число A на получившуюся десятичную дробь, т.е.

$$B = A \cdot \frac{p}{100}.$$

Пример 1.2. Найдите 72% от числа 15.

□ $$15 \cdot \frac{72}{100} = 15 \cdot 0{,}72 = 10{,}8. \blacksquare$$

Вычислите 128% от 20.

□ $$20 \cdot \frac{128}{100} = 20 \cdot 1{,}28 = 25{,}6. \blacksquare$$

2. Для того, чтобы найти все число A по известной части B и числу соответствующих процентов p, нужно:

- перевести p процентов в десятичную дробь;
- разделить B на полученную десятичную дробь, т.е.

$$A = B : \frac{p}{100} = B \cdot \frac{100}{p}.$$

Пример 1.3. Найдите число, если известно, что 25% его равно 45% от 640.

□ Находим вначале часть от целого, т.е. 45% от 640:

$$B = 640 \cdot \frac{45}{100} = 640 \cdot 0{,}45 = 288.$$

Теперь восстанавливаем целое по его части

$$A = B : \frac{25}{100} = 288 \cdot 4 = 1152. \ \blacksquare$$

Пример 1.4. Вкладчик положил в банк некоторую сумму денег под 13% в год. Через год он получил прибыль в 26 000 рублей. Найдите величину вклада.

□ $$26\,000 : 0{,}13 = 200\,000 \text{ (руб.)} \blacksquare$$

3. Чтобы найти процент числа B от числа A, нужно дробь B/A умножить на 100%:

$$\frac{B}{A} \cdot 100\%.$$

Пример 1.5. Найдите, сколько процентов составляет число 0,7 от числа 2,8.

□ $$\frac{0{,}7}{2{,}8} \cdot 100 = \frac{70}{2{,}8} = 25\%. \blacksquare$$

Пример 1.6. Если гречка дешевле риса на 50%, то насколько процентов рис будет дороже гречки?

□ Обозначим цену одного кг риса через $Р$, а гречки через $Г$. Тогда по условию задачи

$$\frac{\text{Р} - \text{Г}}{\text{Р}} = 0{,}5 \;\Rightarrow 1 - \frac{\text{Г}}{\text{Р}} = 0{,}5 \Rightarrow \frac{\text{Р}}{\text{Г}} = 2;$$

$$\frac{\text{Р}-\text{Г}}{\text{Г}} \cdot 100\% = \left(\frac{\text{Р}}{\text{Г}} - 1\right) \cdot 100\% = (2 - 1) \cdot 100\% = 100\%. \blacksquare$$

Пример 1.7. Накладные расходы составляют 55% общих расходов фирмы. Если накладные расходы увеличить в 6 раз, то, сколько процентов после этого они будут составлять от общих расходов?

□ Пусть R – общие расходы фирмы. Тогда ее накладные расходы составят $0{,}55R$, а прочие – $0{,}45R$. После увеличения накладных расходов в 6 раз получим $0{,}55R \cdot 6 = 3{,}3R$, а общие расходы станут равными $3{,}3R + 0{,}45R = 3{,}75R$. Отсюда найдем процент накладных расходов от общих

$$\frac{3{,}3R}{3{,}75R} \cdot 100\% = 88\%. \blacksquare$$

Пример 1.8. Рабочий день сократился с 8 часов до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла бы на $n\%$?

□ Пусть при 8-часовом рабочем дне заработная плата составляла A руб. После повышения на 5% она составит $A\left(1 + {}^{5}\!/_{100}\right)$ руб. Оценивая производительность труда в количестве денег, зарабатываемых за один час работы, будем иметь:

раньше ${}^{A}\!/_{8}$ теперь ${}^{A}\!/_{7} \cdot \left(1 + {}^{5}\!/_{100}\right)$.

Процентный прирост производительности труда вычислим по формуле

$$\frac{\frac{A}{7}\left(1+\frac{5}{100}\right)-\frac{A}{8}}{\frac{A}{8}}.100=\frac{A\left(\frac{105}{700}-\frac{1}{8}\right)\cdot 100}{A\cdot\frac{1}{8}}=\left(\frac{105}{700}-\frac{1}{8}\right)\cdot 800=120-100=20\%.\blacksquare$$

Пример 1.9. В результате реконструкции цеха число высвободившихся рабочих заключено в пределах от 1,7% до 2,3% от общего числа рабочих цеха. Найдите минимальное число рабочих, которое могло быть занято в цехе до реконструкции.

□ Пусть x – искомое число рабочих, а y – число высвободившихся рабочих. Тогда по условию задачи

$$1{,}7\le\frac{y}{x}\cdot 100\le 2{,}3,$$

откуда получим

$$\frac{100}{2{,}3}y\le x\le\frac{100}{1{,}7}y\Leftrightarrow 43{,}478y\le x\le 58{,}824y.$$

Для того, чтобы натуральное число x в этих оценках было наименьшим, нужно, чтобы минимально возможным было и натуральное число y. При $y=1$ имеем диапазон

$$43{,}478\le x\le 58{,}824,$$

наименьшее натуральное число x, которое попадает в этот диапазон равно $x=44$. ■

Пример 1.10. Предприниматель взял кредит под 50% в год и купил акции предприятия с более высоким процентом годового дохода. Через год он выплатил проценты по кредиту, а оставшуюся сумму вновь вложил в такие же акции. Еще через год он получил ровно столько дохода, чтобы вернуть кредит с процентами. Какой процент выплачивается на акции?

□ Пусть S – величина взятого кредита, а x – доля (процент) годового дохода.

Составим диаграмму этапов изменения капитала S:

$$S\overset{1}{\Rightarrow}S+xS=(1+x)S\overset{2}{\Rightarrow}(1+x)S-0{,}5S=(0{,}5+x)S\overset{3}{\Rightarrow}$$

$$\overset{3}{\Rightarrow}(0{,}5+x)S+x(0{,}5+x)S.$$

Здесь 1 – этап увеличения капитала за счет выплаты процентов в первый год, 2 – этап возврата процентов по кредиту, 3 – этап выплаты процентов за второй год.

По условию задачи доход, полученный за второй год: $x(0{,}5+x)S$ равен первоначальному кредиту S вместе с процентами $0{,}5S$, т.е.

$$x(0{,}5+x)S = S + 0{,}5S = 1{,}5S,$$

откуда получим

$x(0{,}5+x) = 1{,}5 \Leftrightarrow x^2 + 0{,}5x - 1{,}5 = 0,$

$x_1 = 1 = 100\%, x_2 = -1{,}5$ (не подходит по смыслу задачи). ■

Пример 1.11. После реконструкции поточной линии ее производительность за смену возросла на 60%, расход электроэнергии за смену сократился на 20%, а цена 1 кВт/ч электроэнергии за время реконструкции возросла на 150%. На сколько процентов увеличились затраты на электроэнергию в расчете на единицу продукции?

□ Если до реконструкции за смену на линии производилось x единиц продукции, расходовалось y кВт/ч электроэнергии, а цена 1 кВт/ч была c, то затраты на электроэнергию в расчете на единицу продукции были $A = \frac{yc}{x}$. После реконструкции за смену производится $1{,}6x$ единиц продукции, расходуется $0{,}8y$ кВт/ч электроэнергии, а цена 1 кВт/ч составляет $2{,}5c$. Поэтому затраты на электроэнергию в расчете на единицу продукции составляют

$$\frac{(0{,}8y)(2{,}5c)}{1{,}6x} = \frac{5yc}{4x} = 1{,}25A.$$

Следовательно, интересующие нас затраты увеличились на

$$\frac{1{,}25A - A}{A} \cdot 100\% = 25\%. \ ■$$

Пример 1.12. Вода, содержащая после использования на производстве 8% примесей, поступает на очистку. После очистки часть ее, содержащая 2% примесей, возвращается на производство, а остальная часть с 77% примесей сливается в отстойник. Какой процент воды, поступающей на очистку, возвращается на производство?

□ Составим таблицу

Вода	*Объем примесей*	*Объем воды*	*Процентное содержание примесей*
Поступившая	$0{,}08x$	x	8
Возвращенная	$0{,}02y$	y	2
Слитая в отстойник	$0{,}08x - 0{,}02y$	$x - y$	77

Подсчет процентного содержания примесей в воде, слитой в отстойник

$$\frac{100(0{,}08x - 0{,}02y)}{x - y} = 77,$$

приводит к соотношениям

$$8x - 2y = 77x - 77y, 75y = 69x, y = 0{,}92x,$$

откуда следует, что 92% воды, поступающей на очистку, возвращается на производство. ■

Вспомнив основные действия с процентами, можем далее перейти к изучению количественных методов оценки финансовых операций, которые принято называть «Методы финансовых вычислений» или «Методы финансовой математики».

1.2. Начисление простого процента

Исторически мы измеряем изменение капитала в процентах. Однако, все финансовые вычисления проводятся в долях. Если величина b составляет долю i от a, то $b = i \cdot a$. $p\%$ – это доля $i = \frac{p}{100}$. Если величина b составляет $p\%$ от a, то $b = \frac{p}{100} \cdot a$. Если величина b на $p\%$ больше a, то $b = a + \frac{p}{100} \cdot a = a + i \cdot a$. В финансовой практике долю i называют процентной ставкой. Возрастание капитала на $p\%$ называется возрастанием или наращением капитала по процентной ставке i $(i = \frac{p}{100})$. Пусть начальный капитал S_0 наращивается за определенный период по процентной ставке i, тогда величина капитала по истечении этого периода составит величину $S_1 = S_0 + iS_0 = S_0(1 + i)$. В итоге имеем формулу наращения капитала за один период

$$S_1 = S_0(1 + i)$$

Величина S_1 носит название **наращенная сумма**, а величина $(1+i)$ – **множитель (коэффициент) наращения** за один период. Для вычисления наращения за n периодов существует несколько методов. Они носят название простых процентов, сложных процентов, кратных процентов, непрерывных процентов.

Простой процент начисляется за время действия контракта на первоначально вложенную сумму S_0. При этом сумма процента, начисленного в предыдущие периоды, не принимается в расчет в процессе последующего наращения. Тогда сумма, наращенная за n периодов равна $S_0 + iS_0 + \cdots + iS_0 = S_0 + niS_0$. В итоге, получаем формулу вычисления наращенной суммы S_n за n периодов $S_n = S_0(1 + n \cdot i)$. Эта же формула применяется и при дробном числе периодов t. Таким образом, наращенная сумма S_t при ежегодном начислении процентов равна

$$S_t = S_0(1+it), \tag{1.1}$$

где i — годовая процентная ставка, t — число лет, $(1+it)$ — коэффициент наращения (процентную ставку часто задают в процентах, в этом случае она равна $i \cdot 100\%$).

Прибыль I от помещения денег на срок t, равна разности между наращенной суммой S_t и начальным капиталом S_0 называется **процентными деньгами** или в просторечии процентом. В случае простых процентов процентные деньги равны

$$I = S_t - S_0 = S_0(1+it) - S_0 = itS_0 \tag{1.2}$$

Пример 1.13. Ссуда 1 200 000 руб. выдана на квартал по простой ставке процентов 17% годовых. Определите наращенную сумму.

□ Используя формулу простых процентов для вычисления наращенной суммы по формуле (1.1) найдем

$$S_t = S_0(1+it) = 1\,200\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}17\right) = 1\,251\,000 \; \blacksquare$$

Формула (1.1) используется не только для вычисления наращенной суммы, но в качестве уравнения относительно одной из величин S_0, i, t при заданной наращенной сумме S_t. В качестве примера выразим срок удвоения начального капитала при заданной процентной ставке i.

Подставим в формулу (1.1) $2S_0$ вместо S_t. $2S_0 = S_0(1 + it)$. Сократив на S_0, получим $2 = 1 + it$. Откуда получаем так называемое **«правило 100»**

$$t = \frac{1}{i} = \frac{100}{p}, \tag{1.3}$$

где $p = i \cdot 100$ – процентная ставка, выраженная в процентах.

Например, при $p = 10\%$ удвоение капитала произойдет через 10 лет. Аналогично, количество лет, необходимое для увеличения начальной суммы в N раз, определяется формулой

$$t = \frac{N-1}{i} = \frac{100(N-1)}{p}.$$

Как правило, процентная рассматривается годовая процентная ставка, поэтому время t измеряется в годах. Если срок равен T дней, то $t = \frac{T}{K}$ и

$$S_t = S_0\left(1 + i\frac{T}{K}\right), \tag{1.4}$$

где K – временная база, или число дней в финансовом году.

Существуют различные способы (временные правила) вычисления числа дней T между датами и числа дней K в текущем годовом периоде. Для вычисления срока между датами используется одно из следующих правил.

Правило $ACT/365$ (используется в Великобритании, Японии). Предполагается, что в году 365(366) дней, т.е. $K = 365(366)$. Срок между датами T задается как точное фактическое число дней меду двумя датами. Если пронумеровать все дни текущего года, то T равно номеру последнего дня рассматриваемого периода минус номер первого дня периода.

Банковское правило $ACT/360$ (используется в США, Франции). Предполагается, что в году 360 дней, т.е. $K = 360$. Срок между датами T задается как фактическое число дней меду датами.

Правило $30/360$ (используется федеральными агентствами и корпорациями США). Предполагается, что в году 360 дней, т.е. $K = 360$. Срок между датами $(d_0; m_0; y_0)$ и $(d; m; y)$ вычисляется по правилу

$$T = 360(y - y_0) + 30(m - m_0) + (d - d_0)$$

Если на последовательных интервалах начисления процентов $t_1, t_2, \dots, t_n$ устанавливаются разные ставки процентов $i_1, i_2, \dots, i_n$, то наращенная сумма S_t за время $T = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ равна

$$S_t = S_0\left(1 + \sum_{k=1}^{n} t_k i_k\right).$$

Момент возврата ссуды может не указываться точно, а быть переменной величиной (например, в случае накопительного вклада до востребования). Тогда формула простых процентов (1.1) приобретает следующий вид

$$S_t = S_0\big(1 + i\,(t - t_0)\big),$$

где t_0 – момент выдачи ссуды, t –момент возврата долга с процентами, т.е. накопленная сумма является линейной функцией от времени, а графиком ее на плоскости «время-деньги» служит луч с начальной точкой (t_0, S_0) и угловым коэффициентом iS_0.

Вычислим наращенную величину $S_{t,m}$ при условии, что проценты начисляются m раз в году (ежеквартально при $m = 4$, ежемесячно при $m = 12$ и т.п.). Получим

$$S_{t,m} = S_0\left(1 + \frac{i}{m} mt\right) = S_0(1 + it),$$

т.е. наращенная сумма не зависит от кратности начисления.

Пример 1.14. Какова простая ставка процентов, при которой первоначальный капитал в размере 120 000 руб., достигнет через 90 дней 150 000 руб.? Число дней в году считается приближенно и равно K =360. Ответ приведите с точностью до 0,01%.

□ Воспользуемся формулой (1.1). Подставив данные задачи $S_t = 150000$; $S_0 = 120\,000$; $t = \frac{90}{360} = 0{,}25$, получим

$$150\,000 = 120\,000 \cdot (1 + 0{,}25i);$$

$$(1 + 0{,}25i) = \frac{150000}{120000} = 1{,}25;$$

$$0{,}25i = 1.25 - 1 = 0{,}25;$$

$i = 1$ (в процентах $i = 100\%$). ■

Пример 1.15. Ссуда 800 000 руб. выдана на квартал по простой ставке процентов 17% годовых. Определите наращенную сумму.

□ Используя формулу простых процентов для вычисления наращенной суммы по формуле (1.1) найдем

$$S_t = S_0(1 + it) = 800\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}17\right) = 834\,000. \blacksquare$$

Пример 1.16. Если начальная сумма возросла в p раз, то, на сколько процентов она увеличилась?

□ $$\frac{S_0p - S_0}{S_0} \cdot 100\% = (p-1) \cdot 100\% \,. \blacksquare$$

Пример 1.17. Если начальная сумма возросла на $r\%$, то во сколько раз она увеличилась?

□ $$S_0p = S_0(1 + r/100) \;\Rightarrow\; p = (1 + r/100) \text{ раз. } \blacksquare$$

Пример 1.18. Если начальная сумма уменьшилась в p раз ($p > 1$), то, на сколько процентов она уменьшилась?

□ Уменьшилась на $r = (1 - 1/p) \cdot 100\%$. ■

Пример 1.19. Если начальная сумма уменьшилась на $r\%$ ($r < 100$), то во сколько раз она уменьшилась?

□ Уменьшилась в $p = 1/(1 - r/100)$ раз. ■

Пример 1.20. Найдите сумму накопленного долга и проценты, если ссуда 200 000 руб. выдана на три года под простые 17% годовых. Во сколько раз увеличится наращенная сумма при увеличении ставки на 2%?

□ Вычислим сумму накопленного долга S_3 как наращенную сумму по формуле простых процентов (1.1)

$$S_3 = S_0 \cdot (1 + 3i) = 200\,000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}17) = 302\,000.$$

$$I = S_3 - S_0 = 102\,000 \text{ – процентные деньги.}$$

При ставке 17% + 2% = 19% наращенная сумма составит

$$S_3' = 200\,000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}19) = 314\,000.$$

Отсюда следует, что наращенная сумма увеличится в $\frac{S_3'}{S_3} = \frac{314000}{302000} = 1{,}0397$ раза. ■

Пример 1.21. Определите простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 150 000 руб. достигнет через 120 дней величины 190 000 руб. Временная база $K = 360$.

□ Воспользуемся формулой (1.4) при $\frac{T}{K} = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$. Подставив условия задачи, получим

$$190\,000 = 150\,000 \cdot \left(1 + \frac{i}{3}\right) \Rightarrow 1 + \frac{i}{3} = \frac{19}{15} \Rightarrow i = 3 \cdot \left(\frac{19}{15} - 1\right) = 0{,}8,$$

что соответствует 80%. ■

Пример 1.22. Определите период, за который начальный капитал в размере 33 000 у.е. вырастет до 40 000 у.е., если ставка простых процентов равна 4% годовых.

□ Принимая в расчет формулу (1.1) наращения по простой процентной ставке и подставляя в нее параметры условия задачи $S_0 = 33\,000$, $S_t = 40\,000$, $i = 0{,}04$, будем иметь

$$40\,000 = 33\,000 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot t) \Rightarrow 1 + 0{,}04 \cdot t = \frac{40}{33} \Rightarrow t = \frac{{}^{40}/_{33} - 1}{0{,}04} = 5{,}3 \ ■$$

Пример 1.23. Ссуда 500 000 руб. выдана на 3 года под 23% годовых (простые проценты). Во сколько раз больше наращенная сумма по сравнению со ссудой?

□ Найдем наращенную сумму по формуле (1.1) простых процентов

$$S_3 = S_0(1 + 3i) = 500000 \cdot (1 + 0{,}23 \cdot 3) = 845000 \Rightarrow \frac{S_3}{S_0} = \frac{845000}{500000} = 1{,}69,$$

что совпадает с множителем наращения. ■

В случае, если заемщик получает в настоящий момент в долг сумму S_0, а через время t должен вернуть сумму S_t, то разность D между наращенной суммой долга и суммой, взятой в долг, называется дисконтом, $D = S_t - S_0$. В случае простых процентов $D = itS_0$.

Пример 1.24. Заемщик должен платить 800 000 руб. через 75 дней. Кредит выдан под 21% годовых (простые проценты). Какова первоначальная сумма долга и дисконт $K = 360$?

□ Используя формулу (1.3), запишем

$$S_0 \cdot \left(1 + \frac{75}{360} \cdot 0{,}21\right) = 800000 \Rightarrow S_0 = \frac{800000}{1 + \frac{0{,}21 \cdot 75}{360}} = 766467{,}07.$$

Дисконт равен: $D = 800\,000 - 766467{,}07 = 33532{,}93$ (руб.) ■

Пример 1.25. На счет в банке кладется сумма в размере 400 000 руб. на 3 года под 10% годовых по схеме простых процентов с дальнейшей пролонгацией на последующие 2 года под 6% годовых по той же схеме. Найдите размер вклада через 6 лет. Определите наращенную сумму, если вклад изымается через 4 года и кладется на новый счет на 2 года по той же схеме.

□ По формуле (1.1) получим

a) $400\,000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}06) = 568\,000$;

б) $400\,000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}1) \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}06) = 582\,400$. ■

Пример 1.26. Вклад открыт под 10% годовых. На него начислен процентный платеж в сумме 1000 руб. Найдите величину вклада, если он был открыт на: а) 10 лет; б) 1 год; в) 6 месяцев; г) 10 дней. Временная база $K = 365$ дней.

□ По формуле (1.2) для вычисления процентного платежа, $I = S_0 it$, при значениях t равных: а) 10; б) 1; в) $\frac{6}{12} = 0{,}5$; г) $\frac{10}{365}$, получим

а) $1000 = S_0 \cdot 0{,}1 \cdot 10$; $S_0 = 1000$;

б) $1000 = S_0 \cdot 0{,}1 \cdot 1$; $S_0 = 1500/0{,}1 = 10\,000$;

в) $1000 = S_0 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5$; $S_0 = 1000/0{,}05 \approx 20\,000$;

г) $1000 = S_0 \cdot 0{,}1 \cdot 10 \cdot 365^{-1}$; $S_0 = 365 \cdot 1000 = 365\,000$. ■

Пример 1.27. За сколько лет при ставке 10% годовых вклад вырастет в 4 раза в схеме простых процентов?

□ Используем формулу наращения (1.1) как уравнение относительно t:

$$4S_0 = S_0 \cdot (1 + 0{,}1t);\ 1 + 0{,}1t = 4;\ t = 30\,. \blacksquare$$

Пример 1.28. За сколько лет удвоится капитал в схеме простых процентов при ставке 16% годовых?

□ Воспользуемся **«правилом 100»** (1.3), согласно которому запишем

$$t = \frac{100}{r} = \frac{100}{16} = 6{,}25. \blacksquare$$

1.3. Начисление сложного процента. Краткое и непрерывное начисление процентов

При длительных сроках кредитно-денежных отношений естественно применять процентную ставку не к первоначальному капиталу, а к капиталу предыдущего периода, т.е. полученные проценты реинвестируются или, другими словами, происходит капитализация полученных процентов. В этом случае

$$S_n = S_{n-1}(1+i) = S_{n-2}(1+i)^2 = \cdots = S_0(1+i)^n,$$
$$S_n = S_0(1+i)^n .$$

Последняя формула называется формулой сложных процентов, а множитель $(1+i)^n$ обозначает множитель наращения за n периодов. Иными словами, сложные проценты – это плата за пользование ссудой, рассчитываемая исходя из величины долга, в которую включается сумма процента, начисленного ранее.

При начислении сложных процентов за дробное число лет t используют ту же формулу с заменой целого числа n на дробное число t

$$S_t = S_0(1+i)^t . \tag{1.5}$$

Множитель $(1+i)^t$ называется коэффициентом (множителем) наращения капитала за время t при начислении сложных процентов.

На практике при начислении процентов в банках используют формулу смешанного начисления процентов

$$S_t = S_0(1+i)^t = S_0(1+i)^n \cdot (1+ih), \tag{1.6}$$

где n –целая часть числа t, а h –дробная часть этого числа.

Покажем, что при фиксированной годовой процентной ставке i и целом сроке вклада $t = n$, превышающем один год, начисление сложных процентов является более выгодным для вкладчика, чем начисление простых процентов. Для этого достаточно доказать, что множитель наращения по сложной процентной ставке больше, чем множитель наращения по простой процентной ставке

$$(1+i)^n > (1+in) .$$

По формуле бинома Ньютона:

$$(1+i)^n = 1 + in + \frac{n(n-1)}{2} i^2 + \cdots + i^n > 1 + in \; (n > 1) \,,$$

что подтверждает сказанное выше. При нецелом значении t можно применить формулу Тейлора

$$(1+i)^t \approx 1 + t \cdot i + \tfrac{t(t-1)}{2} i^2.$$

Из этой формулы следует следующее утверждение. Множитель наращения по сложной ставке больше множителя наращения по простой ставке при сроке большем единицы, и множитель наращения по простой ставке больше множителя наращения по сложной ставке при сроке меньшем единицы, т.е.

$$\forall t > 1 \; (1+i)^t > 1 + t \cdot i;$$

$$\text{при } 0 < t < 1 \; (1+i)^t > 1 + t \cdot i.$$

Справедливость сделанного утверждения иллюстрируется также графиком, приведенном на рис. 1.1.

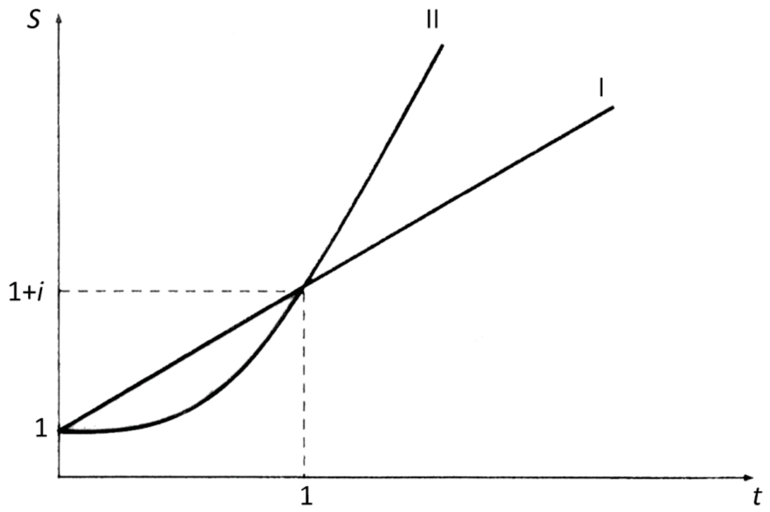

Рисунок 1.1 – Наращение по простой (I) и сложной (II) процентным ставкам

График показывает, что при продолжительности срока $t > 1$ множитель наращения по ставке сложных процентов больше множителя наращения по ставке простых процентов, а при $t < 1$ множитель наращения по ставке простых процентов больше множителя наращения по ставке сложных процентов.

Количество лет, необходимое для увеличения начальной суммы в N раз при начислении сложных процентов один раз в год можно найти следующим образом:

$$NS_0 = S_0(1+i)^t \Rightarrow \ln N = t \cdot \ln(1+i),\ t = \frac{\ln N}{\ln(1+i)}. \qquad (1.7)$$

Пример 1.29. За сколько лет произойдет удвоение капитала при начислении сложных процентов раз в год по процентной ставке $p\%$?

□ По формуле (1.7) $t = \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$.

С учетом приближенной формулы $\ln\left(1+\frac{p}{100}\right) \approx \frac{p}{100}$ и приближенного значения $\ln 2 \approx 0{,}693$, получим, что удвоение начальной суммы произойдет примерно за $t = \frac{69{,}3}{p}$ лет.

Для приближенных практических расчетов часто используют **«правило 70»**, согласно которому удвоение капитала происходит за $t = \frac{70}{p}$ лет. Например, при ставке 10% удвоение произойдет примерно за $t = \frac{70}{10} = 7$ лет.

Наращенная сумма при начислении сложного процента за произвольное число дней T определяется выражением

$$S_t = S_0(1+i)^{\frac{T}{K}}, \qquad (1.8)$$

где T_0 — по-прежнему, временная база.

Кратное начисление процентов. Рассмотрим -кратное начисление процентов, т.е. начисление сложных процентов m раз в году. Будем в качестве периода рассматривать новый (малый) период, длительность которого в m раз меньше года. Тогда, если число лет равно t, то число малых периодов равно mt, а если годовая сложная процентная ставка равна i, то сложная процентная ставка наращения за малый период равна $\frac{i}{m}$. Таким образом - кратное начисление сложных процентов происходит по сути дела по той же формуле, что и обычное начисление сложных процентов, только лишь с новым числом периодов и с новой процентной ставкой

$$S_{t,m} = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}. \qquad (1.9)$$

Пример 1.30. Банк предлагает различные варианты начисления сложного процента по ставке 12% годовых. Начальная сумма равна 1 млн руб. Найдите величину вклада через три года при начислении сложного процента: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 6; е) 12 раз в году.

□ По формуле (1.9) получим

а) $S_{3,1} = 10^6 \cdot (1 + 0{,}12)^3 \approx 1\,404\,928$ (руб.);

б) $S_{3,2} = 10^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^{2\cdot 3} \approx 1\,418\,519$ (руб.);

в) $S_{3,3} = 10^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{3}\right)^{3\cdot 3} \approx 1\,423\,312$ (руб.);

г) $S_{3,4} = 10^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{4\cdot 3} \approx 1\,425\,761$ (руб.);

д) $S_{3,6} = 10^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{6}\right)^{6\cdot 3} \approx 1\,428\,246$ (руб.);

е) $S_{3,12} = 10^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12\cdot 3} \approx 1\,430\,769$ (руб.). ■

Отсюда видно, что наращенная сумма зависит от частоты начисления процентов,—чем больше частота начисления процентов, тем больше наращенная сумма. То есть, для вкладчика выгоднее частое начисление процентов, а для должника – наоборот.

Сравнивая наращенные суммы, рассчитанные по формулам простых (1.1) и сложных (1.9) процентов $S_0(1 + it)$ и $S_0\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$, заметим, что равенство этих сумм выполняется только при $t = 1/m$. Следовательно, при кратном начислении процентов сложные проценты становятся выгоднее простых после первого начисления. Этот вывод проиллюстрирован графически на рис. 1.2 для полугодового начисления процентов (кратность $m = 2$).

Количество лет, необходимое для увеличения начальной суммы в N раз при начислении сложных процентов m раз в году, по аналогии с формулой (1.7), определяется выражением.

$$t = \frac{\ln N}{m \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)}. \qquad (1.10)$$

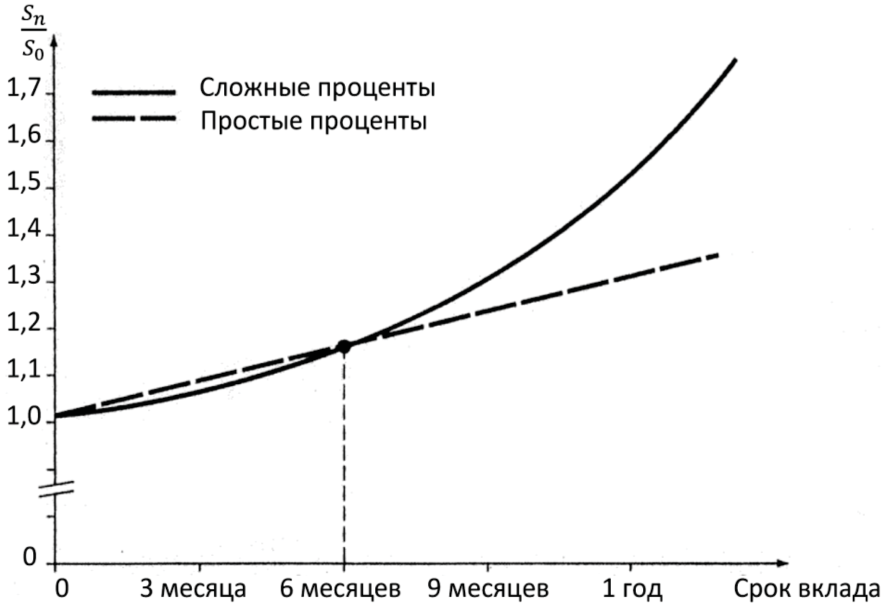

Рисунок 1.2 – Сравнение наращения в схемах простых и сложных процентов при полугодовом начислении процентов.

Непрерывное начисление процентов. Учащение начисления процентов до бесконечности приводит к так называемым непрерывным процентам. Перейдем в формуле (1.9) к пределу при $m \to \infty$, считая остальные параметры фиксированными. С учетом второго замечательного предела,

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

будем иметь

$$S_{t,\infty} = S_\infty = S_0 \cdot \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}\cdot\frac{i}{m}\cdot mt} =$$

$$= S_0 \cdot \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^{it} = S_0 e^{it}\,.$$

Из формулы (1.8) соответственно получим

$$S_\infty = S_0 e^{i\frac{T}{K}}\,. \qquad (1.12)$$

Расчеты, проведенные по формулам (1.11) или (1.12) принято называть расчетами при непрерывном начислении процентов.

Пример 1.31. В условиях **примера 1.30** найдите величину вклада при непрерывном начислении процента. Ответ округлите до ближайшего целого.

□ По формуле (1.11) получим

$$S_\infty = 10^6 \cdot e^{0,12\cdot 3} \approx 1\,433\,329 \text{ (руб.)} .$$

Как бы часто мы не начисляли проценты в году, наращенная сумма не превзойдет полученной величины. ■

Для операций наращения важным является момент начисления процентов. Различают:

- антисипативный (предварительный) метод – начисление процентов происходит в начале расчетного периода;
- декурсивный (последующий) метод– начисление процентов происходит в конце расчетного периода.

При первом методе доход, вообще говоря, получается больший.

В стабильной экономике используют декурсивный метод начисления процентов, а антисипативный обычно используется в условиях сильной инфляции.

При нестабильной экономике процентные ставки могут изменяться значительно в течение года. В этом случае наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S_n = S_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} (1 + i_k)^{\frac{t_k}{K}} , \tag{1.13}$$

где i_k – последовательные значения процентных ставок в соответствующие периоды t_k.

Пример 1.32. Клиент поместил в банк вклад в сумме 2 000 000 руб. под 12% годовых с ежемесячной выплатой процентов. Какую сумму клиент будет получать каждый месяц, если начисление производится по формуле: а) простых; б) сложных процентов?

□ Искомая сумма равна месячным процентным деньгам и вычисляется по формуле (1.2) $I = S_t - S_0$, для простых процентов

$$I = S_t - S_0 = S_0(1 + it) - S_0 = itS_0.$$

а) при начислении простых процентов искомая сумма равна

$$2\,000\,000 \cdot 0{,}12 : 12 = 20\,000 \text{ (руб.)};$$

б) при начислении сложных процентов

$$I = S_0(1+i)^{1/12} - S_0 = 20000001{,}12^{1/12} - 2\,000\,000 = 18977{,}59. \blacksquare$$

Пример 1.33. За какой период первоначальный капитал в размере 3 000 000 руб. вырастет до 5 000 000 руб. при простой и сложной ставке 10% годовых?

□ Для простых процентов выполняется соотношение (1.1)

$$5\,000\,000 = 3\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}1t).$$

Следовательно, $0{,}1t$ =5/3−1 , t =20/3= 6,67.

Для сложных процентов имеем равенство (1.5)

$$5\,000\,000 = 3\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^t .$$

Следовательно, $1{,}1^t$ =5/3, $t = \ln {}^{5}/_{3}/\ln 1{,}1 \approx 5{,}36$. ■

Пример 1.34. На сумму долга в течение 7 лет начисляются проценты по ставке 17% годовых. Во сколько раз возрастет наращенная сумма, если проценты будут капитализироваться: а) ежегодно; б) ежемесячно; в) ежеквартально; г) непрерывно?

□ Наращенная сумма при ежегодной капитализации равна

$$S_0(1 + 0{,}17)^7 = 3{,}0012S_0.$$

Наращенная сумма при ежемесячной капитализации равна

$$S_0\left(1 + \tfrac{0{,}17}{12}\right)^{12\cdot 7} = 3{,}2597S_0.$$

что в $3{,}2597/3{,}0012 \approx 1{,}086$ раза больше, чем при годовой капитализации.

Наращенная сумма при ежеквартальной капитализации равна

$$S_0\ \left(1 + \tfrac{0{,}17}{4}\right)^{4\cdot 7} = 3{,}2072S_0.$$

что в $3{,}2072/3{,}0012 \approx 1{,}0686$ раза больше, чем при годовой капитализации.

Наращенная сумма при непрерывной капитализации равна

$$S_0e^{0{,}17\cdot 7} = 3{,}2871S_0.$$

что в $3{,}287/3{,}0012 \approx 1{,}0462$ раза больше, чем при годовой капитализации. ■

Пример 1.35. Банк принимает депозиты на сумму 600 000 руб. на следующих условиях: а) под 11% годовых с ежеквартальным начислением процентов; б) под 11,3% годовых с полугодовым начислением процентов; в) под 11,5% годовых начислением процентов в конце года (во всех трех случаях проценты капитализируются). Выберите оптимальную схему вложения денежных средств.

□ Воспользуемся формулой (1.9)

а) $S_t = 600\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}11}{4}\right)^{4 \cdot t} = 600\,000 \cdot (1{,}1146)^t$;

б) $S_t = 600\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}113}{2}\right)^{2 \cdot t} = 600\,000 \cdot (1{,}11619)^t$;

в) $S_t = 600\,000 \cdot (1 + 0{,}115)^t = 600\,000 \cdot (1{,}115)^t$.

Самым выгодным является депозит б). ■

Пример 1.36. Компания получила кредит на 4 года в размере 250 000 руб. с условием возврата 400 000 руб. Определите процентную ставку для случаев простого и сложного процентов.

□ Для простого процента из соотношения (1.1) имеем

$$400\,000 = 250\,000 \cdot (1 + 4i) \;\Rightarrow\; 1 + 4i = 40/25\;, 4i = 0{,}6;\, i = 0{,}15.$$

Для сложного процента согласно (1.5) получим

$$400\,000 = 250\,000 \cdot (1 + i)^4 \;\Rightarrow\; i = \sqrt[4]{40/25} - 1 \approx 0{,}1247. \blacksquare$$

Пример 1.37. Инвестор намерен положить некоторую сумму под 13% годовых с целью накопления через три года 25 000 000 руб. Определите сумму вклада.

□ Найдем искомую сумму S_0, исходя из уравнения (1.5)

$$25\,000\,000 = S_0 \cdot (1 + 0{,}13)^3\,;\; S_0 = \frac{2500000}{1{,}13^3} \approx 1732625{,}41. \blacksquare$$

Пример 1.38. Найдите период времени, за который сумма, положенная на депозит под 12% годовых по схеме сложных процентов, возрастет в 3 раза.

□ По формуле (1.7) имеем $t = \ln 3/\ln 1{,}12 \approx 9{,}69$. ■

Пример 1.39. При какой годовой сложной процентной ставке сумма удвоится за 10 лет, если проценты начисляются ежеквартально?

□ Для решения задачи примем в расчет формулу (1.10) для m −кратного начисления процентов за период (в нашем случае $m = 4$). Разлагая логарифм по формуле Тейлора и, ограничившись главным членом разложения, будем иметь

$$t = \frac{\ln 2}{m \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)} = \frac{\ln 2}{m \cdot \frac{i}{m}} = \frac{\ln 2}{i} = \frac{69{,}3}{p} \approx \frac{70}{p},$$

т.е., в случае кратного начисления процентов также работает **«правило 70»**. Отсюда $p = 70/7 = 10\%$. ■

Пример 1.40. При какой годовой сложной процентной ставке сумма утроится за 7 лет, если проценты начисляются: а) ежемесячно; б) ежеквартально?

□ При решении задачи поступим так же, как и в предыдущем случае, ограничиваясь в разложении логарифма двумя первыми членами и используя приближенную формулу:

$$\left(1 - \frac{i}{2m}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{i}{2m},$$

получим

$$t = \frac{\ln N}{m \ln\left(1+\frac{i}{m}\right)} = \frac{\ln N}{m\left(\frac{i}{m} - \frac{i^2}{2m^2}\right)} = \frac{\ln N}{i\left(1 - \frac{i}{2m}\right)} = \frac{\ln N}{i}\left(1 + \frac{i}{2m}\right) = \frac{\ln N}{i} + \frac{\ln N}{2m}.$$

Отсюда $i = \left(\frac{t}{lnN} - \frac{1}{2m}\right)^{-1}$. Подставляя $N = 3$, $t = 7$, получим при $m = 12$ $i = 0{,}158$; $p = 15{,}8\%$; а при $m = 4$ $i = 0{,}16$; $p = 16\%$. ■

Пример 1.41. На счет в банке помещено 600 000 руб. За первые 3 года и 6 месяцев процентная ставка равнялась 10%, а в следующие 2 года и 3 месяца – 8%, капитализация полугодовая. Чему будет равна наращенная величина вклада через 5 лет и 9 месяцев?

□ Отправляясь от формул (1.9) и (1.6), найдем

$$S = 600000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^{2\cdot 3{,}5} \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{2}\right)^{2\cdot\left(2+{}^{3}/_{12}\right)} =$$

$$= 600000 \cdot 1{,}05^{7} \cdot 1{,}04^{4{,}5} = 1007224{,}71. \blacksquare$$

Пример 1.42. На счет в банке поместили 25 000 руб., а через 5 лет сняли 20 000 руб. Чему будет равна наращенная величина вклада через 12 лет (со дня помещения), если процентная ставка равна 11%, а капитализация полугодовая?

□ Согласно (1.9), через 5 лет сумма на банковском счете окажется равной

$$25\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}11}{2}\right)^{2\cdot 5} - 20\,000 \approx 22703{,}61,$$

Еще через 7 лет сумма нарастится до величины

$$22703{,}61 \cdot \left(1 + \frac{0{,}11}{2}\right)^{2\cdot 7} \approx 48042{,}92 \text{ (руб.)}. \blacksquare$$

Пример 1.43. Банк предлагает вкладчикам на двухлетний срок два варианта начисления процентов: 1) в первый год 2,5% ежеквартально, во второй год по 2% ежеквартально; 2) в первое полугодие по 3% ежеквартально, а в каждом последующем полугодии ежеквартальная ставка убывает на 0,5%. Какой вклад выгоднее?

□ По фомулам (1.5), (1.9) получим

1) наращенная сумма

$$S = S_0(1 + 0{,}025)^4 \cdot (1 + 0{,}02)^4 \approx 1{,}1948S_0.$$

2) наращенная сумма

$$S = S_0(1 + 0{,}03)^2 \cdot (1 + 0{,}025)^2 \cdot (1 + 0{,}02)^2 \cdot (1 + 0{,}015)^2 \approx 1{,}1947S_0.$$

Первый вариант выгоднее. ■

Пример 1.44. Контракт предусматривает следующий порядок начисления сложных процентов: первый год – 10%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Определите множитель наращения за 2,5 года.

□ Множитель наращения является произведением пяти множителей и равен

$$(1 + 0{,}1)^{0{,}5} \cdot (1 + 0{,}11)^{0{,}5} \cdot (1 + 0{,}12)^{0{,}5} \cdot$$
$$\cdot (1 + 0{,}13)^{0{,}5} \cdot (1 + 0{,}14)^{0{,}5} \approx 1{,}3273. \blacksquare$$

Пример 1.45. Банк объявил следующие условия выдачи ссуды на один год: за первый квартал ссудный процент равен 10%; за второй квартал – 15%; за третий квартал – 17%; за четвертый квартал – 20%. Определите сумму к возврату в банк, если ссуда составляет 400 000 руб.

□ Сумма к возврату за четыре года вычисляется по формуле

$$S_4 = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}1) \cdot (1 + 0{,}15) \cdot (1 + 0{,}17) \cdot (1 + 0{,}2) = 710\,424. \blacksquare$$

Пример 1.46. При условии ежегодного начисления дохода сумма вклада за пятый год увеличилась на 1092 руб., а за седьмой год – на 1432 руб. На сколько рублей увеличится вклад за восьмой год?

□ По формуле (1.5) за пятый год увеличение суммы вклада равно

$$S_5 - S_4 = S_0(1+i)^5 - S_0(1+i)^4 = S_0(1+i)^4(1+i-1) = S_0(1+i)^4 \cdot i\,.$$

Аналогично, увеличение суммы вклада за седьмой год будет

$$S_7 - S_6 = S_0(1+i)^7 - S_0(1+i)^6 = S_0(1+i)^6(1+i-1) = S_0(1+i)^6 \cdot i\,.$$

Отсюда получим систему уравнений

$$\begin{cases} S_0(1+i)^4 \cdot i = 1092\,, \\ S_0(1+i)^6 \cdot i = 1432\,. \end{cases}$$

Разделим почленно второе уравнение системы на первое. Будем иметь

$$(1+i)^2 = \tfrac{1432}{1092} \Rightarrow (1+i) = 1{,}145.$$

Теперь можно найти увеличение суммы вклада за восьмой год как

$$S_8 - S_7 = S_0(1+i)^8 - S_0(1+i)^7 = S_0(1+i)^6 \cdot i \cdot (1+i) =$$
$$= 1432 \cdot 1{,}145 = 1639{,}64.$$

То есть за восьмой год сумма вклада увеличилась на 1639 руб. 64 коп. ■

1.4. Эквивалентные процентные ставки и платежи. Эффективная процентная ставка

Эквивалентность процентных ставок. Схемы начисления процентов называются эквивалентными, если коэффициенты наращения по этим схемам одинаковы. Например, исследуя эквивалентность простой и сложной схем начисления процентов, исходя из условия равенства в формулах (1.1) и (1.5), запишем

$$S_0\left(1+ti_{\text{пр}}\right)=S_0(1+i_{\text{сл}})^t\,.$$

Отсюда следует, что

$$i_{\text{пр}}=\frac{(1+i_{\text{сл}})^t-1}{t}\,,\ i_{\text{сл}}=\left(1+ti_{\text{пр}}\right)^{1/t}-1\,. \tag{1.14}$$

Аналогично можно рассмотреть эквивалентность других процентных ставок:

а) простой и непрерывной

$$\begin{gathered}S_0\left(1+i_{\text{пр}}t\right)=S_0e^{i_{\text{н}}\cdot t}\ \Rightarrow\ i_{\text{пр}}=\frac{1}{t}\left(e^{i_{\text{н}}\cdot t}-1\right),\\ i_{\text{н}}=\frac{1}{t}\ln\left(1+i_{\text{пр}}t\right);\end{gathered} \tag{1.15}$$

б) сложной и непрерывной

$$\begin{gathered}S_0(1+i_{\text{сл}})^t=S_0e^{i_{\text{н}}\cdot t}\ \Rightarrow\ i_{\text{н}}=\ln(1+i_{\text{сл}})\,,\\ i_{\text{сл}}=e^{i_{\text{н}}}-1\,,\text{и т. д.}\end{gathered} \tag{1.16}$$

Пример 1.47. Найдите сложную процентную ставку, эквивалентную непрерывной ставке 9%. Ответ приведите с точностью до 0,01%.

□ Последняя формула (1.16) дает

$$i_{\text{сл}}=e^{0{,}09}-1\approx 0{,}0942\ (9{,}42\%).\ ■$$

Пример 1.48. Найдите сложную процентную ставку, эквивалентную простой ставке 11% для временного интервала в 3 года.

□ Отправляясь от второй формулы (1.14), получим

$$i_{\text{сл}}=\sqrt[3]{1+3\cdot 0{,}11}-1\approx 0{,}1\ (10\%).\ ■$$

Пример 1.49. Найдите простую процентную ставку, эквивалентную сложной ставке в 10% для временного интервала в 6 лет при ежемесячном начислении процентов.

□ Используя равенство множителей наращения

$$1 + ti_{\text{пр}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt},$$

найдем простую ставку процентов

$$i_{\text{пр}} = \frac{1}{t}\left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} - 1\right] = \frac{1}{6}\left[\left(1 + \frac{0{,}1}{12}\right)^{12\cdot 6} - 1\right] = 0{,}1363\ (13{,}63\%). \blacksquare$$

Эквивалентность платежей. Прежде всего, следует понимать, что платеж характеризуется не только денежной суммой, но и временем его исполнения. Сравнивать платежи, а также производить с ними операции сложения и вычитания можно лишь после их приведения к одному и тому же моменту времени. Поэтому, при замене одной группы платежей на другую все платежи, как правило, приводятся к современной величине. Приведем два примера.

Пример 1.50. Три платежа: 150 000, 250 000 и 300 000 руб., произведенные в начале третьего, начале четвертого и в конце пятого периодов, соответственно, замените двумя платежами в конце шестого и седьмого периодов. При этом первый платеж в три раза больше второго. Годовая ставка сложных процентов составляет 15% .

□ Приведем все платежи к начальному моменту времени. Обозначим второй из искомых платежей через S, тогда первый платеж будет равен $3S$. Найдем S, исходя из уравнения эквивалентности, следующего из формулы (1.13)

$$\frac{3S}{1{,}15^6} + \frac{S}{1{,}15^7} = \frac{150000}{1{,}15^2} + \frac{250000}{1{,}15^3} + \frac{300000}{1{,}15^5}.$$

$$S = \left(\frac{150000}{1{,}15^2} + \frac{250000}{1{,}15^3} + \frac{300000}{1{,}15^5}\right) \cdot \left(\frac{3}{1{,}15^6} + \frac{1}{1{,}15^7}\right)^{-1} \approx 255214{,}64.$$

Таким образом, второй платеж $S = 255214{,}64$ руб., а первый платеж составит $3S = 71367{,}43$ руб. ■

Пример 1.51. Три платежа: 200 000, 250 000 и 400 000 руб., произведенные в начале третьего, начале четвертого и в конце пятого периодов, соответственно, замените платежом 900 000 руб. по годовой процентной ставке 10% .

□ Приведем все платежи к начальному моменту времени и найдем срок платежа t, исходя из уравнения эквивалентности

$$\frac{200000}{1{,}1^2}+\frac{250000}{1{,}1^3}+\frac{400000}{1{,}1^5}=\frac{900000}{1{,}1^t};$$

$$1{,}1^t=900000\cdot\left(\frac{200000}{1{,}15^2}+\frac{250000}{1{,}15^3}+\frac{400000}{1{,}15^5}\right)^{-1};$$

$$t=\left[\ln 900000-\ln\left(\frac{200000}{1{,}1^2}+\frac{250000}{1{,}1^3}+\frac{400000}{1{,}1^5}\right)\right]\cdot(\ln 1{,}1)^{-1}\approx 4{,}29. \blacksquare$$

Эффективная процентная ставка. Принцип эквивалентности процентных ставок лежит в основе многих методов количественного финансового анализа. В частности, он позволяет перейти к единообразному показателю для сопоставимого оценивания эффективности финансовых операций.

В качестве такого показателя широко используют эффективную ставку, которая оценивает финансовую операцию годовой ставкой сложных процентов. Иначе говоря, для каждой схемы начисления процентов можно найти такую годовую ставку сложных процентов i_{eff}, начисление по которой эквивалентно начислению по первоначальной схеме. Ставка i_{eff} называется эффективной процентной ставкой и дается формулой

$$i_{eff}=\left(\frac{S_t}{S_0}\right)^{1/t}-1\,, \qquad (1.17)$$

где вид S_t приведен выше. Эффективная процентная ставка, как видно из (1.17), зависит от $\frac{S_t}{S_0}$ и $\frac{1}{t}$ (за исключением случая начисления сложных процентов).

Под номинальной (объявленной) процентной ставкой i, будем понимать годовую ставку, которую назначает банк для начисления процентов по той или иной схеме.

Найдем эффективные процентные ставки для различных схем начисления процентов.

При кратном начислении сложных процентов из формул (1.9) и (1.17) следует, что

$$S_{t,m} = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = S_0\left(1+i_{eff}\right)^t \Rightarrow i_{eff} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1\,. \qquad (1.18)$$

При непрерывном начислении процентов с силой роста δ по формулам (1.11), (1.17) получим

$$S_\infty = S_0 e^{\delta t} = S_0\left(1+i_{eff}\right)^t \Rightarrow i_{eff} = e^{\delta} - 1\,. \qquad (1.19)$$

Доказано, что эффективная процентная ставка для кратного начисления процентов (1.18) растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов (1.19). При этом при $m \geq 6$, рост эффективной процентной ставки резко замедляется.

Пример 1.52. Рассмотрите схему начисления сложных процентов несколько раз в году и сравните эффективную и номинальную процентные ставки.

□ В равенстве (1.18) раскроем второй член по формуле бинома Ньютона. Будем иметь

$$i_{eff} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1 = i + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{i}{m}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{i}{m}\right)^m > i\,,$$

при $m > 1$. Следовательно, эффективная ставка i_{eff} больше номинальной ставки i. При $m = 1$ они, очевидно, совпадают. ■

Пример 1.53. Годовая эффективная процентная ставка в банке равна 700%. Найти эквивалентную номинальную ставку при условии ежемесячного начисления процентов. Укажите сумму вклада в 1000 руб., сделанного в начале года через 4 месяца при условии ежемесячного начисления процентов.

□ Пусть i – номинальная процентная ставка при условии ежемесячного начисления процентов. Запишем условие равенства наращенных сумм.

$$1000\cdot\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12} = 1000\cdot\left(1+\frac{700}{100}\right) \Rightarrow \left(1+\frac{i}{12}\right)^{12} = 8 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{i}{12}\right)^4 = \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$i = 12\left(\sqrt[4]{2}-1\right) = 2{,}2705 \text{ или } 227{,}05\%.$$

Сумму вклада найдем как

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^4 = 1000 \cdot 2 = 2000 \text{ (руб.)}. \blacksquare$$

Пример 1.54. В банк положена сумма 150 000 руб. сроком на 6 лет по ставке 14% годовых. Найдите наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) полугодового; б) ежеквартального; в) ежемесячного; г) непрерывного при силе роста 14%.

□ Воспользуемся формулами (1.9), (1.11) , (1.18) и (1.19):

а) $S_{6,2} = 150000 \cdot \left(1 + \frac{0,14}{2}\right)^{2 \cdot 6} = 337828,74;$

$I_{6,2} = 337828,74 - 150000 = 187828,74 -$ величина процента;

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{0,14}{2}\right)^2 - 1 = 0,1449 \ (14,49\%);$$

б) $S_{6,4} = 150000 \cdot \left(1 + \frac{0,14}{4}\right)^{4 \cdot 6} = 342499,27;$

$I_{6,2} = 342499,27 - 150000 = 192499,27 -$ величина процента;

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{0,14}{4}\right)^4 - 1 = 0,1475 \ (14,75\%);$$

в) $S_{6,12} = 150000 \cdot \left(1 + \frac{0,14}{12}\right)^{12 \cdot 6} = 345769б74;$

$I_{6,2} = 345769,74 - 150000 = 195769,74 -$ величина процента;

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{0,14}{12}\right)^{12 \cdot 6} - 1 = 0,1493 \ (14,93\%);$$

г) $S_{\infty} = 150000 \cdot e^{0,14 \cdot 6} = 347455,05;$

$I_{\infty} = 347455,05 - 150000 = 197455,05 -$ величина процента;

$i_{eff} = e^{0,14} - 1 = 0,1503 \ (15,03\%)$. ■

1.5. ДИСКОНТИРОВАНИЕ. УДЕРЖАНИЕ ПРОЦЕНТОВ

Дисконтирование и удержание процентов в определенном смысле являются операциями обратными по отношению к начислению процентов. Различают понятия математического дисконтирования и банковского учета.

Математическое дисконтирование решает задачу о нахождении начальной суммы S_0 при условии знания эквивалентной ей денежной величины S_t в момент времени t. При этом, величина S_0 называется приведенной величиной для S_t, а процентная ставка i означает ставку дисконтирования.

Математическое дисконтирование в случае:

- простых процентов

$$S_0 = S_t(1 + it)^{-1} \tag{1.20}$$

- сложных процентов

$$S_0 = S_t(1 + i)^{-t} \tag{1.21}$$

- кратного начисления процентов

$$S_0 = S_t\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt} \tag{1.22}$$

- непрерывного начисления процентов

$$S_0 = S_t e^{-\delta t}. \tag{1.23}$$

Банковский учет – это покупка банком денежных обязательств по цене меньшей номинальной. Примером может служить вексель—долговая расписка, содержащая обязательство выплатить определенную денежную сумму (номинал) в определенный срок. В этом случае говорят, что вексель учитывается, и клиент получает остаток после удержания:

$$S_0 = S_t - D_t ,$$

где S_t —номинальная сумма векселя, S_0 —цена покупки векселя банком за t лет до погашения, D_t —дисконт — доход банка.

Дисконт вычисляется при помощи учетной ставки d. Если вексель учитывается за один год до погашения, то $D_1 = S_1 d$, т.е. учетная ставка d фиксирует процентное уменьшение суммы S_t на один период «назад».

Различают простую и сложную учетные ставки. В случае простой учетной ставки сумма, которую получит векселедержатель за t лет до погашения, и дисконт составят

$$S_0 = S_t(1 - td)\,, D_t = S_t \cdot d \cdot t\,. \tag{1.24}$$

Для сложной учетной ставки

$$S_0 = S_t(1 - d)^t. \tag{1.25}$$

Параметр t может быть как целым, так и дробным положительным числом. На рис. 1.3 приведены графики дисконтирования по простой и по сложной процентным ставкам.

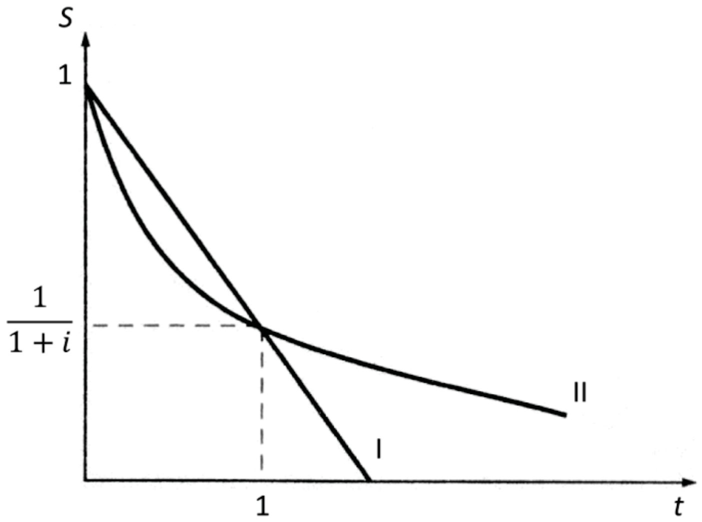

Рисунок 1.3 – Дисконтирование по простой (I) и сложной (II) процентным ставкам

Видно, что если срок учета векселя менее одного года, то более выгодным для банка является дисконтирование по сложной учетной ставке (наращение – по простой (рис. 1.1). Если срок учета превышает один год, то более выгодным является дисконтирование по простой учетной ставке (наращение – по сложной (рис. 1.1). Отметим, что при кратном начислении процентов простые проценты становятся выгоднее сложных после первого начисления процентов.

Далее полезными могут оказаться также формулы

$$\mathrm{S}_0 = S_t\,\left(1 - d\,\frac{T}{K}\right), \quad \mathrm{S}_0 = S_t\,(1 - d)^{\frac{T}{K}}, \tag{1.26}$$

где T — число дней, оставшихся до погашения векселя, K — временная база.

Пример 1.55. Вексель стоимостью 200 000 руб. учитывается за 3 года до погашения по сложной учетной ставке 17% годовых. Найдите сумму, получаемую векселедержателем и величину дисконта.

□ По формуле (1.25) сумма, получаемая векселедержателем, равна

$$S_0 = 200000 \cdot (1 - 0{,}17)^3 = 114357{,}4 \text{ (руб.)}.$$

Соответствующая величина дисконта

$$D_3 = S_3 - S_0 = 200000 - 114357{,}4 = 85642{,}6 \text{ (руб.)}. \blacksquare$$

Пример 1.56. Клиент имеет вексель на 200 000 у.е., который он хочет учесть 12.02.2015 г. в банке по сложной учетной ставке 10%. Какую сумму он получит, если срок погашения 10.08.2015 г.?

□ Примем временную базу равной $K = 365$ дней. Найдем относительную продолжительность финансовой операции: 12.02 – день №43; 10.08 –день № 222; число дней $T = 222 - 43 = 179$; тогда $\frac{T}{K} = \frac{179}{365} \approx 0{,}4904$. Из второй формулы (1.26) следует, что сумма, полученная клиентом, составит

$$S_0 = 200\,000 \cdot (1 - 0{,}1)^{179/365} \approx 189928{,}45 \text{ (у.е.)}. \blacksquare$$

Пример 1.57. Предприятие получило кредит на один год в размере 14 млн руб. с условием возврата 15,4 млн руб. Рассчитайте процентную и учетную ставки.

□ Процентная ставка вычисляется по формуле (1.20) или (1.21) при $t = 1$:

$$S_0 = \frac{S_1}{1+i} \Rightarrow 14 \cdot 10^6 = \frac{154 \cdot 10^5}{1+i} \Rightarrow 1 + i = \frac{154}{140} = 1{,}1 \text{ (10\%)}.$$

Для нахождения учетной ставки воспользуемся первой формулой (1.24) либо формулой (1.25) при $t = 1$:

$$S_0 = S_1(1-d) \Rightarrow 14 \cdot 10^6 = 154 \cdot 10^5 \cdot (1-d)\,;\; 1 - d = \frac{140}{154}\,;$$

$$d = 1 - \frac{10}{11} = = 0{,}0909 \text{ (9\%)}. \blacksquare$$

Эффективная учетная ставка. Пусть d – годовая учетная ставка (ставка дисконтирования) при кратности начисления процентов m. Эффективная учетная ставка d_{eff} определяется в соответствии с принципом эквивалентности, т.е.

$$S_0\left(1 - d_{eff}\right)^n = S_0\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mn} \Rightarrow 1 - d_{eff} = \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m$$

и имеет вид

$$d_{eff} = 1 - \left(1 - \tfrac{d}{m}\right)^m. \qquad (1.27)$$

Обратно, учетная ставка d выражается через эффективную учетную ставку d_{eff} следующим образом

$$d = m\left(1 - \sqrt[m]{1 - d_{eff}}\right). \qquad (1.28)$$

Учетная ставка d и ставка процентов i приводят за промежуток времени t к одинаковому результату, если

$$S_0\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = S_t \text{ и } S_0 = \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mt} \cdot S_t,$$

откуда $(1 + i/m) \cdot (1 - d/m) = 1$ и

$$\frac{i}{m} - \frac{d}{m} = \frac{i}{m} \cdot \frac{d}{m}.$$

Пример 1.58. Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 10% с ежемесячным начислением процентов. Найдите сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменится.

□ Искомая учетная ставка является эффективной учетной ставкой и вычисляется по формуле (1.27)

$$d_{eff} = 1 - \left(1 - \frac{0{,}1}{12}\right)^{12} \approx 0{,}09554,$$

что соответствует 9,554%. ■

Пример 1.59. Что выгоднее, положить 2000 у.е. в банк на год под 8% годовых или купить вексель с номиналом 2170 у.е. и погашением через год? Чему равна доходность покупки векселя, измеренная в виде годовой ставки процентов?

□ Наращенная сумма при вкладе в банк вычисляется по формуле (1.1)

$$S_1 = 2000 \cdot (1 + 0{,}08) = 2160 < 2170\,.$$

Отсюда следует, что покупка векселя с номиналом 2170 у.е. выгоднее.

Доходность покупки векселя найдем также по формуле (1.1)

$$2170 = 2000 \cdot (1 + i) \ \Rightarrow \ 1 + i = 1{,}085\ ;\ i = 0{,}085\ (8{,}5\%)\,. \blacksquare$$

Пример 1.60. Вексель куплен за 300 дней до его погашения. На момент покупки рыночная простая учетная ставка составляла 7% годовых. Через 10 дней вексель продали по учетной ставке 6% годовых. Оцените эффективность данной финансовой операции в виде ставки простых процентов. Временная база $K = 365$ дней.

□ Вексель куплен за сумму (см. первую формулу (1.26)

$$S_0 = S \cdot \left(1 - \frac{300}{365} \cdot 0{,}07\right) \approx 0{,}9425S.$$

Вексель продан за сумму

$$S_0^* = S \cdot \left(1 - \frac{300-10}{365} \cdot 0{,}06\right) \approx 0{,}9523S.$$

Эффективность операции найдем по формуле (1.4), которую запишем в виде $S_0^* = S_0(1 + i\,T/K)$:

$$0{,}9523S = 0{,}9425S\left(1 + \frac{10}{365}i\right)\ ;\ 1 + \frac{2i}{73} = \frac{9523}{9425}\ ;$$

$$i = \frac{73}{2} \cdot \left(\frac{9523}{9425} - 1\right) = 0.3795,$$

что соответствует 37,95% . ■

1.6. Процентные ставки в условиях инфляции

При инфляции деньги дешевеют, так как цены на товары растут. Противоположный процесс роста покупательной способности денег носит название дефляции.

Темпом инфляции α называется отношение приращения совокупной стоимости благ через период (например, через год) к начальной совокупной стоимости благ, т.е.

$$\alpha = \frac{S_1 - S_0}{S_0}. \tag{1.29}$$

Разрешая уравнение (1.29) относительно S_1, получим $S_1 = S_0(1+\alpha)$, т.е., реальная цена товара через год будет в $(1+\alpha)$ больше исходной, что говорит об обесценивании денег в $(1+\alpha)$ раз.

С темпом инфляции α связано понятие индекса инфляции или индекса цен $\Lambda = 1 + \alpha$. Если темп инфляции меняется несколько раз в году: $t = t_1 + t_2 + + \cdots + t_n$, то можно показать, что индекс инфляции за период t вычисляется по формуле

$$\Lambda = \prod_{k=1}^{n} \Lambda_k = \prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha_k), \tag{1.30}$$

где α_k —темп инфляции за соответствующий промежуток времени, Λ_k —индекс инфляции за этот период.

Инфляция уменьшает реальную ставку процента. Действительно, пусть по-прежнему i – процент, который записан в договоре (номинальный процент или годовая процентная ставка без учета инфляции), а то количество товаров и услуг, которое можно купить на наращенную сумму S_α, определяет реальный процент или реальную годовую процентную ставку i_α. Поскольку при инфляции деньги обесцениваются в $(1+\alpha)$ раз, то реальный эквивалент наращенной за год суммы $S = S_0(1+i)$ будет в $(1+\alpha)$ раза меньше. По формуле (1.5) запишем

$$S_\alpha = S_0(1 + i_\alpha) = \frac{S}{1+\alpha} = \frac{S_0(1+i)}{1+\alpha} =$$
$$= \frac{S_0(1 + \alpha - \alpha + i)}{1+\alpha} = S_0\left(1 + \frac{i-\alpha}{1+\alpha}\right).$$

Сравнивая в последнем равенстве левую и правую части, получим формулу Фишера:

$$i_\alpha = \frac{i-\alpha}{1+\alpha} \Leftrightarrow i = i_\alpha + \alpha(1 + i_\alpha). \tag{1.31}$$

Такая процентная ставка обеспечивает реальную эффективность кредитных операций. При малой инфляции реальная процентная ставка меньше номинальной примерно на величину инфляции. При достаточно высокой инфляции реальная ставка i_α может стать отрицательной. В такой ситуации кредитор будет работать себе в убыток, а заемщик обогащаться. Чтобы этого не произошло, необходимо скорректировать номинальную процентную ставку i, по которой происходит наращение (она должна, по крайней мере, превышать инфляцию: $i > \alpha \Rightarrow i_\alpha > 0$).

Из первого выражения (1.31) следует формула Фишера для эффективной процентной ставки при начислении сложных процентов один раз в году с учетом инфляции

$$i_{\alpha,eff} = i_\alpha = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}. \qquad (1.32)$$

Заменяя в этом соотношении номинальную процентную ставку ее эффективным значением i_{eff}, получим формулу Фишера для эффективной процентной ставки при различных схемах начисления процентов с учетом инфляции

$$i_{\alpha,eff} = \frac{i_{\alpha,eff}-\alpha}{1+\alpha}. \qquad (1.33)$$

При подсчете инфляции за несколько периодов часто исходят из того, что темпы инфляции за отдельные «малые» периоды одинаковы, $\alpha_k = \alpha_1$. Тогда, исходя из формулы (1.30), можно выразить темп инфляции α за n периодов, исходя из среднего темпа за инфляции α_1 за отдельно взятый «малые» период, и наоборот.

$$\alpha = (1+\alpha_1)^n - 1, \quad \alpha_1 = \sqrt[n]{1+\alpha} - 1. \qquad (1.34)$$

В частности, по формулам (1.34) можно вычислять годовой темп инфляции, исходя из среднемесячного, $n = 12$, и среднемесячный темп инфляции, исходя и годового. То же относится к ежеквартальному темпу инфляции, $n = 4$.

Пример 1.61. Ожидается среднемесячный темп инфляции 2%. Найдите ожидаемый годовой темп инфляции.

□ Если $\alpha_k = 0{,}02$ $(k = 1{,}2 \dots {,}12)$ – среднемесячные темпы инфляции, а α – годовой темп инфляции, то по формуле (1.30) получим

$$1+\alpha = (1+0{,}02)^{12} = 1{,}02^{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 1{,}02^{12} - 1 \approx 0{,}2682 \ (26{,}82\%). \blacksquare$$

Пример 1.62. Ожидаемый годовой темп инфляции составляет 12%. Найдите ожидаемый среднеквартальный темп инфляции.

□ Обозначим искомую величину $\alpha_{кв}$. Тогда по формуле (1.30) будем иметь

$$1 + 0{,}12 = (1 + \alpha_{кв})^4 \;\Rightarrow\; 1 + \alpha_{кв} = \sqrt[4]{1{,}12}\,;$$

$$\alpha_{кв} = \sqrt[4]{1{,}12} - 1 \approx 0{,}0287,$$

что соответствует 2,87%. ■

Пример 1.63. Темп инфляции за два периода равен 0,4, а за второй период – на 50% выше, чем за первый. Найдите темп инфляции за каждый из периодов.

□ Пусть темп инфляции за первый период α_1. Тогда темп инфляции за второй период $\alpha_2 = 1{,}5\alpha_1$. Используя формулу (1.30) для двух периодов, получим

$$(1 + \alpha_1) \cdot (1 + 1{,}5\alpha_1) = 1{,}4 \;\Rightarrow\; 1{,}5\alpha_1^2 + 2{,}5\alpha_1 - 0{,}4 = 0;$$

$$\alpha_1 = \frac{-2{,}5 + \sqrt{2{,}5^2 + 6 \cdot 0{,}4}}{3} \approx 0{,}147\,;$$

$$\alpha_2 = 1{,}5 \cdot 0{,}147 \approx 0{,}2205.$$

Следовательно, соответствующие темпы инфляции равны 14,7% и 22,05%. ■

Пример 1.64. Ставка процентов составляет 10% годовых. Месячный темп инфляции в первом полугодии был постоянен и составил 0,2% , во втором – 0,3% . Во сколько раз реальная наращенная сумма превзойдет сумму депозита за год?

□ Темп инфляции за год вычисляется по формуле (1.30) и составляет

$$\alpha = (1 + \alpha_1)^6 \cdot (1 + \alpha_2)^6 - 1 = 1{,}002^6 \cdot 1{,}003^6 - 1 \approx 0{,}0304\ (3{,}04\%).$$

Отсюда годовая реальная процентная ставка находится по формуле Фишера (1.31) и равна

$$i_\alpha = \frac{0{,}1 - 0{,}0304}{1 + 0{,}0304} \approx 0{,}0675\ (6{,}75\%),$$

а реальная сумма депозита за год возрастет в $1 + i_\alpha = 1{,}0675$ раза. ■

Пример 1.65. Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равен 1,2. Темпы инфляции α_1, α_2, α_3 за периоды t_1, t_2, t_3 соответственно, составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,1. Найдите темп инфляции за каждый период.

□ Используя формулу (1.30) при $n = 3$, запишем

$$(1 + \alpha_1) \cdot (1{,}1 + \alpha_1) \cdot (1{,}2 + \alpha_1) = 1 + 1{,}2\ ;$$

$$f(\alpha_1) = (1 + \alpha_1) \cdot (1{,}1 + \alpha_1) \cdot (1{,}2 + \alpha_1) - 2{,}2 = 0\ .$$

Для решения полученного кубического уравнения применим «метод деления отрезка пополам», основанного на свойстве непрерывности функции $f(\alpha_1)$. Будем иметь:

$$f(0{,}2) = -0{,}016 < 0;\ f(0{,}21) = 0{,}03 > 0.$$

Следовательно, с точностью до 0,05,

$$\alpha_1 = 0{,}205;\ \alpha_2 = 0{,}305;\ \alpha_3 = 0{,}405\ .\ ■$$

Пример 1.66. Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равен 0,75. Темпы инфляции α_1, α_2, α_3 за периоды t_1, t_2, t_3 соответственно, составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 0,9. Найдите темп инфляции за каждый период.

□ Темпы инфляций за периоды t_1, t_2, t_3 равны α_1, $\alpha_2 = 0{,}9\alpha_1$, $\alpha_3 = 0{,}81\alpha_1$. Отправляясь от решения предыдущего примера, получим

$$(1 + \alpha_1) \cdot (1 + 0{,}9\alpha_1) \cdot (1 + 0{,}81\alpha_1) = 1 + 0{,}75;$$

$$f(\alpha_1) = (1 + \alpha_1) \cdot (1 + 0{,}9\alpha_1) \cdot (1 + 0{,}81\alpha_1) - 1{,}75 = 0\ .$$

Поскольку $f(0{,}22) = -28 < 0$, а $f(0{,}23) = 11{,}1 > 0$, то с точностью до 0,005 найдем

$$\alpha_1 = 0{,}225\ (22{,}5\%);\ \ \alpha_2 = 0{,}2025\ (20{,}25\%);$$

$$\alpha_3 = 0{,}1823\ (18{,}23\%).\ ■$$

Пример 1.67. Ожидается среднемесячный темп инфляции 0,5%. Годовая номинальная ставка составляет 12%. Найдите эффективную реальную процентную ставку, если начисление происходит три раза в году.

□ Годовой темп инфляции вычислим при помощи формулы (1.30)

$$\alpha = (1 + 0{,}005)^{12} - 1 \approx 0{,}06168\ (6{,}168\%),$$

а номинальную эффективную процентную ставку найдем, используя соотношение (1.18)

$$i_{eff} = (1 + 0{,}12/3)^3 - 1 \approx 0{,}1249\ (12{,}49\%).$$

Тогда эффективная годовая реальная процентная ставка определится по формуле (1.33) $i_{\alpha,eff} = \frac{0{,}1249-0{,}06168}{1+0{,}06168} \approx 0{,}05955$ и составит 5,955%. ■

Пример 1.68. Найдите реальный доход вкладчика, если на депозит положено 200 000 у.е. на 4 года под 15% с ежемесячным начислением процентов при квартальной инфляции, которая составляет в среднем за данный период 3% .

□ Зная квартальный темп инфляции, найдем ее годовой темп

$$\alpha = (1 + 0{,}03)^4 - 1 \approx 0{,}1255\ .$$

Найдем эффективную процентную ставку (без учета инфляции) по формуле (1.18). $i_{eff} = \left(1 + \frac{0{,}15}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}1608.$

Вычислим далее реальный процент по формуле Фишера (1.31)

$$i_\alpha = \frac{0{,}1608-0{,}1255}{1+0{,}1255} \approx 0{,}0314\ (3{,}14\%).$$

Отсюда, в согласии с выражением (1.9), реальный доход равен

$$200\,000 \cdot (1 + 0{,}0314)^4 - 200\,000 \approx 26328{,}11\ (\text{у. е.}).$$ ■

Пример 1.69. Месячный темп инфляции составляет 0,3%. Найдите индекс цен и темп инфляции за год. Определите номинальную наращенную сумму за год, если на сумму 200 000 руб. в течение года начислялась простая (сложная) процентная ставка 15% годовых. Вычислите ставку, при которой наращение равно потерям из-за инфляции.

□ Найдем годовой темп инфляции по формуле (1.30) при $n = 12$

$$\alpha = (1 + 0{,}003)^{12} - 1 \approx 0{,}0366\ (3{,}66\%).$$

Отсюда индекс цен $\Lambda = 1 + 0{,}0366 = 1{,}0366$.

Наращенная за год сумма в случае простых и сложных процентов равна

$$S_\alpha = 200000 \cdot (1 + 0{,}15) = 230\,000\ (\text{руб.}).$$

Ясно, что наращение будет равно потерям из-за инфляции, если реальная процентная ставка будет нулевой. Следовательно, по формуле Фишера (1.31) имеем $i = \alpha$, т.е. номинальная процентная ставка должна совпадать с темпом инфляции. ■

Задачи

1.1. Каким должен быть срок ссуды в днях, для того чтобы долг в размере 100 000 руб. вырос до 120 000 руб. при условии, что начисляются простые проценты по ставке 25% годовых? Число дней в году принять равным 365.

1.2. В феврале цена на нефть увеличилась на 12% по сравнению с январской. В марте цена упала на 25%. На сколько процентов изменилась мартовская цена по сравнению с январской?

1.3. Цена акции после двух «скачков» возросла на 110%, причем первый раз цена подскочила на 40%. Сколько процентов составило второе повышение?

1.4. В банк помещен вклад 3900 руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

1.5. Контракт предусматривает следующий порядок начисления сложных процентов: первый год – 16%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Определите множитель наращения по простой ставке за 2,5 года.

1.6. Клиент положил в банк 10 тыс. руб. сроком на 1 год. Согласно депозитному договору, годовая процентная ставка до середины второго квартала составляет 30%, далее до конца третьего квартала – 25%, а сначала четвертого квартала – снова 30%. Какую сумму клиент получит в конце года при условии, что договор предусматривает начисление: а) по простым процентам; б) по сложным процентам?

1.7. В банк 7-го февраля на депозит положили сумму 20 000 у.е. под 11% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик снимет 1-го октября, если временная база составляет К = 365 дней?

1.8. Вклад на 80 000 руб., открытый в банке на 10 месяцев, принес вкладчику 7000 руб. Под какой простой (сложный) процент годовых был открыт вклад?

1.9. Чему равен процентный платеж, если кредит 170 тыс. руб. взят на 7 месяцев под сложные проценты, составляющие 17% годовых?

1.10. Ставка по годовому депозиту равна 8%. Какую ставку годовых процентов нужно назначить на полугодовой депозит, чтобы последовательное переоформление полугодового депозита привело бы к такому же результату, что и при использовании годового депозита?

1.11. В банк внесен вклад в размере 2400 руб. под 7% годовых по схеме сложных процентов. Подсчитайте величину вклада через три года при начислении процентов: а) 1; б) 4; в) 6; г) 12 раз в году и в случае непрерывного начисления процентов.

1.12. На годовом депозите можно получить 12% годовых, а на полугодовом—11,5% годовых. Что выгоднее: а) положить средства на годовой депозит, или б) на полугодовой депозит с пролонгацией на тех же условиях? Чему будут равны проценты в обоих случаях при величине вклада 25 000 руб.?

1.13. Сумма вклада в банке после первого года хранения равнялась 24 у.е., а после третьего года хранения – 54 у.е. На сколько у.е. увеличился вклад за первый год хранения, если процентная ставка не менялась, доход начисляется в конце каждого года по схеме сложных процентов?

1.14. При условии ежегодного начисления дохода по схеме сложных процентов сумма вклада за пятый год увеличилась на 320 руб., а за седьмой год – на 500 руб. На сколько рублей увеличится вклад за восьмой год?

1.15. В банк положена сумма 40 тыс. у.е. сроком на 2 года по ставке 10% годовых. Найдите наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) ежеквартального; б) ежемесячного.

1.16. Найдите непрерывную процентную ставку, эквивалентную простой ставке в 15% годовых для временного интервала в 5 лет.

1.17. Найдите простую процентную ставку, эквивалентную сложной ставке в 15% годовых для временного интервала в 5 лет при ежемесячном начислении процентов.

1.18. Два платежа: 13 000 и 35 000 руб., произведенные в начале четвертого и в конце пятого периодов, соответственно, замените двумя платежами в конце шестого и восьмого периодов. При этом первый платеж на 20% больше второго. Чему равны эти платежи, если годовая ставка сложных процентов составляет 9%.

1.19. Один платеж 43 000 руб. в начале третьего периода замените тремя равными платежами, произведенными в начале первого, в конце четвертого и в конце седьмого периодов, соответственно. Годовая ставка простых процентов равна 17%.

1.20. Три платежа: 20 000, 40 000 и 70 000 руб., произведенные в начале второго, начале пятого и в конце шестого периодов, соответственно, замените платежом 120 000 руб. Определите время последнего платежа при годовой ставке 10%.

1.21. Ссуда в размере 100 000 у.е. выдана на 100 дней под простые 9% годовых ($K = 366$ дней). Однако, она не была возвращена в намеченный срок, а была погашена спустя 20 дней, не считая даты погашения. Какую сумму следует вернуть, если за просроченное время на сумму возврата долга начислялись простые проценты по ставке 12% годовых? Ответ округлите до целого числа.

1.22. При какой годовой процентной ставке сумма увеличится в 3 раза за 10 лет, если проценты начисляются поквартально?

1.23. Какая сумма предпочтительнее при сложной ставке 6% годовых: 1000 долл. сегодня или 1500 долл. через шесть лет?

1.24. Годовая процентная ставка в банке «Надежный» равна 100% при условии начисления процентов через каждые три дня. Считая, что финансовый год является високосным ($K = 366$ дней), определите, во сколько раз увеличится срочный вклад за 183 дня.

1.25. Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 10% с ежемесячным начислением процентов. Найдите сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменится.

1.26. Сертификат куплен за 10 000 руб. и продан за 11 200 руб. через 100 дней. Какова доходность этой финансовой операции, измеренная в виде годовых ставок простых и сложных процентов? Временная база $K = 365$ дней.

1.27. Экономика некоторого государства находится на спаде: ежегодный темп относительного снижения валового национального продукта составляет 14%. Оцените период полураспада экономики при сохранении отмеченной тенденции.

1.28. Предприятие получило кредит на один год в размере 5,0 млн руб. с условием возврата 5,45 млн руб. Рассчитайте процентную и учетную ставки.

1.29. За 7 лет начисленные по долгу сложные проценты сравнялись с величиной долга. Чему равна принятая процентная ставка? Задачу решите двумя способами: а) по «правилу 70»; б) пользуясь определением эффективной процентной ставки.

1.30. Вексель стоимостью 550 тыс. руб. учитывается за три года до погашения по сложной учетной ставке 12% годовых. Найдите сумму, которую получит векселедержатель, и величину дисконта.

1.31. Клиент имеет вексель на 20 000 руб., который он хочет учесть 24 апреля 2015 г. в банке по сложной учетной ставке 10% годовых. Какую сумму он получит, если срок погашения 12 сентября 2015 г., а временная база $K = 365$ дней?

1.32. Господин N, который держит деньги на банковском счете при 8%-й ставке, решил подписаться на журналы. Годовая подписка стоит 12 у.е., двухгодичная – 22 у.е. Определите: а) в какую сумму обошлась ему подписка на второй год при двухгодичной подписке и при приведении стоимости второго года к началу второго года; б) какая подписка выгоднее: двухгодичная или две на год при депозитной ставке 30%?

1.33. В государстве U в результате инфляционных процессов цены выросли на 300%. Оппозиция потребовала от правительства возвращения цен на прежний уровень, для чего предложила двухлетнюю программу снижения цен на одно и то же число процентов каждый год. В ходе переговоров правительству удалось смягчить это требование до 40% и достичь соглашения об увеличении срока антиинфляционной программы. Определите: а) предусмотренный двухлетней программой темп дефляции; б) срок скорректированной программы.

1.34. Темп инфляции за период $t = t_1 + t_2$ равен 0,4. Темп инфляции за первый период в 1, 173 раза меньше, чем за второй. Найдите темп инфляции за каждый период.

1.35. Прогнозируется среднемесячный темп инфляции 3%. Найдите квартальный, полугодовой и годовой темпы инфляции.

1.36. Пусть темп инфляции за год равен $\alpha = 20\%$. Найдите темп инфляции $\alpha_{\text{кв}}$ за квартал при условии его постоянства.

1.37. Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равен 0,8. Темпы инфляции за периоды t_1, t_2, t_3 соответственно составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,01. Найдите темп инфляции за каждый из периодов.

1.38. Индекс инфляции Λ за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равен 1,6. Темпы инфляции за периоды t_1, t_2, t_3 соответственно составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 0,96. Найдите темп инфляции за каждый из периодов.

1.39. Какую процентную ставку должен установить банк, чтобы при инфляции 8% годовых он мог иметь 10%-ю доходность?

1.40. Номинальная процентная ставка составляет 15% годовых, а индекс инфляции $\Lambda = 1{,}1$. Найдите эффективную реальную ставку, если проценты начисляются а) ежемесячно; б) ежедневно; в) ежеквартально. Временная база K =365 дней.

1.41. На депозит на шесть месяцев положили 120 000 руб. под 10% простых годовых ($K = 360$ дней). Темп инфляции за год составит 7%. Чему равно реальное значение наращенной суммы депозита?

1.42. Найдите реальный доход вкладчика, если на депозит положено 1 млн руб. на пять лет под 12% годовых с ежеквартальным начислением процентов при полугодовой инфляции 3%. Ответ округлите до рубля.

1.43. На сумму 1,5 млн руб. в течение трех месяцев начисляются простые проценты из расчета 28% годовых. Ежемесячная инфляция в рассматриваемом периоде характеризуется темпами 2,5, 2,0 и 1,8%. Определите наращенную сумму с учетом инфляции.

1.44. Студент имеет 100 долл. и решает: сберечь их или потратить. Если он положит деньги в банк, то через год получит 112 долл. Инфляция составит 14% в год. Определите: а) номинальную процентную ставку; б) реальную процентную ставку; в) что вы посоветовали бы студенту; г) как повлияло бы на ваш совет снижение темпа инфляции до 10% при неизменной номинальной ставке процента.

Ответы и рекомендации к решению

1.1. 292 дня. **1.2.** Цена упала на 16%. **1.3.** 50%. **1.4.** 210 руб.

1.5. 1,4868. **1.6** а) 12812,5 руб.; б) 12810,2 руб.

1.7. 21396,1 у.е.

1.8. 10,5% – простой процент; 10,59% – сложный процент.

1.9. 16304,78 руб. **1.10.** 7,85%.

1.11. а) 2940,1 руб.; б) 2955,45 руб.; б) 2957,23 руб.; г) 2959,02 руб.; 2960,83 руб. – в случае непрерывного начисления процентов.

1.12. Наращенная сумма: а) 28 000 руб.; б) 27957,66 руб.; случай а) выгоднее.

1.13. 8 у.е. **1.14.** 625 руб.

1.15. Наращенная сумма: а) 48736,12 у.е., б) 48815,64 у.е.; процентные деньги: а) 8736,12 у.е., б) 8815,64 у.е.; эффективная процентная ставка: а) 10,38%, б) 10,47%.

1.16. 11,19%. **1.17.** 22,14%.

1.18. Первый платеж равен 32317,72 руб., второй – 26931,44 руб.

1.19. 16826,29 руб. **1.20.** 4,069 года. **1.21.** 103131 у.е.

1.22. 11,14%.

1.23. Второй вариант лучше, так как
$1500 \cdot (1+0{,}06)^{-6} \approx 1057{,}44 > 1000$.

1.24. Вклад увеличится в 1,6454 раза.

1.25. $d_{eff} = 0{,}0955$ или 9,55%.

1.26. $d_{\text{пр}} \approx 0{,}438$ (43,8%); $d_{\text{сл}} \approx 0{,}5123$ (51,23%).

1.27. 4,6 года.

1.28. Процентная ставка: $i = (5{,}45 - 5)/5 \cdot 100\% = 9\%$.
Учетная ставка: $d = \frac{5.45-5}{5{,}45} \cdot 100\% \approx 8{,}26\%$.

1.29. а) 10%; б) 10,41%.

1.30. а) 374809,6 руб. б) D =175190,4 руб.

1.31. 19202,32 руб. **1.32.** а) 10,8 у. е.; б) две годовых.

1.33. а) $4S_0(1-i)^2 = S_0,\ 1-i = 1/2, i = 0{,}5$ (50%);
б) $4S_0(1-0{,}4)^t = S_0,\ (0{,}6)^t = 0{,}25$,
$t = \ln 0{,}25/\ln 0{,}6 \approx 2{,}7$ (года).

1.34. $\alpha_1 = 0{,}1687$ (16,87%), $\alpha_2 = 0{,}198$ (19,8%).

1.35. $\alpha_{\text{кв}} = 0{,}1255$ (12,55%),
$\alpha_{\text{пг}} = 0{,}1941$ (19,41%), $\alpha = 0{,}4258$ (42,58%).

1.36. $\alpha_{\text{кв}} = 4{,}66\%$.

1.37. $\alpha_1 = 0{,}205$ (20,5%); $\alpha_2 = 0{,}215$ (21,5%); $\alpha_3 = 0{,}225$ (22,5%).

1.38. $\alpha_1 = 0{,}165$ (16,5%); $\alpha_2 = 0{,}158$ (15,8%);
$\alpha_3 = 0{,}152$ (15,2%). С точностью до 0,5%.

1.39. 18,8%.

1.40. а) $i_{\alpha,eff} = 0{,}0552$ (5,52%),
б) $i_{\alpha,eff} = 0{,}0562$ (5,62%), в) $i_{\alpha,eff} = 0{,}0533$ (5,33%)

1.41. 121682,24 руб. **1.42.** 343916 руб. **1.43.** 1499070,08 руб.

1.44. а) $i = 0{,}12$ (12%); б) $i_\alpha = -0{,}0175$ (– 1,75%); в) потратить деньги на текущее потребление; г) сберечь деньги.

Глава 2
ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

Финансовые потоки или потоки платежей имеют большое практическое значение. Примерами финансовых потоков могут служить: выплата заработной платы, оплата коммунальных платежей, арендная плата, выплаты по кредитам, налоговые платежи, регулярные взносы в различные фонды, выплаты процентов по ценным бумагам (акциям, облигациям и др.) и т.д. Практически любые регулярные (и нерегулярные) платежи представляют собой потоки платежей, поэтому важность их изучения трудно переоценить.

2.1. Основные характеристики потоков платежей

Платежом или *финансовым событием* называется пара (P, t), состоящая из денежной суммы P (платежа) и момента времени t, в который произведен платеж.

Потоком платежей (cash flow), или *дискретным финансовым потоком*, будем называть конечную или бесконечную последовательность $CF = \{(P_k, t_k)\}$ платежей P_k, осуществленных в момент времени t_k. При этом положительные платежи $(P_k > 0)$ соответствуют поступлениям, а отрицательные платежи $(P_k < 0)$ представляют собой выплаты.

Поскольку, как было отмечено в гл. 1, деньги имеют временную ценность, то это обстоятельство не позволяет непосредственно суммировать платежи, относящиеся к различным моментам времени. Для того чтобы вычислить величину потока в какой-то момент времени t, необходимо каждый платеж потока приводить к этому моменту времени по некоторой годовой процентной ставке i, которая предполагается известной и неизменной для всего потока, и затем суммировать эти приведенные платежи. Обычно приведение производится по схеме сложных процентов.

Для потока платежей

$$CF = \{(P_1;\ t_1), (P_2;\ t_2), \dots, (P_n;\ t_n)\}$$

приведем его основные суммарные характеристики. Будем считать, что $t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n$.

Современной величиной потока платежей называется величина

$$PV = \frac{P_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{P_2}{(1+i)^{t_2}} + \dots + \frac{P_n}{(1+i)^{t_n}}.$$

Будущей величиной или **будущим накопленным значением** потока платежей называется величина

$$FV = P_1(1+i)^{t_n - t_1} + P_2(1+i)^{t_n - t_2} + \dots + P_{n-1}(1+i)^{t_n - t_{n-1}} + P_n .$$

Текущей величиной или **величиной потока** в момент времени t называется сумма всех платежей потока, приведенных к этому времени

$$PV(t) = \frac{P_1}{(1+i)^{t_1 - t}} + \frac{P_2}{(1+i)^{t_2 - t}} + \dots + \frac{P_n}{(1+i)^{t_n - t}}. \qquad (2.1)$$

Пример 2.1. Приведите финансовый поток

$$CF = \{(600\,;0), (250\,;1), (350\,;2), (600\,;3)\}$$

к моменту времени $t = 2$ при ставке 8%.

□ В соответствии с формулой (2.1), запишем

$$PV(2) = 600 \cdot (1+0{,}08)^{2-0} + 250 \cdot (1+0{,}08)^{2-1} +$$
$$+350\ \ (1+0{,}08)^{2-2} + 600 \cdot (1+0{,}08)^{2-3} = 600 \cdot 1{,}08^2 +$$
$$+250 \cdot 1{,}08 + +350 + 600 \cdot 1{,}08^{-1} \approx 1875{,}40\,. \blacksquare$$

Для потока, состоящего из платежей $\{(P_k, k)\}$ производимых в конце каждого года *современной величиной* (*present value*) будем называть величину $PV = PV(0)$. Современная величина потока представляет собой сумму всех платежей потока, приведенных (дисконтированных) к начальному моменту времени

$$PV = \sum_k \frac{P_k}{(1+i)^k}\,. \qquad (2.2)$$

Важным преимуществом приведенных стоимостей является то, что они выражены в денежных единицах на один и тот же текущий момент времени, и поэтому их можно складывать и сравнивать. Именно, приведенная стоимость суммарного потока $CF_1 + CF_2$ равна сумме приведенных стоимостей CF_1 и CF_2: $PV(CF_1 + CF_2) = PV(CF_1) + PV(CF_2)$, а финансовый поток CF_1 считается предпочтительнее финансового потока CF_2, если $PV(CF_1) > PV(CF_2)$.

Пример 2.2. Даны два потока:

$$CF_1 = \{(200\,;1),(250\,;2),(150\,;3)\} \quad \text{и}$$
$$CF_2 = \{(150\,;1),(300\,;2),(100\,;3)\}$$

с одинаковой годовой процентной ставкой i. Какой из этих потоков является предпочтительнее и почему?

□ Найдем современные величины обоих потоков согласно формуле (2.2)

$$PV(CF_1) = \frac{200}{1+i} + \frac{250}{(1+i)^2} + \frac{150}{(1+i)^3}\,,$$

$$PV(CF_2) = \frac{150}{1+i} + \frac{300}{(1+i)^2} + \frac{100}{(1+i)^3}\,.$$

Умножая далее обе части этих равенств на $(1+i)^2$, получим

$$(1+i)^2 \cdot\ PV(CF_1) = 450 + 200i + \frac{150}{1+i}\,,$$

$$(1+i)^2 \cdot\ PV(CF_2) = 450 + 150i + \frac{100}{1+i}\,.$$

Отсюда

$$(1+i)^2 \cdot\ PV(CF_1) > (1+i)^2 \cdot\ PV(CF_2)\ \Rightarrow\ PV(CF_1) > PV(CF_2)\,.$$

Следовательно, первый финансовый поток предпочтительнее второго. ■

Основополагающий принцип финансовой науки состоит в том, что «деньги сегодня» стоят больше, чем «деньги завтра», поскольку их можно инвестировать, и они немедленно начнут приносить доход. Это связано с тем, что существует финансовый рынок – своеобразная «машина времени», который позволяет совершать операции между текущими и будущими деньгами – давать в долг и брать взаймы. Коэффициентом обмена сегодняшних денег на будущие (через год) является величина $(1+i)$, где i — безрисковая процентная ставка.

Величина потока в момент времени последнего платежа (если он существует) называется *конечной величиной потока*, или *наращенной суммой*, или *будущей стоимостью* (*future value*), и обозначается FV. Отправляясь от формул (1.5) и (2.2), для конечного финансового потока, состоящего из n ежегодных платежей P_k $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ с одинаковой процентной ставкой i, будем иметь

$$FV = PV(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} P_k(1+i)^{n-k}. \qquad (2.3)$$

Пример 2.3. При годовой ставке сложного процента $r = 12\%$ найдите современную и наращенную величины потока платежей

$$CF = \{(-1120\,;1),(6272\,;2),(-21952\,;3),(614656\,;4)\}.$$

Ответ округлите до ближайшего целого числа.

□ По формуле (2.2) $(i = r/100)$

$$PV = \sum_{k=1}^{4} \frac{P_k}{(1+i)^k} = -\frac{1120}{1{,}12} + \frac{6272}{1{,}12^2} - \frac{21952}{1{,}12^3} + \frac{614656}{1{,}12^4} \approx 379\,000 \text{ (руб.)}.$$

По формуле (2.3)

$$FV = PV(1+i)^4 = 379000 \cdot 1{,}12^4 \approx 596364 \text{ (руб.)}. \blacksquare$$

Рассмотрим конечный финансовый поток, порождаемый инвестициями $P_0 > 0$:

$$CF = \{(-P_0\,,0),(P_1\,,1),(P_2\,,2),\dots,(P_n\,,n)\}. \qquad (2.4)$$

В этом случае приведенную стоимость потока PV часто называют *чистой приведенной стоимостью* (*net present value*, NPV)

$$NPV = -P_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i_k)^k}. \qquad (2.5)$$

Считается, что вкладывать деньги в проект, порождающий данный финансовый поток, выгодно, если $NPV > 0$. Подсчет приведенной стоимости проектов является составной частью процесса определения стоимости акций на финансовом рынке. При этом часто возникает задача определения постоянной процентной ставки i, по которой нужно проводить дисконтирование:

$$NPV = -P_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} . \tag{2.6}$$

Процентная ставка i в данном случае имеет смысл альтернативной стоимости, которую получает инвестор, вкладывая деньги в проект вместо того, чтобы инвестировать их в активы финансового рынка. Доказано, что выгодно вкладывать деньги в те проекты, которые имеют доходность более высокую, чем альтернативная стоимость капитала. Один из способов оценки истинной нормы доходности состоит в нахождении *нормы доходности дисконтированного потока платежей* (*discounted cash flow rate of return, DCF*), или *внутренней нормы доходности* (*internal rate of return, IRR*). Внутренняя норма доходности определяется как процентная ставка i в (2.6), при которой $NPV = 0$. Это приводит к уравнению

$$-P_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} = 0 . \tag{2.7}$$

Сделав в (2.7) замену переменной $x = 1/(1+i)$, получим

$$-\mathrm{P}_0 + \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{P_k x^k} = 0. \tag{2.8}$$

Это уравнение не всегда имеет вещественные корни и решается в общем случае численно.

Пусть в (2.4) все платежи $P_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, и среди них есть, хотя бы один $P_j > 0$. Тогда при $i > -1$ функция

$$NPV(i) = -P_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k}$$

является непрерывной, монотонно убывающей функцией, которая меняет знак с плюса на минус (рис. 2.1).

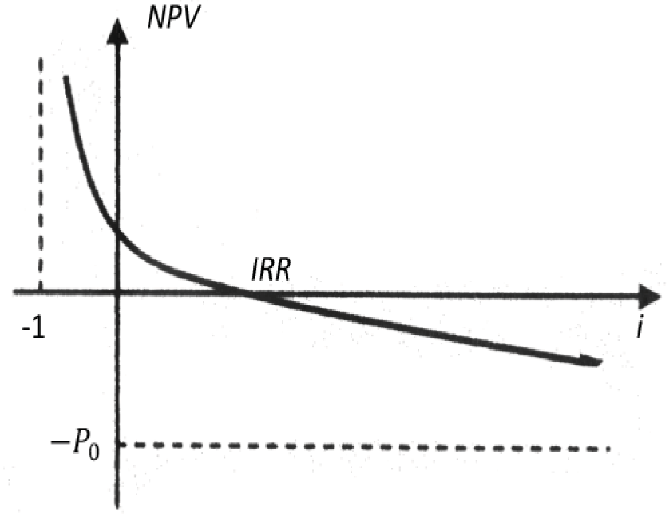

Рисунок 2.1 – Зависимость чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования

Следовательно, уравнение (2.7) имеет единственное решение $i = IRR$. Более того, внутренняя норма доходности будет положительной ($IRR > 0$) при

$$NPV(0) = -P_0 + \sum_{k=1}^{n} P_k > 0\,,$$

когда нетто-сумма превосходит начальные инвестиции. Из рис. 2.1 видно, что $NPV > 0$ при $i < IRR$, $NPV = 0$ при $i = IRR$ и $NPV < 0$ при $i > IRR$. Поэтому при сравнении альтернативной стоимости с IRR проекта на самом деле решается вопрос о знаке NPV данного проекта.

Оценка нормы доходности проекта при помощи IRR перестает быть надежной при зависимости процентной ставки от времени.

Пример 2.4. Найдите внутреннюю норму доходности IRR потока платежей $CF = \{(-2700\,;0),(1500\,;1),(5000\,;2)\}$.

□ Воспользуемся уравнением (2.7) и его аналогом, уравнением (2.8). Будем иметь

$$-2700 + \frac{1500}{1+i} + \frac{5000}{(1+i)^2} = 0 \ \left(x = \frac{1}{1+i}\right) \ \Rightarrow\ 50x^2 + 15x - 27 = 0\,;$$

$$x = \frac{-15 + \sqrt{225 + 5400}}{100} = \frac{-15 + 75}{100} = 0{,}6\,;$$

$$IRR = 0{,}6^{-1} - 1 \approx 0{,}6667\ (66{,}67\%).\ ■$$

Пример 2.5. Четырехлетний кредит в 1 млн руб., взятый под 10% годовых, погашается по следующей схеме: 500 тыс. руб. возвращается в конце первого года, 300 тыс. руб. – в конце второго года, 250 тыс. руб. – в конце третьего года, а остаток возвращается в конце четвертого года. Найдите величину остатка.

□ Обозначим через x искомую величину остатка. Тогда, в согласии с формулой (2.6), получим

$$NPV = 10^6 \cdot \left(-1 + \frac{0{,}5}{1{,}1} + \frac{0{,}3}{1{,}1^2} + \frac{0{,}25}{1{,}1^3} + \frac{x}{10^6 \cdot 1{,}1^4}\right) = 0\,,$$

$$x \approx 0{,}109692 \cdot 1{,}1^4 \cdot 10^6 = 160600\ (\text{руб.}).\ ■$$

Упомянем еще такую величину как средний срок. Его нельзя вычислить как среднее всех сроков поступления платежей так как необходимо учитывать величину каждого платежа. Время до поступления каждого платежа необходимо умножить на его долю в сумме всех платежей.

Средним сроком финансового потока

$$CF = \{(P_1; t_1), (P_2; t_2), \dots, (P_n; t_n)\}$$

называется средневзвешенное время t поступления всех платежей

$$t = \frac{P_1}{P} \cdot t_1 + \frac{P_2}{P} \cdot t_2 + \dots + \frac{P_n}{P} \cdot t_n\,, \qquad (2.9)$$

где P обозначает сумму всех платежей $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$. Средний срок можно также записать в виде

$$t = \frac{P_1 \cdot t_1 + P_2 \cdot t_2 + \dots + P_n \cdot t_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}. \qquad (2.10)$$

Пример 2.6. Найти средний срок платежа

$$CF = \{(0; 1000), (1; 2000), (2; 4000), (3; 1000)\}$$

Решение. По формуле (2.10) получаем

$$t = \frac{P_1 \cdot t_1 + P_2 \cdot t_2 + \dots + P_n \cdot t_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{1000 \cdot 0 + 2000 \cdot 1 + 4000 \cdot 2 + 1000 \cdot 3}{1000 + 2000 + 4000 + 1000} = 1{,}625.\ ■$$

Отметим, что если все платежи положительные, то $t_1 < t < t_n$, т.е t лежит между начальным и конечным временем. В общем случае (когда платежи могут быть разных знаков) средний срок потока может лежать вне временного интервала платежей. Как правило среднее время вычисляется для неотрицательных платежей.

Следует заметить, что приведенное определение среднего срока не совсем корректно, так как мы складываем платежи, относящиеся к разным срокам. Если привести все платежи к современной величине, то придем к понятию дюрации Маколея.

Дюрацией финансового потока

$$CF = \{(P_1; t_1), (P_2; t_2), \dots, (P_n; t_n)\}$$

называется величина

$$D = \sum_{k=1}^{n} w_k t_k, \text{ где } w_k = \frac{P_k(1+i)^{-t_k}}{P_1(1+i)^{-t_1}+P_2(1+i)^{-t_2}+\dots+P_n(1+i)^{-t_n}}.$$

2.2. Обыкновенная годовая рента (аннуитет)

Поток положительных одинаковых платежей с равными промежутками между ними называется *финансовой рентой* или *аннуитетом*. Если платежи поступают в конце очередного промежутка, то рента называется *постнумерандо* (*annuity due*), если платежи поступают в начале очередного периода, то рента называется рентой *пренумерандо* (*ordinary due*). Ренты с конечным числом платежей называют *конечными*. Промежуток времени между началом первого периода и окончанием последнего называется *сроком* конечной ренты или *длительностью* ренты. В дальнейшем будем рассматривать ренты длительностью n лет. Ренты с бесконечным числом платежей называют *бесконечными* или *вечными* рентами, а также *перпетуитетами* (*perpetuity*). Если все платежи равны между собой, ренту называют *постоянной*.

Рента описывается следующими параметрами: размером отдельного платежа (член ренты), периодом и сроком ренты, процентной ставкой, числом платежей в году (p – срочные ренты, непрерывные ренты ($p \to \infty$)), а также методом (простые, сложные и непрерывные проценты) и частотой начисления процентов (ренты с ежегодным начислением процентов, с начислением m раз в году (m — кратные ренты), с непрерывным начислением). Ниже подробно остановимся только на рентах со сложным начислением процентов.

Конечная годовая рента – самая простая рента: в ней только один платеж R в год, длительность ренты n лет. На рентные платежи начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке i.

Рассмотрим вначале подробно конечную годовую ренту постнумерандо

$$\{(0,0),(R,1),(R,2),\dots,(R,n)\}$$

и найдем ее современную величину $PV = A$. Отправляясь от формулы (2.2), будем иметь

$$A = R\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^k} = R\sum_{k=1}^{n}q^k\ \left(q=\frac{1}{1+i}\right).$$

Здесь справа имеем сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$ и первым членом Rq. Вычисляя ее при помощи формулы для суммы n членов геометрической прогрессии $S_n = b_1(1-q^n)(1-q)^{-1}$, получим

$$A = \frac{R}{i}\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right) = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{2.11}$$

Введем функцию

$$a(n,i) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \tag{2.12}$$

которую назовем *коэффициентом приведения ренты*. При помощи ее запишем выражение (2.11) в виде

$$A = Ra(n,i). \tag{2.13}$$

Коэффициент приведения ренты $a(n,i)$ показывает, во сколько раз современная величина ренты A больше ее годового платежа R.

Далее по формуле (2.3) найдем наращенную величину ренты $FV = S$

$$S = A(1+i)^n, \tag{2.14}$$

или, используя выражения (2.11)–(2.14), будем иметь

$$S = Ra(n,i)(1+i)^n = \frac{R(1+i)^n}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right] = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \quad (2.15)$$

Из соотношения (2.12) следует, что если в начальный момент времени положить в банк современную величину ренты A по годовой процентной ставке i, то к концу n- го года она вырастет до наращенной величины ренты S. Назовем функцию

$$s(n,i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (2.16)$$

коэффициентом наращения ренты и перепишем выражение (2.15) в форме

$$S = Rs(n,i). \quad (2.17)$$

Коэффициент $s(n,i)$ показывает, во сколько раз наращенная величина ренты S больше ее годового платежа R. Функции $a(n,i)$ и $s(n,i)$ связаны соотношением

$$s(n,i) = a(n,i)(1+i)^n\,. \quad (2.18)$$

Формулы (2.13), (2.17) формально имеют смысл и для нецелых n. При этом нужно использовать определяющие формулы (2.12), (2.16) для $a(n,i)$ и $s(n,i)$ соответственно.

Пример 2.7. Формируется фонд на основе ежегодных отчислений в сумме 8000 у.е. с начислением на них сложных процентов по ставке 11% годовых. Определите величину фонда через 10 лет.

□ На основании формулы (2.15) с учетом условий задачи найдем

$$S = 8000 \cdot \frac{(1+0{,}11)^{10}-1}{0{,}11} = 133776{,}07 \text{ (у. е.)}. \blacksquare$$

Пример 2.8. Определите размер вклада, который обеспечивает ежегодное (в конце года) получение денежной суммы в размере 1700 у.е. в течение 19 лет по годовой ставке 11%.

□ Воспользовавшись соотношением (2.11) и данными задачи, найдем

$$A = 1700 \cdot \frac{1-1{,}11^{-19}}{0{,}11} = 13326{,}8 \text{ (у. е.)}. \blacksquare$$

Пример 2.9. На сколько процентов изменятся современная и наращенная величины пятилетней годовой ренты постнумерандо при увеличении годовой процентной ставки с 10% до 11%?

□ Принимая в расчет формулу (2.11), запишем

$$\frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{0{,}1}{0{,}11} \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}11)^{-5}}{1 - (1 + 0{,}1)^{-5}} - 1 \approx -0{,}025.$$

Отсюда следует, что современная величина ренты уменьшиться на 2,5%.

Далее по формуле (2.14) найдем

$$\frac{S_2 - S_1}{S_1} = \frac{A_2(1 + i_2)^5 - A_1(1 + i_1)^5}{A_1(1 + i_1)^5} =$$

$$= \frac{0{,}1}{0{,}11} \cdot \frac{(1 + 0{,}11)^5 - 1}{(1 + 0{,}1)^5 - 1} - 1 \approx 0{,}201.$$

Следовательно, наращенная величина ренты увеличилась на 2,01%. ■

Пример 2.10. На сколько процентов изменятся современная и наращенная величины пятилетней годовой ренты постнумерандо с процентной ставкой 10% годовых при уменьшении срока ренты с пяти лет до четырех?

□ Пусть A_2 — современная величина четырехлетней ренты, а A_1 — современная величина пятилетней ренты. Тогда по формуле (2.11) получим

$$\frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{1 - 1{,}1^{-4}}{1 - 1{,}1^{-5}} - 1 \approx -0{,}1638\,,$$

т.е. современная величина уменьшилась на 16,38%.

Для аналогичных наращенных величин, с учетом соотношения (2.15), будем иметь

$$\frac{S_2 - S_1}{S_1} = \frac{1{,}1^4 - 1}{1{,}1^5 - 1} - 1 \approx -0{,}2398\,,$$

что соответствует уменьшению наращенной величины ренты на 23,98%. ■

Пример 2.11. Резервный фонд создается в течение 18 лет. На поступающие в него средства начисляются сложные проценты по ставке 4,5% годовых. В течение первых 6 лет в конце каждого года в фонд вносили по 15 000 у.е., в течение 4 последующих лет – по 18 000 у.е. в конце года, а в последующие 8 лет – по 22 000 у.е. в конце года. Чему будет равна сумма фонда через 18 лет? Ответ приведите с точностью до 0,01.

□ Сумма фонда S складывается из трех наращенных сумм, каждая из которых вычисляется при помощи формулы (2.15), причем первая сумма лежит на депозите и наращивается в течение 12 лет, вторая – в течение 8 лет, т.е.

$$S = S_1 \cdot (1 + 0{,}045)^{12} + S_2 \cdot (1 + 0{,}045)^8 + S_3 =$$

$$= 15\,000 \cdot \frac{1{,}045^6 - 1}{0{,}045} \cdot 1{,}045^{12} + 18\,000 \cdot \frac{1{,}045^4 - 1}{0{,}045} \cdot 1{,}045^8 +$$

$$+22\,000 \cdot \frac{1{,}045^8 - 1}{0{,}045} = 486738{,}41 \text{ (у. е.)}. \blacksquare$$

В заключение отметим, для того чтобы найти основные характеристики конечной годовой ренты пренумерандо

$$\{(R, 0), (R, 1), (R, 2), \dots, (R, n-1), (0, n)\},$$

(обозначим их $\tilde{A}, \tilde{S}, \tilde{a}(n, i), \tilde{s}(n, i)$) нужно соответствующие величины, полученные выше для ренты постнумерандо, умножить на $(1 + i)$, т.е.

$$\tilde{A} = A(1 + i), \tilde{S} = S(1 + i), \tilde{a}(n, i) =$$

$$= a(n, i)(1 + i), \tilde{s}(n, i) = s(n, i)(1 + i).$$

Пример 2.12. Ежегодно в начале года в банк делается очередной взнос в размере 10 млн руб.; банк платит 20% годовых. Какая сумма будет на счете по истечении 3-х лет?

□ Здесь следует использовать схему пренумерандо (выплаты в начале периода). Опираясь на формулу (2.15), найдем

$$\tilde{S} = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \cdot (1 + i) =$$

$$= 10 \cdot \frac{1{,}2^3 - 1}{0{,}2} \cdot 1{,}2 \approx 43{,}68 \text{ (млн руб.)}. \blacksquare$$

2.3. Определение параметров годовой ренты

Параметры R, n, i, A, S годовой ренты не являются независимыми, поэтому если задать некоторые из них, то остальные можно определить, исходя из того, что любую формулу можно рассматривать в качестве уравнения. Формулы (2.11) и (2.15) можно применять для непосредственного вычисления приведенной и наращенной величин, а можно как из уравнения находить срок, процентную ставку или рентный платеж.

1. Если заданы R, n, i, то A и S находятся по формулам (2.12), (2.13) и (2.16), (2.17) соответственно.

Пример 2.13. Определите современную и наращенную величины семилетней ренты постнумерандо с ежегодным платежом 12 тыс. руб., если годовая процентная ставка $p = 12\%$. Ответы округлите до ближайшего целого числа.

□ Воспользуемся вначале формулами (2.12), (2.13). Вспоминая, что $i = p/100$, будем иметь

$$a(7; 012) = \frac{1 - (1 + 0{,}12)^{-7}}{0{,}12} \approx 4{,}56376\,;$$

$$A = 12000 \cdot a(7; 012) \approx 54765 \text{ (руб.)}.$$

Далее, согласно (2.14), найдем

$$S = 54765 \cdot (1 + 0{,}12)^{7} \approx 121068 \text{ (руб.)}. \ \blacksquare$$

2. Если заданы R, A, i, то n находится как решение уравнения (2.13):

$$n = \frac{-\ln(1 - i \cdot A/R)}{\ln(1 + i)}. \qquad (2.19)$$

Если это выражение не целое, то n определяется как ближайшее целое, исходя из условий задачи. Если имеется таблица $a(n, i)$, то можно найти значение $a^{*} = A/R$, а затем подобрать по таблице наиболее подходящее n, учитывая, что i известно. Затем, зная n и i, по формуле (2.14) либо (2.17) можно найти S.

Пример 2.14. Найдите длительность ренты постнумерандо с современной величиной $A = 54\,756$ руб. и ежегодным платежом $R = 12\,000$ руб., если годовая процентная ставка $p = 12\%$. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

□ Принимая в расчет соотношение (2.19), получим

$$n = \frac{-\ln(1-0{,}12 \cdot 54756/12000)}{\ln(1+0{,}12)} = 6{,}998 \approx 7 \text{ (лет)}. \blacksquare$$

Пример 2.15. Сотрудник компании получил кредит на трехлетнее обучение в размере $K = 600$ тыс. руб. под $r = 5\%$ годовых. После обучения он обязуется выплачивать $p = 10\%$ от годовой зарплаты $R = 1$ млн 200 тыс. руб. в конце года. Через сколько лет после окончания обучения он выплатит кредит?

□ Составим математическую модель задачи, обозначив $i = r/100 = 0{,}05$, $q = p/100 = 0{,}1$. Имеем

$$K(1+i)^3 = qR\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Подставляя затем исходные данные задачи в последнее уравнение и, разрешая его относительно n, получим

$$600000(1+0{,}05)^3 = 120000\,\frac{1-(1+0{,}05)^{-n}}{0{,}05}.$$

Умножая уравнение на 0,05, и деля на 120 000, получим $1-(1+0{,}05)^{-n} = \frac{30000}{120000} \cdot 1.05^3$. Откуда $(1{,}05)^{-n} = 1 - 0{,}25 \cdot 1{,}05^3$ и, окончательно, $n = \frac{-\ln\left(1-0{,}25 \cdot 1{,}05^3\right)}{\ln 1{,}05} = 7$ (лет). $\blacksquare$

3. Если заданы R, S, i, то n находится как решение уравнения (2.15):

$$n = \frac{\ln(1 + i \cdot S/R)}{\ln(1+i)} \tag{2.20}$$

и округляется, исходя из условия задачи. В случае, когда имеется таблица $s(n,i)$, то находится $s^* = S/R$, по которой подбирается значение n. Затем, зная n и i, в согласии с (2.13) или (2.17) можно найти A.

Пример 2.16. Сколько лет должна выплачиваться рента с годовым платежом 5000 руб., чтобы ее текущая (наращенная) стоимость превзошла величину 75 000 руб. при процентной ставке 9% годовых?

□ Найдем вначале наращенную величину (текущую стоимость) ренты S, используя соотношение (2.15)

$$S = 5000 \cdot \frac{(1+0{,}09)^n - 1}{0{,}09} = 5000 \cdot \frac{1{,}09^n - 1}{0{,}09},$$

а затем решим неравенство

$$5000 \cdot \frac{1{,}09^n - 1}{0{,}09} > 75000 \;\Leftrightarrow\; 1{,}09^n - 1 > 15 \cdot 0{,}09\,;\; 1{,}09^n > 2{,}35\,;$$

$$n > \frac{\ln 2{,}35}{\ln 1{,}09} \approx 9{,}91.$$

Отсюда следует, что наименьшее число лет, которые должна выплачиваться рента, равно 10. ■

Пример 2.17. Какую сумму нужно положить в банк женщине 55 лет, чтобы в течение 18 лет в конце каждого года снимать по 3000 у.е., если на остаток вклада меньше 10 000 у.е. начисляется 3% годовых, а на остаток вклада не менее 10 000 у.е. – 4% годовых?

□ Найдем срок, в течение которого приведенная величина ренты будет меньше 1000 у.е. Воспользуемся формулой вычисления приведенной величины (2.11) и решим неравенство

$$A^* = 3000 \cdot \frac{1 - 1{,}03^{-n}}{0{,}03} < 10000 \;\Leftrightarrow\; 1 - 1{,}03^{-n} < 0{,}1;$$

$$1{,}03^{-n} > 0{,}9;$$

$$n < \frac{-\ln 0{,}9}{\ln 1{,}03} \approx 3{,}56.$$

Следовательно, 3% будут начисляться последние 3 года, а 4% годовых будут начисляться первые 15 лет. Искомый вклад равен сумме приведенной величины 15-летней ренты и дисконтированной приведенной величины 3-летней ренты

$$A = 3000 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-15}}{0{,}04} + 3000 \cdot \frac{1 - 1{,}03^{-3}}{0{,}03} \cdot 1{,}04^{-15} \approx 38067{,}04\ (\text{у. е.}).\ ■$$

4. Если заданы A, n, i, то R находится как решение уравнения (2.13): $R = A/a(n,i)$, а S определяется из (2.17) или (2.14).

Пример 2.18. Вам досталось по наследству 10 000 долл., и вы хотите иметь стабильный доход в течение 10 лет. Финансовая компания «Светлое будущее» продает такие аннуитеты из расчета 5% годовых. Какова будет сумма вашего ежегодного дохода, если вы воспользуетесь этой услугой?

□ Подставляя в формулу (2.11) $A = 10000$, $i = 0{,}05$, получим

$$R = 10000 \cdot 0{,}05 \cdot (1 - 1{,}05^{-10})^{-1} \approx 1295{,}05 \text{ долл.} \blacksquare$$

5. Если заданы S, n, i, то R находится уравнения (2.17): $R = S/\, s(n, i)$, а A определяется из (2.13) или из (2.14).

Пример 2.19. Найдите размер равных взносов в конце года для следующих двух ситуаций:

а) создание к концу пятилетия фонда, равного 1 млн руб.;

б) погашение к концу пятилетия текущей задолженности, равной 1 млн руб. В каждой из этих двух операций предусматривается начисление на взносы в размере 8% годовых.

□ Рассмотрим случай а) и приравняем размер создаваемого фонда наращенной сумме (2.16), (2.17) простой годовой ренты. Из полученного уравнения найдем

$$R = \frac{S}{s(5; 0{,}08)} = \frac{1000000 \cdot 0{,}08}{1{,}05^5 - 1} \approx 170456{,}45 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, ежегодные взносы в размере 170456,4 руб. достаточны при начислении на них процентов по указанной ставке для накопления 1 млн руб.

В ситуации б) для определения ежегодной суммы погашения за 5 лет текущего долга в 1 млн. руб. приравняем его современной величине ренты (2.13), (2.12), члены которой погашают долг. Будем иметь

$$R = \frac{A}{a(5; 0{,}08)} = \frac{1000000}{3{,}99271} \approx 250456{,}45 \text{ (руб.)}. \blacksquare$$

6. Хотя процентная ставка i неуправляема организатором ренты, можно поставить задачу о нахождении желаемой процентной ставки (внутренней нормы доходности). Пусть заданы R, A и n, а требуется найти i, как решение уравнения (2.9). Заметим, что, поскольку при малых $i > 0$ функция $a(n, i) \approx n$ непрерывна и монотонно убывает с ростом i, то при $A/R \geq n$ уравнение

(2.11) решений не имеет. Если же $A/R < n$, то нужная процентная ставка i существует и при малых i может быть найдена приближенно по формуле

$$i \approx \frac{R}{A} - \frac{A}{Rn^2} = \frac{R^2n^2 - A^2}{RAn^2}, \qquad (2.21)$$

которая получается при разложении функции $a(n, i)$ в ряд по степеням $(1 + i)^{-1}$.

И еще, если имеется таблица $a(n, i)$, то подсчитывая $a^* = A/R$ при заданном n, подбираем подходящее значение i.

7. Если известны R, S и n, то i находится из уравнения (2.15). Функция $s(n, i) \approx n$ при малых $i > 0$, непрерывна и монотонно растет с ростом i. Следовательно, если $S/R \leq n$, то уравнение (2.13) решений не имеет; при $S/R > n$ оно решается приближенно, а разложение в ряд $s(n, i)$ по степеням $(1 + i)$ дает приближенную аналитическую формулу

$$i \approx \frac{S}{Rn^2} - \frac{R}{S} = \frac{S^2 - R^2n^2}{RSn^2}. \qquad (2.22)$$

Наконец, по таблице для $s(n, i)$ по известному значению $s^* = S/R$ можно подобрать неизвестное i при заданном n.

Пример 2.20. Определите доходность инвестиций, выраженную в виде годовой ставки сложного процента, если ожидаемый доход на 50 тыс. руб. вложений составит 12,5 тыс. руб. в течение 10 лет.

□ Вычислим искомую величину при помощи приближенной формулы (2.21). Имеем

$$i = \frac{12500}{50000} - \frac{50000}{10^2 \cdot 12500} = 0{,}21\ (21\%). \blacksquare$$

2.4. Кратные ренты и кратное начисление процентов

Для общей конечной ренты платежи выплачиваются в течение n лет p раз в год через равные интервалы времени, так что суммарный годовой платеж равен R, а единичный платеж составляет R/p; проценты начисляются m раз в год также через равные интервалы времени; годовая ставка сложных процентов равна i. Вычислим современную величину A и наращенную величину S такой ренты.

Рассмотрим вклад в наращенную сумму ренты k- го единичного платежа в сумме R/p, произведенного в конце периода длительности $1/p$ лет, отстоящего от последнего платежа на $(n-k/p)$ лет. На этот платеж сложные проценты по ставке i/m будут начислены столько раз, сколько временных отрезков длины $1/m$ уложится в оставшийся срок ренты. Поэтому на данный платеж будет произведено целое число $[(n-k/p)m]$ начислений по полной ставке i/m ($[a]$ – целая часть числа a) и, возможно, еще одно начисление по неполной ставке. Частичный вклад в наращенную сумму потока S этого платежа будет равен

$$S_k = \frac{R}{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(n-\frac{k}{p}\right)m}.$$

Наращенная сумма ренты S будет складываться из всех таких частичных вкладов:

$$S = \sum_{k=1}^{np} S_k = \frac{R}{p}\sum_{k=1}^{np}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(n-\frac{k}{p}\right)m}.$$

Изменим в последнем соотношении порядок суммирования, введя переменную $j = np - k$. Тогда $j = np - 1$ при $k = 1$ и $j = 0$ при $k = np$. Суммируя далее это выражение по j в обратном порядке, будем иметь

$$S = \frac{R}{p}\sum_{j=0}^{np-1}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}j}.$$

Слагаемые, стоящие под знаком суммы, образуют геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 1$, знаменателем $q = (1+i/m)^{m/p}$ и количеством членов np. Найдя, как и выше, сумму этой прогрессии, получим выражение для наращенной суммы ренты

$$S = \frac{R\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1\right]}{p\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}. \qquad (2.23)$$

Используя выражение (2.16) для коэффициента наращения ренты $s(n, i)$, перепишем формулу (2.23) в более компактном виде

$$S = \frac{R \cdot s\left(mn, \frac{i}{m}\right)}{p \cdot s\left(\frac{m}{p}, \frac{i}{m}\right)}. \qquad (2.24)$$

Зная наращенную сумму ренты, можно найти ее современную величину A, дисконтируя наращенную сумму S на начало ренты. Используя соотношение (2.12), получим

$$A = S\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}.$$

Следовательно

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \qquad (2.25)$$

Отправляясь от общих формул (2.23)–(2.25), рассмотрим некоторые часто встречающиеся частные случаи общей конечной ренты постнумерандо.

1. Пусть платежи производятся p раз в году, а проценты начисляются один раз в году ($m = 1$), тогда

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{s(n, i)}{s\left(\frac{1}{p}, i\right)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^{1/p} - 1}, A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{(1 + i)^{1/p} - 1}. \qquad (2.26)$$

2. Если платеж производится один раз в год ($p = 1$), а проценты начисляются m раз в год, то наращенная сумма S и приведенная величина A вычисляются по следующим формулам.

$$S = R \cdot \frac{s\left(mn, \frac{i}{m}\right)}{s(m, i)} = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m} - 1},$$

$$A = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m} - 1}. \qquad (2.27)$$

2. Часто встречается ситуация, когда число платежей в году и число начислений процентов совпадают ($p = m$). В этом случае будем иметь

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{s\left(mn, \frac{i}{m}\right)}{s\left(1, \frac{i}{m}\right)} = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{i},$$

$$A = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{i}. \qquad (2.28)$$

Замечания

1. Для того чтобы найти наращенную сумму и приведенную величину p-кратной ренты пренумерандо при -кратном начислении процентов, достаточно воспользоваться рекомендацией, приведенной в конце предыдущего параграфа, т.е. правые части полученных формул (2.29)–(2.26) умножить на величину $(1 + i/m)^{m/p}$.

2. Переходя в соотношениях (2.26) к пределу при $p \to \infty$, получим непрерывный поток платежей с постоянной плотностью R или, так называемую **непрерывную ренту**

$$S = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{\ln(1 + i)}, \qquad A = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{\ln(1 + i)}. \qquad (2.29)$$

Аналогичный предельный переход в формулах (2.23), (2.25) при конечном фиксированном значении m приводит к **непрерывной ренте с -кратным начислением процентов**

$$S = R \cdot \frac{(1 + i/m)^{mn} - 1}{m \ln(1 + i/m)}, \qquad A = R \cdot \frac{1 - (1 + i/m)^{-mn}}{m \ln(1 + i/m)}. \qquad (2.30)$$

Если в указанных выражениях перейти к пределу при $m \to \infty$ оставляя p конечым фиксированным числом, то придем к *p —срочной ренте с непрерывным начислением процентов*

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{ni} - 1}{e^{i/p} - 1}, \qquad A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - e^{-ni}}{e^{i/p} - 1}. \qquad (2.31)$$

Наконец, предельный переход при $m \to \infty$ в формулах (2.30) приводит к **непрерывной ренте с непрерывным начислением процентов**

$$S = R \cdot \frac{e^{ni} - 1}{i}, \qquad A = R \cdot \frac{1 - e^{-ni}}{i}. \tag{2.32}$$

Подробный вывод формул (2.29) — (2.32) приведен в учебных пособиях [1], [2].

3. **Отложенная (отсроченная) рента** – это рента, начало первого периода выплат которой отложено на некоторое время t. В этом случае наращенная сумма S не изменится, так как не изменится длительность и другие параметры ренты, хотя и накопится на t лет позже. Современная же величина ${}_t^nA$, обеспечивающая выплаты ренты, будет меньше приведенной величины A немедленной ренты, так как вносится на t лет раньше. Поэтому, чтобы найти ${}_t^nA$, надо умножить A на множитель дисконтирования за период t. Этот множитель равен $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}$ при m —кратном начислении процентов $(1 + i)^{-t}$ для аннуитета. Воспользовавшись формулами (2.25) и (2.11), поучим формулы вычисления отсроченной ренты для аннуитета и для p —срочной ренты с m —кратным начислением процентов

$${}_t^nA = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}(1 + i)^{-t}.$$

$${}_t^nA = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}\left(1 + \frac{t}{m}\right)^{mt}. \tag{2.33}$$

Пример 2.21. Семья планирует через 5 лет купить квартиру за 1 млн 900 тыс. руб. и с этой целью ежемесячно на банковский депозит вносится определенная сумма. Найдите ее, если годовая банковская процентная ставка составляет 11% с ежемесячным начислением процентов.

□ Используя первую формулу (2.28) при $p = m = 12$, $n = 5$, запишем уравнение относительно годового взноса R

$$19 \cdot 10^5 = R \cdot \frac{(1 + 0{,}11/12)^{12 \cdot 5} - 1}{0{,}11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{0{,}11 \cdot 19 \cdot 10^5}{(1+0{,}11/12)^{60} - 1} \approx 286727{,}25 \text{ (руб.)}. \blacksquare$$

Пример 2.22. Кредит, взятый под 24% годовых, начисляемых ежеквартально, погашается ежеквартальными выплатами в размере 10 тыс. руб. в конце каждого квартала в течение двух лет. В результате снижения процентной ставки до 12% годовых ежеквартальные выплаты были пересчитаны. Найдите новую сумму ежеквартального платежа.

□ Отправляясь от второго соотношения (2.28) и учитывая, что $p = m = 4, n = 2$, будем иметь

$$10^4 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}24/4)^{-8}}{0{,}24} = \frac{R}{4} \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}12/4)^{-8}}{0{,}12};$$

$$\frac{R}{4} = 10^4 \cdot \frac{1 - 1{,}06^{-8}}{2 \cdot (1 - 1{,}03^{-8})} \approx 8846 \text{ (руб.)}. \blacksquare$$

Пример 2.23. Во сколько раз увеличится приведенная величина квартальной ренты постнумерандо, если платежи будут поступать в начале периода из расчета 30% годовых?

□ Как было отмечено выше, приведенная величина ренты пренумерандо равна приведенной величине ренты постнумерандо, умноженной на множитель наращения $(1 + i/m)^{m/p}$. В нашем случае при $m = 1, p = 4, n = 1$ он будет равен $(1 + 0{,}3)^{1/4} \approx 1{,}0678$. Следовательно, приведенная величина ренты пренумерандо в 1,0678 раза больше приведенной величины ренты постнумерандо. ■

Пример 2.24. Найдите годовую ставку сложных процентов, если наращенная величина ежедневной ренты постнумерандо с временной базой $T_0 = 360$ дней увеличится в 1,000687 раза при начислении платежей в начале периода.

□ Наращенная величина ренты пренумерандо при $n = m = 1$ и $p = T_0$ в $(1 + i)^{1/p}$ раза больше наращенной величины ренты постнумерандо. Отсюда,

$$(1 + i)^{1/360} = 1{,}000687; \ i = 1{,}000687^{360} - 1 \approx 0{,}2805 \ (28{,}05\%). \blacksquare$$

Пример 2.25. На банковский счет ежегодно зачисляется сумма 12 тыс. руб. под 12% годовых. Найдите сумму на счете через семь лет для следующих схем платежей и начислений процентов: а) поступление средств в конце года, годовое начисление процентов; б) поступление средств в конце года, полугодовое начисление процентов; в) поступление средств в конце каждого полугодия равными суммами, годовое начисление процентов; г) поступление средств в конце каждого квартала равными суммами, полугодовое начисление процентов; д) поступление средств в конце каждого квартала равными суммами и ежеквартальное начисление процентов.

□ Воспользовавшись формулой (2.22) при $n = 7$, получим:

а) $m = p = 1 \Rightarrow S = \frac{12\cdot 10^3\cdot\left[(1+0{,}12)^7-1\right]}{0{,}12} \approx 121\,068$ (руб.);

б) $m = 2, p = 1 \Rightarrow S = \frac{12\cdot 10^3\cdot\left[(1+0{,}12/2)^{7\cdot 2}-1\right]}{(1+0{,}12/2)^2-1} \approx 122417{,}86$ (руб.);

в) $m = 1, p = 2 \Rightarrow S = \frac{12\cdot 10^3\cdot\left[(1+0{,}12)^7-1\right]}{2\cdot\left[(1+0{,}12)^{1/2}-1\right]} \approx 124597{,}31$ (руб.);

г) $m = 2, p = 4 \Rightarrow S = \frac{12\cdot 10^3\cdot\left[(1+0{,}12/2)^{7\cdot 2}-1\right]}{4\cdot\left[(1+0{,}12/2)^{1/2}-1\right]} \approx 127954{,}20$ (руб.);

д) $m = 4, p = 4 \Rightarrow S = \frac{12\cdot 10^3\cdot\left[(1+0{,}12/4)^{7\cdot 4}-1\right]}{0{,}12} \approx 128792{,}77$ (руб.). ■

Пример 2.26. За сколько лет можно накопить 150 000 у.е., если в конце каждого квартала на счет вносится 10 000 у.е. и на данные средства начисляются проценты в конце каждого полугодия по ставке 6% годовых? На сколько процентов нужно увеличить годовые выплаты, чтобы срок уменьшился на полгода?

□ Принимая во внимание первую формулу (2.26) и полагая в ней $m = 2,\ p = 4, S = 150\,000, i = 0{,}06,\ R/4 = 10\,000$, запишем

$$150\,000 = 10\,000 \cdot \frac{(1+0{,}06/2)^{2n}-1}{(1+0{,}06/2)^{1/2}-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}03^{2n} = 15\cdot\left(\sqrt{1{,}03}-1\right)+1;$$

$$n = \frac{\ln\left[15\cdot\left(\sqrt{1{,}03}-1\right)+1\right]}{2\cdot\ln 1{,}03} \approx 3{,}41.$$

Округляя найденное значение по смыслу задачи, получим $n = 3{,}5$, т.е. сумму в 150 000 у.е. по предложенной схеме начисления процентов можно накопить за 3,5 года.

Для ответа на второй вопрос задачи вычислим n = 3,5 – 0,5 = 3. Будем иметь

$$150\,000 = \frac{R^*}{4} \cdot \frac{(1 + 0{,}06/2)^{2\cdot 3} - 1}{(1 + 0{,}06/2)^{1/2} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^* = 600\,000 \cdot \frac{0{,}014889}{0{,}194053} \approx 46036{,}53 \text{ (у. е.)};$$

$$\frac{R^* - R}{R} \cdot 100\% = \frac{46036{,}53 - 40\,000}{40\,000} \cdot 100\% \approx 15{,}09\%\,.$$

Следовательно, чтобы срок накопления уменьшился на полгода, годовые выплаты следует увеличить на 15,1%. ■

Пример 2.27. Фонд создается в течение 10-ти лет, взносы поступают в конце каждого квартала равными суммами. На поступившие средства в конце года начисляются 7% годовых по схеме сложных процентов. На сколько процентов возрастет сумма в конце 10- го года при переходе к непрерывной капитализации процентов?

□ Найдем наращенную сумму S_1 при ежегодной капитализации по схеме сложных процентов, положив в первой формуле (2.26) $p = 4, n = 10$, считая ежегодные взносы равными R

$$S_1 = \frac{R}{4} \cdot \frac{1{,}07^{10} - 1}{1{,}07^{1/4} - 1} \approx 14{,}17R.$$

Определим теперь наращенную сумму S_2 при непрерывной капитализации. Используя первую формулу (2.31), будем иметь

$$S_2 = \frac{R}{4} \cdot \frac{e^{10\cdot 0{,}07} - 1}{e^{0{,}07/4} - 1} \approx 14{,}36R.$$

Отсюда подсчитаем изменение наращенной суммы при переходе к непрерывной капитализации процентов

$$\frac{S_2 - S_1}{S_1} \cdot 100\% = \frac{14{,}36R - 14{,}17R}{14{,}17R} \cdot 100\% \approx 1{,}34\%\,. \blacksquare$$

Пример 2.28. Вычислите приведенную и наращенную величины 8-летней 15%-ной непрерывной ренты постнумерандо с 12-кратным начислением процентов и рентным платежом $R = 150$ у.е.

□ По формулам (2.30) найдем

$$S = 150 \cdot \frac{(1 + 0{,}15/12)^{12 \cdot 8} - 1}{12 \ln(1 + 0{,}15/12)} = 150 \cdot \frac{2{,}296}{0{,}1491} \approx 2309{,}83 \text{ (у. е.)};$$

$$A = 150 \cdot \frac{1-(1+0{,}15/12)^{-12 \cdot 8}}{12 \ln(1+0{,}15/12)} = 150 \cdot \frac{0{,}6965}{0{,}1491} \approx 700{,}9 \text{ (у. е.)}. \blacksquare$$

Пример 2.29. Найдите приведенную и наращенную величины непрерывной 7-летней ренты с непрерывным начислением процентов и рентным платежом 300 у.е. при ставке 15% годовых.

□ Отправляясь от того, что для заданной ренты пренумерандо современная и наращенная величины совпадают с соответствующими характеристиками для ренты постнумерандо и, используя соотношения (2.32), получим

$$S = 300 \cdot \frac{e^{7 \cdot 0{,}15} - 1}{0{,}15} \approx 3715{,}30 \text{ (у. е.)};$$

$$A = 300 \cdot \frac{1-e^{-7 \cdot 0{,}15}}{0{,}15} \approx 1300{,}12 \text{ (у. е.)}. \blacksquare$$

Пример 2.30. Начало выплат годовой ренты со сроком 12 лет, процентной ставкой 11%, рентным платежом 16 000 руб. отложено на 4,5 года. Найдите современную величину отсроченной ренты.

□ По формуле (2.33) получим

$${}_{4,5}^{12}A = 16000 \cdot \frac{1-1{,}11^{-12}}{0{,}11} \cdot 1{,}11^{-4{,}5} \approx 64948{,}47 \text{ (руб.)} . \blacksquare$$

Пример 2.31. В течение 12-ти лет предполагается погасить долг в размере 1 млн у.е. платежами постнумерандо по 100 тыс. у.е. ежегодно. Первые пять выплат были сделаны согласно достигнутой договоренности. Затем было решено на три года отложить погашение задолженности и возобновить погашение равными выплатами постнумерандо. Каковы должны быть погасительные платежи во втором периоде, чтобы выплатить задолженность в установленный срок.

□ Воспользовавшись формулой (2.11) при $A = 10^6$, $R = 10^5$, $n = 12$, получим уравнение относительно процентной ставки i

$$10i = 1 - (1+i)^{-12}, 10(1+i) - 10 = 1 - (1+i)^{-12},$$
$$10(1+i)^{13} - 11(1+i)^{12} + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = 10x^{13} - 11x^{12} + 1 = 0.$$

Решим последнее с точностью до 0,01 «методом деления отрезка пополам» (см. примеры 1.65 и 1.66). Имеем:

$$f(1{,}029) = -0{,}00056 < 0,$$
$$f(1{,}03) = 0{,}02 > 0,\ f(1{,}0295) = 0{,}00043 > 0.$$

Следовательно, $x \approx 1{,}0292 \Rightarrow i = 0{,}0292$ (2,92%).

Вычислим современную величину первой части долга (пятилетнего аннуитета)

$$A_1 = R\frac{1-(1+i)^{-5}}{i} = 100\,000 \cdot \frac{1 - 1{,}0292^{-5}}{0{,}0292} \approx 459018{,}69.$$

Далее по формуле (2.31) найдем вторую часть долга (отложенный на срок $t = 3 + 5 = 8$ аннуитет со сроком $n = 12 - 8 = 4$, процентной ставкой 2,92% и неизвестным ежегодным платежом)

$$A_2 = R \cdot \frac{1 - 1{,}0292^{-4}}{0{,}0292} \cdot 1{,}0292^{-8} \approx 2{,}9583R.$$

Приравнивая теперь сумму современных величин двух выплат всей сумме долга, запишем уравнение относительно погасительного платежа во втором периоде:

$$A_1 + A_2 = 1\,000\,000 \Leftrightarrow 459018{,}69 + 2{,}9583R = 1\,000\,000,$$

из которого найдем

$$R = \frac{1\,000\,000 - 459018{,}69}{2{,}9583} \approx 182\,869 \text{ (у. е.)}. \blacksquare$$

2.5. Вечная рента. Эквивалентность и замена рент

Если равные платежи производятся раз в год неограниченное число лет, то такая рента называется *«вечной» годовой рентой.* Заметим, что наращенная величина такой ренты бесконечна: $S = \infty$. Найдем ее современную величину A, которая представляет собой бесконечный ряд платежей, дисконтированных к начальному моменту времени:

$$A = R \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} = \frac{R}{i} \ . \qquad (2.34)$$

Здесь была использована формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q(1-q)^{-1}$ $(0< q < 1 \, , q = (1+i)^{-1})$.

Заметим, что это же выражение можно было получить, перейдя в формуле (2.9) к пределу при $n \to \infty$:

$$A = \frac{R}{i} \cdot \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right] = \frac{R}{i} \ .$$

С этой точки зрения, соотношение (2.19) является асимптотически точным в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} i(n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{R}{A} - \frac{A}{n^2 R}\right) = \frac{R}{A} = i_\infty \ ,$$

где i_∞ – внутренняя норма доходности соответствующей бессрочной ренты, которую можно определить из (2.34).

Пример 2.32. Найдите выкупную цену бессрочной аренды, если ежегодная арендная плата составляет 100 тыс. руб., а годовая процентная ставка $r = 12{,}5\%$. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

□ По формуле (2.34) для «вечной» годовой ренты получим

$$A = \frac{100000}{0{,}125} = 800\,000 \text{ (руб.)}. \ ■$$

Пример 2.33. Фермеру предлагают продать находящийся в его владении участок земли, на котором он выращивает в среднем 600 т картофеля в год. Цена одного килограмма картофеля из года в год одна и та же – 0,3 долл. Банковский процент устойчиво держится на уровне 15% годовых. Ниже какой цены фермеру не имеет смысла продавать землю, если затраты на выращивание, сбор и реализацию картофеля оцениваются в 60 000 долл. в год?

□ Вычислим вначале, какова годовая стоимость выращенного фермером картофеля: $600\,000 \cdot 0{,}3 = 180\,000$ долл. Тогда его прибыль составит: $180\,000 - 60\,000 = 120\,000$ долл.в год. Воспользовавшись далее формулой «вечной» годовой ренты (2.34), подсчитаем доход фермера от реализации выращенного картофеля

$$A = \frac{12\,0000}{0{,}15} = 800\,000 \text{ долл.}$$

Следовательно, ниже 800 тыс. долларов фермеру невыгодно продавать землю. ■

Пример 2.34. Фонд учреждает стипендию в размере 24 тыс. руб. в год. Какую сумму для этого нужно внести в банк под 12% годовых? Для защиты от инфляции предусмотрен постоянный годовой рост стипендии на 7%. Какую сумму в этом случае нужно положить в банк под 12% годовых?

□ По формуле (2.34) для «вечной» годовой ренты получаем $A_1 = = 24\,000/0{,}12 = 200$ тыс. руб.

Если сумма платежа увеличивается ежегодно на $j\%$ $(j < i)$, то в этом случае формула приведенной стоимости бессрочной ренты примет вид

$$A = \frac{R}{1+i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^k = \frac{R}{1+i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1+j}{1+i}} = \frac{R}{i-j}\,. \qquad (2.35)$$

Тогда с учетом соотношения (2.33), будем иметь

$$A_2 = \frac{24000}{0{,}12-0{,}07} = 480\,000 \text{ (руб.)} \ ■$$

Пример 25. Вы прочитали рекламное объявление: «Платите нам 40 тыс. руб. в год в течение 10-ти лет, а потом мы будем платить вам по 40 тыс. руб. в год бесконечно». Если это стоящая сделка, то какова процентная ставка?

□ По первой формуле (2.11) и формуле (2.34) имеем

$$40\cdot\frac{(1+i)^{10}-1}{i} \le \frac{40}{i};\ (1+i)^{10} \le 2;\ 10\ln(1+i) \le \ln 2;$$

$$\ln(1+i) \le \ln 2^{0,1};$$

$$1+i \le 2^{0,1};\ i \le 2^{0,1} - 1 \approx 0{,}072\ (7{,}2\%).$$

Сделка стоящая, если годовая ставка не превышает 7,2%. ■

Рассмотрим ренты, платежи которых меняются во времени. В общем случае наращенную и приведенную величину таких рент можно вычислить только путем непосредственного суммирования. Рассмотрим два случая изменения платежей, для которых можно вывести формулы для вычисления приведенной и наращенной сумм, а также дадим эти формулы и рассмотрим пример.

1°. *Рента с постоянным абсолютным приростом платежей*:

$$R_{t+1} - R_t = \delta \ \Rightarrow \ \{R_t = R_1 + (t-1)\delta, t = 1, 2, \dots, n\};$$

$$S = \left(R_1 + \frac{\delta}{i}\right) \cdot s(n,i) - \frac{n\delta}{i}; \qquad A = \left(R_1 + \frac{\delta}{i}\right) \cdot a(n,i) - \frac{n\delta(1+i)^{-n}}{i}. \tag{2.36}$$

2°. *Рента с постоянным темпом роста платежей*:

$$\frac{R_{t+1}}{R_t} = q \ \Rightarrow \ \{R_t = R_1 \cdot q^{t-1}, t = 1, 2, \dots, n\};$$

$$S = R_1 \cdot \frac{(1+i)^n - (1+\varepsilon)^n}{i - \varepsilon}; \ \ A = R_1 \frac{1 - \left(\frac{1+\varepsilon}{1+i}\right)^n}{i - \varepsilon}; \tag{2.37}$$

где $\varepsilon = 1 - q$ – темп прироста.

Пример 2.36. За хорошую работу начальник предложил своей секретарше каждый год увеличивать ее заработную плату на 1000 долл. «С сегодняшнего дня в течение ближайшего года, – сказал он ей, – вы будете получать заработную плату из расчета 6000 долл. в год; в следующем году ваша заработная плата составит 7000 долл.; в последующем – 8000 долл. и т.д.». Однако секретарша предложила свой вариант: начиная с этого дня, выплачивать ей из расчета 6000 долл. в год. При этом в конце 6-го месяца ее годовая заработная плата должна увеличиться на 250 долл. и продолжать возрастать на 250 долл. через каждые 6 месяцев. Начальник согласился, однако один из сотрудников решил подсчитать, мудро ли поступил его шеф, приняв предложение своей служащей. А как считаете вы?

□ Согласно предложению секретарши, ее заработная плата в первом году — 6250 долл., во втором — 6750, затем – 7250 и т.д., а по варианту ее начальника – 6000, 7000, 8000. В n-м году превышение зарплаты по варианту по сравнению с вариантом секретарши составит величину $\Delta_n = 500n - 750$. Применим вторую формулу (2.36) для бессрочной ренты с платежом, равным Δ_n. Для этого положим $R_1 = -250, \delta = 500, n = \infty$. Откуда $Ai = (-250 + 500/i)$. При $i < 1$ величина $A > 0$. Следовательно, для начальника вариант секретарши экономичнее и, приняв его, он поступил мудро.

Эту задачу можно решить проще. Заменим полугодовую ренту с абсолютным приростом платежей, начиная со следующего года, на величину $\Delta = 250 \cdot (1 + i/2) + 250$.

Поскольку $i < 1, \Delta < 625 < 1000$, то получим тот же ответ. ■

В теме замены рент рассмотрим вопрос **консолидации рент**. Для консолидации (объединения) рент используется следующее правило эквивалентности: находятся современные величины консолидируемых рент-слагаемых, а затем подбирается консолидирующая рента с современной величиной равной сумме современных величин консолидируемых рент. В результате получаем уравнение, из которого находим требуемые параметры.

Пример 2.37. Найдите современную величину и ежегодный платеж 7-летней ренты-суммы для двух годовых рент: одна длительностью 3 года с годовым платежом 12 тыс. руб., а другая – 5 лет и 24 тыс. руб. Годовая ставка сложных процентов $i = 12\%$.

□ По формулам (2.12), (2.13) найдем современные величины рент-слагаемых

$$a(3; 0{,}12) = \frac{1}{0{,}12} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + 0{,}12))^3}\right) \approx 2{,}4018\,,$$

$$A_1 = 12000 \cdot a(3; 0{,}12) \approx 28822\ (\text{руб.}),$$

$$a(5; 0{,}12) = \frac{1}{0{,}12} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + 0{,}12))^5}\right) \approx 3{,}6048\,,$$

$$A_2 = 24000 \cdot a(5; 0{,}12) \approx 86515\ (\text{руб.}).$$

Значит, современная величина 7-летней ренты-суммы равна $A = A_1 + A_2 = 115\,337$ руб.

Ежегодный платеж ренты-суммы найдем из соотношения (2.13)

$$R = \frac{A}{a(7;0{,}12)} = \frac{115337}{4{,}5638} \approx 25272\ (\text{руб.})\ \blacksquare$$

Пример 2.38. Консолидируйте три ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 1000$, $n_1 = 3, i_1 = 10\%$; $R_2 = 1500$, $n_2 = 5$, $i_2 = 10\%$; $R_3 = 2000$, $n_3 = 7, i_3 = 10\%$ 4-летней рентой постнумерандо с годовой ставкой $i = 15\%$.

□ Воспользуемся равенством суммы приведенных величин трех данных рент и приведенной величины искомой ренты. Будем иметь

$$R_1 \frac{1-(1+i_1)^{-n_1}}{i_1} + R_2 \frac{1-(1+i_2)^{-n_2}}{i_2} +$$

$$+ R_3 \frac{1-(1+i_3)^{-n_3}}{i_3} = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i};$$

$$1000 \cdot \frac{1-1{,}1^{-3}}{0{,}1} + 1500 \cdot \frac{1-1{,}1^{-5}}{0{,}1} +$$

$$+ 2000 \cdot \frac{1-1{,}1^{-7}}{0{,}1} = R \frac{1-1{,}15^{-4}}{0{,}15};$$

$$R = \frac{1500 \cdot (1-1{,}1^{-3}) + 2250 \cdot (1-1{,}1^{-5}) + 3000 \cdot (1-1{,}1^{-7})}{1-1{,}15^{-4}}$$

$$\approx 6273{,}21\ .\ \blacksquare$$

Пример 2.39. Суммы в размере 10, 20 и 15 млн руб. должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их при использовании простой ставки одним платежом в размере 50 млн руб. Процентная ставка −10%. Определите: а) срок консолидации платежа; б) как изменится этот срок, если размер объединяющего платежа задан в сумме 45 млн руб.?

□ а) Так как наращенная на дату замыкающего платежа сумма

$$S = 10 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{50}{365}\right) + 20 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{80}{365}\right) +$$

$$+ 15 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{150}{365}\right) \approx 46{,}19 < 50,$$

то дата заменяющей выплаты $T > 150$. Пусть $T = 150 + x$. Для определения x имеем следующее условие финансовой эквивалентности.

$$10 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{100 + x}{365}\right) + 20 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{70 + x}{365}\right) +$$
$$+ 15 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{x}{365}\right) = 50.$$

Откуда $x \approx 352$, т.е. сумма в 50 млн. руб. должна быть выплачена через 502 дня.

б) По условию, новый платеж равен сумме прежних: $10 + 20 + 15 = 45$, поэтому его срок не может превосходить даты последнего платежа ($T < 150$). Естественно, что снятие его суммы (45 млн руб.) в момент T приведет на дату последней выплаты в точности к нулевому балансу

$$45 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{150 - T}{365}\right) =$$
$$= 10 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{100}{365}\right) + 20 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{70}{365}\right) + 15.$$

Откуда $T \approx 97$ дней.

Можно доказать, что при замене платежей их суммой дата заменяющего платежа не зависит от процентной ставки и равна взвешенному среднему исходных дат. Используя этот факт, получим тот же ответ:

$$T = \tfrac{10}{45} \cdot 50 + \tfrac{20}{45} \cdot 80 + \tfrac{15}{45} \cdot 150 \approx 97 \text{ (дней)} \blacksquare$$

Аналогично решается вопрос о *замене одной ренты на другую*: находится современная величина данной ренты, а затем подбирается рента с такой же современной величиной и нужными остальными параметрами.

Пример 2.40. Замените обычную (годовую) ренту с параметрами $R_1 = 200$, $n_1 = 5, i = 10\%$ p-срочной (квартальной) рентой с параметрами $R_2 = 100, i = 10\%$.

□ При помощи формулы (2.11), вычислим вначале приведенную величину годовой ренты

$$A_1 = R_1 \frac{1 - (1 + i)^{-n_1}}{i} = 200 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}1)^{-5}}{0{,}1} \approx 200 \cdot 3{,}79 = 758.$$

Чтобы найти длительность n_2 квартальной ренты, выразим ее приведенную величину A_2 через заданные величины R_2, i, p и искомую длительность n_2 по формуле (2.26).

$$A_2 = \frac{R_2}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n_2}}{(1+i)^{1/p}-1} = \frac{100}{4} \cdot \frac{1-(1+0,1)^{-n_2}}{(1+0,1)^{1/4}-1}.$$

Теперь найдем n_2 из равенства

$$A_2 = A_1, \quad \text{т.е.} \quad \frac{100}{4} \cdot \frac{1-(1+0,1)^{-n_2}}{(1+0,1)^{1/4}-1} = 758.$$

Откуда $1-(1+0,1)^{-n_2} = \frac{758(\sqrt[4]{1.1}-1)}{25}$.

Следовательно

$$1,1^{-n_2} = 1 - 30,32\left(\sqrt[4]{1.1}-1\right); n_2 = -\frac{ln\left(1-30,32(\sqrt[4]{1.1}-1)\right)}{ln 1.1} = 13,78. \blacksquare$$

Пример 2.41. Замените немедленную p −срочную ренту с параметрами $R = 1300, n = 6, p = 4$ отсроченной рентой с параметрами $R = 1500, n = 5$ и неизвестной отсрочкой t при годовой процентной ставке $i = 8\%$.

□ Запишем современные величины обеих рент

$$A_1 = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} = \frac{1300}{4} \cdot \frac{1-1,08^{-6}}{1,08^{0,25}-1} \approx 6187,15\,;$$

$$A_2^t = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-t} =$$

$$= 1500 \cdot \frac{1-1,08^{-5}}{0,08} \cdot 1,08^{-t} \approx 5989,07 \cdot 1,08^{-t}.$$

Приравнивая эти величины, находим t

$$5989,07 \cdot 1,08^{-t} = 6187,15 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 6187,15 - \ln 5989,07}{\ln 1,08} \approx 0,423. \blacksquare$$

Пример 2.42 (*пенсионная задача*). Женщина 40 лет открывает пенсионный счет, на который в конце каждого года вносит определенную сумму. На него начисляется $r_1 = 10\%$ годовых. По достижении пенсионного возраста (55 лет) она хочет получать 20 000 руб. в начале каждого месяца. Какую сумму в конце каждого года вносит женщина, если она доживет до средней продолжительности жизни 75 лет?

□ Для решения этой задачи необходимо приравнять наращенную сумму вкладов к моменту выхода на пенсию к приведенному к этой же дате потоку выплат, $\hat{S} = \hat{A}$.

Поток вкладов представляет из себя аннуитет со сроком $n = 55 - 40 = 15$, процентной ставкой $r_1 = 10\%$ и неизвестным рентным платежом R, который и требуется найти. Наращенная сумма этого потока вычисляется по формуле (2.15) и равна величине

$$S = R\frac{(1+i)^n-1}{i} = R\frac{1{,}1^{15}-1}{0{,}1} = 10R(1{,}1^{15} - 1).$$

Поток пенсионных выплат представляет из себя срочную месячную ренту пренумерандо с частотой выплат $p = 12$, сроком $n = 75 - 55 = 20$ и рентным платежом $R = 12 \cdot 20\,000 = 240\,000$. Приведенная величина этой ренты вычисляется по формуле (2.26) с учетом множителя $(1 + i)^{1/p}$, отличающего ренту пренумерандо, и равна

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{(1 + i)^{1/p} - 1}(1 + i)^{1/p} =$$

$$= 20000\frac{1-1{,}1^{-20}}{1{,}1^{1/12}-1}1{,}1^{1/12} = 2152320{,}28.$$

Приравнивая S и A, получаем $10R(1{,}1^{15} - 1) = 2152320{,}28$. Откуда

$$R = \frac{2152320{,}28}{10(1{,}1^{15}-1)} = 67741{,}65.\ ■$$

Пример 2.43. Какую сумму нужно положить в банк под 12% годовых мужчине 37 лет, чтобы по достижении им пенсионного возраста 60 лет в течение n =15 лет в начале каждого месяца снимать по 10 000 руб., если проценты капитализируются: а) в конце года; б) в конце каждого полугодия; в) в конце каждого квартала; г) в конце каждого месяца?

□ Обозначим через A искомую сумму. Тогда к пенсионному возрасту она нарастится до величины

$$\hat{S} = A \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{m}\right)^{23m}.$$

Последняя является приведенной суммой $\hat{A}$ ренты пренумерандо (пенсии) и вычисляется по формуле, аналогичной второй формуле (2.27), т.е.

$$A \cdot \left(1+\frac{0{,}12}{m}\right)^{23m} = \hat{A} = 10\,000 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}12}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{0{,}12}{m}\right)^{m/_{12}}-1} \cdot \left(1+\frac{0{,}12}{m}\right)^{m/_{12}}$$

$$A = \frac{10000}{\left(1+\frac{0{,}12}{m}\right)^{23m}} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}12}{m}\right)^{-15m}}{\left(1+\frac{0{,}12}{m}\right)^{m/_{12}}-1} \cdot \left(1+\frac{0{,}12}{m}\right)^{m/_{12}};$$

а) проценты начисляются раз в году ($m = 1$)

$$A = \frac{10\,000}{1{,}12^{23}} \cdot \frac{1-1{,}12^{-15}}{1{,}12^{1/12}-1} \cdot 1{,}12^{1/12} \approx 64159{,}28\ (\text{руб.});$$

б) проценты начисляются раз в полгода ($m = 2$)

$$A = \frac{10\,000}{1{,}06^{46}} \cdot \frac{1-1{,}06^{-30}}{1{,}06^{1/6}-1} \cdot 1{,}06^{1/6} \approx 58569{,}81\ (\text{руб.});$$

в) проценты начисляются раз в квартал ($m = 4$)

$$A = \frac{10000}{1{,}03^{92}} \cdot \frac{1-1{,}03^{-60}}{1{,}03^{1/3}-1} \cdot 1{,}03^{1/3} \approx 55816{,}84\ (\text{руб.});$$

г) проценты начисляются раз в месяц ($m = 12$)

$$A = \frac{10000}{1{,}01^{276}} \cdot \frac{1-1{,}01^{-180}}{0{,}01} \cdot 1{,}01 \approx 53463{,}67\ (\text{руб.}).$$

Заметим, что искомая сумма A является приведенной величиной отложенной ренты пренумерандо с месячным рентным платежом 10 000 руб., сроком n =15 лет, числом платежей в год $p = 12$, отсрочкой $t = 23$ года, процентной ставкой $r = 12\%$, начисляемых m раз в году. Отсюда, в соответствии с (2.25), (2.33) и учетом множителя наращения за $\frac{1}{p}$ часть года, запишем

$$A^t = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/p}-1} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/p} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mt}, \qquad (2.38)$$

что полностью согласуется с разрешающим уравнением задачи, приведенным выше. Здесь следует учесть, что под R в формуле (2.38) следует понимать годовой рентный платеж. ■

Пример 2.44. Задолженность в сумме 100 тыс. у.е. должна быть погашена за 9 лет равными выплатами в конце каждого месяца. На остаток долга начисляется 6% годовых. После четырех лет выплат клиент попросил в банке отсрочку на 3 года для погашения долга. За последние 2 года долг должен быть погашен равными поквартальными платежами. Чему равен размер поквартальных платежей, выплачиваемых в конце каждого квартала, если: а) в течение льготного периода процентные платежи не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга; б) в течение трехлетнего льготного периода выплачиваются только процентные платежи в конце каждого года?

□ Принимая в расчет вторую формулу (2.26) при $n = 9$, $p = 12, i = 0{,}06$, вычислим регулярный годовой рентный платеж R

$$100\,000 = \frac{R}{12} \cdot \frac{1 - 1{,}06^{-9}}{1{,}06^{1/12} - 1},$$

$$R = \frac{1200000 \cdot \left(1{,}06^{1/12} - 1\right)}{1 - 1{,}06^{-9}} \approx 14312{,}76\ (\text{у. е. }).$$

Используя его значение, по той же самой формуле найдем часть долга A^*, выплаченную за первые четыре года, и его остаток A

$$A^* = \frac{14312{,}76}{12} \cdot \frac{1 - 1{,}06^{-4}}{1{,}06^{1/12} - 1} \approx 50944{,}75\ (\text{у. е. }),$$

$$A = 100\,000 - 50944{,}75 = 49055{,}25\ (\text{у. е. });$$

а) наращенная сумма последнего к концу 7-го года составляет

$$A = 49055{,}25\ \cdot 1{,}06^7 \approx 73760{,}96\ (\text{у. е. })$$

и является современной величиной для последней двухлетней квартальной ренты. Полагая во втором соотношении (2.26) $n = 2, p = 4, i = 0{,}06$, получаем уравнение относительно годового платежа R этой ренты

$$73760{,}96 = \frac{R}{4} \cdot \frac{1 - 1{,}06^{-2}}{1{,}06^{1/4} - 1},$$

$$R = \frac{4 \cdot 73760{,}96 \cdot \left(1{,}06^{1/4} - 1\right)}{1 - 1{,}06^{-2}} \approx 39357{,}16\ (\text{у. е.}).$$

В этом случае квартальный платеж составляет $R/4 = 9839{,}29$ (у. е.);

б) так как за последние три года рентные платежи выплачиваются, то наращенная величина остатка долга к концу 7-го года равна наращенной величине остатка к концу 4-го года, т.е.

$$A = 49055{,}25 \cdot 1{,}06^4 \approx 61931{,}12\ (\text{у. е.}).$$

Отсюда следует уравнение относительно годового платежа этой ренты

$$61931{,}12 = \frac{R}{4} \cdot \frac{1 - 1{,}06^{-2}}{1{,}06^{1/4} - 1},$$

$$R = \frac{4 \cdot 61931{,}12 \cdot \left(1{,}06^{1/4} - 1\right)}{1 - 1{,}06^{-2}} \approx 33045{,}03\ (\text{у. е.}).$$

Квартальный платеж равен $R/4 = 8261{,}26$ (у. е.). ■

Задачи

2.1. Приведите финансовый поток

$$CF = \{(600\,;0), (250\,;1), (350\,;2), (600\,;3)\}$$

к моменту времени $t = 3$ при ставке 9%.

2.2. Пусть процентная ставка потока платежей

$$C = \{(-2500\,;0), (2000\,;2), (3000\,;4)\}$$

составляет 10%. Найдите приведенную стоимость и наращенную величину этого потока.

2.3. Вычислите средний срок финансового потока

$$CF = \{(100\,;0), (200\,;1), (400\,;2), (100\,;3)\}.$$

2.4. Найдите внутреннюю норму доходности IRR потока платежей $CF = \{(-7200\,;0), (1000\,;1), (10000\,;2)\}$.

2.5. На ближайшие 3 года сумма обязательств Арсения перед Дмитрием составляет 400 млн у.е., которые ему разрешается погасить не более чем за 3 раза. Согласно договоренности, платежи могут производиться только в конце года, и последняя выплата втрое превышает первую. Годовая ставка доходности от взятых взаймы денег равна 10%. Арсений пытается найти наиболее выгодный для себя вариант предстоящих ему перечислений. Найти эту оптимальную последовательность выплат.

2.6. Какую сумму должен отец вложить сегодня на накопительный вклад при ставке 8% годовых, чтобы обеспечить сыну ежегодные выплаты в начале каждого учебного года в размере 1000 у.е. в течение четырех лет обучения в колледже?

2.7. Участок сдан в аренду на 10 лет. Арендная плата будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо (выплаты в конце периода) на следующих условиях: первые 6 лет по — 10 млн руб., а в оставшиеся 4 года – по 11 млн руб. Оцените приведенную стоимость этого договора, если процентная ставка, используемая аналитиком, равна 15%.

2.8. Предполагается, что станок будет служить 3 года, принося ежегодный доход в 2000 долл. Его остаточная стоимость к концу 3-го года составит 6000 долл. В качестве альтернативы потенциальный покупатель станка рассматривает вложение денег на депозит под ставку 8% годовых. Определите верхний предел цены для покупателя станка, считая, что в конце срока эксплуатации станок будет продан по его остаточной стоимости.

2.9. Платежи, поступающие в конце каждого квартала на протяжении 2-х лет, образуют регулярный по времени поток, первый член которого равен 500 тыс. руб.; последующие платежи увеличиваются каждый раз на 25 тыс. руб. Начисление процентов производится раз в год по ставке 6%. Найдите наращенную и современную стоимости такой ренты.

2.10. В ходе судебного заседания выяснилось, что г-н Плюшкин недоплачивал налогов 100 руб. ежемесячно. Налоговая инспекция собирается взыскать налоги, недоплаченные за последние 2 года, вместе с процентами (5% ежемесячно). Какую сумму должен заплатить г-н Плюшкин?

2.11. На сколько процентов изменятся современная и наращенная величины пятилетней годовой ренты постнумерандо при уменьшении годовой процентной ставки с 10% до 9%?

2.12. На сколько процентов изменятся современная и наращенная величины пятилетней годовой ренты постнумерандо с процентной ставкой 10% годовых при увеличении срока ренты с пяти лет до шести?

2.13. Во сколько раз увеличится приведенная величина ренты постнумерандо, если платежи будут поступать в начале периода при годовой процентной ставке 20%?

2.14. Определите годовую ставку сложных процентов, если наращенная величина месячной ренты постнумерандо увеличится в 1,0234 раза при начислении платежей в начале периода.

2.15. Заем величиной 12 000, взятый на 6 лет под 9,0% годовых, погашается ежегодными равными выплатами. Найдите размер выплат.

2.16. Студент получил кредит на пятилетнее обучение в вузе в размере 10 000 долл. под 2% годовых. Он обязуется выплачивать 16% от годовой зарплаты 10 000 долл. Через сколько лет после окончания вуза он выплатит кредит?

2.17. Лена следует тенденциям моды, поэтому покупает себе каждый сезон новую сумку. Ее мама любит классику и предпочитает дорогие кожаные сумки, которые носит в среднем в течение 4-х лет. На новый год папа дал жене и дочери по 200 долл. на обновки. Определите: а) на сколько сезонов хватит Лене этих денег, если она будет каждый год приобретать по сумке стоимостью 50 долл., а остаток хранить на банковском счете с годовой процентной ставкой 12,6%; б) по какой максимальной цене может покупать сумки Лена, чтобы они с мамой «износили» свои сумки в одно и то же время.

2.18. Господин Копейкин проработал в фирме «Карманов и K^O» 10 лет. При выходе на пенсию руководство фирмы предложило ему вознаграждение в размере 15 000 долл., на что господин Копейкин высказал пожелание заменить ему это разовое поощрение ежемесячными выплатами по 150 долл. в течение 10-ти лет. Какой вариант выгоднее для господина Копейкина, а какой — для фирмы при следующих возможностях начисления процентов на рентные платежи: для Копейкина – пенсионный вклад с начислением процентов раз в году по ставке 6%, для фирмы — ежеквартально под ставку 10% годовых?

2.19. Каждое полугодие страховая компания принимает взнос 250 тыс. руб. в течение 3-х лет. Чему равна сумма, полученная страховой компанией по истечении срока договора, если обслуживающий компанию банк начисляет проценты из расчета 15% годовых: а) по полугодиям; б) ежеквартально?

2.20. Инвестор ежегодно вносит в банк на пополняемый счет 30 тыс. руб. Банк платит 10% годовых по ставке сложного процента. Какова будет сумма вклада через 5 лет, если инвестор вносит очередной вклад: а) в конце года; б) в начале года; в) в середине года?

2.21. Фонд создается в течение 12 лет с ежегодными взносами 120000 у.е. в конце года. На поступившие средства начисляется 4% годовых, если сумма не превышает 250 000 у.е. и 4,5% годовых, если сумма превышает 250 000 у.е. Чему будет равна величина фонда через 12 лет?

2.22. Пятилетний кредит в 600 тыс. руб., взятый под 10% годовых, погашается выплатами в конце каждого месяца. Найдите сумму, которую нужно платить каждый месяц по контракту.

2.23. Определите доходность инвестиций, выраженную в виде годовой ставки сложного процента, если первоначальное вложение составляет 3 млн руб., а ежегодные доходы (в конце каждого года) равны 300 тыс. руб. Период вложения $n = 13$ лет.

2.24. Приведенная величина 12-летней ренты пренумерандо с непрерывным начислением процентов, процентной ставкой 5% равна 27 000 руб. Найдите наращенную сумму.

2.25. Наращенная сумма 5-летней ренты постнумерандо с ежеквартальным начислением процентов, процентной ставкой 4,25% равна 50 000 руб. Найдите ее приведенную величину.

2.26. Для создания премиального фонда один раз в год производятся взносы в размере 15 000 руб. На вносимые средства начисляются проценты по ставке 12% годовых. Определите размер фонда через $n = 7$ лет в следующих ситуациях: а) поступление средств в конце года, ежеквартальное начисление процентов; б) поступление средств в конце квартала, начисление процентов 6 раз в году; в) ежемесячное поступление средств и ежеквартальное начисление процентов.

2.27. Фонд создается в течение 10-ти лет. Взносы поступают в фонд в конце года равными суммами. На собранные средства в конце года начисляются 10% годовых. На сколько процентов возрастет наращенная сумма фонда при переходе: а) к взносам в конце каждого квартала; б) к ежемесячному начислению процентов? Ответ приведите с точностью до 0,01%.

2.28. Начало выплат квартальной ренты со сроком 7 лет, процентной ставкой 8,5% годовых, рентным платежом 24 000 руб. отложено на 3 года. Найдите современную величину отсроченной ренты.

2.29. В течение 7-ми лет предполагается погасить долг в размере 400 000 у.е. равными выплатами в конце каждого года. На остаток долга начисляется 6% годовых. В каком случае годовые расходы на обслуживание долга возрастут больше и на сколько, если: а) будет предоставлена годовая отсрочка, проценты за этот период присоединяются к сумме долга; б) ставка годовых процентов возрастет на 0,25%?

2.30. Замените годовую ренту с параметрами $R_1 = 2$; $n_1 = 2$; $r = 20\%$ на p-срочную (месячную) ренту с $n_2 = 4$; $r = 20\%$.

2.31. Замените единовременный платеж 345 тыс. руб. в момент времени $t = 2$ p-срочной рентой постнумерандо с параметрами R_1; $n_1 = 5$; $p = 6$. Процентная ставка постоянна и равна 15%.

2.32. По вине пенсионного фонда семье в течение 3-х лет не доплачивали 625 руб. ежемесячно. Какую сумму должен выплатить фонд вместе с процентами (10% годовых)?

2.33. Какую сумму нужно положить в банк под 8% годовых женщине 42 лет, чтобы по достижению пенсионного возраста 55 лет в течение 25-ти лет в начале каждого месяца снимать по 15 000 руб., если проценты капитализируются: а) в конце года; б) в конце каждого полугодия; в) в конце каждого квартала; г) в конце каждого месяца?

2.34. Для того чтобы обеспечить себе дополнительный пенсионный доход, 50-летний г-н хочет воспользоваться услугами накопительной пенсионной системы. Какую сумму денег он должен внести на индивидуальный лицевой счет пенсионного фонда, чтобы после выхода на пенсию иметь в течение всей оставшейся жизни прибавку за счет накопительной части пенсии суммой 24 тыс. руб. ежегодно? Ставка начисления – 12% годовых.

2.35. Долг 100 тыс. у.е. должен быть погашен в течение 10-ти лет равными платежами в конце каждого года. На остаток долга начисляются 7% годовых. После 5-ти лет выплат должник решил гасить задолженность равными выплатами в конце каждого полугодия. Явившись в банк в конце 9-го года, должник решил погасить задолженность разовым платежом. Какую сумму он при этом заплатит?

2.36. Найдите выкупную цену бессрочной аренды, если ежегодная арендная плата составляет 120 тыс. руб., а годовая процентная ставка $r = 12\%$.

2.37. Бессрочный аннуитет состоит из равных по величине платежей R, которые следуют с периодичностью в k лет. Сложные проценты по ставке i начисляются раз в году. Первая выплата производится в начале первого года. Найдите текущую стоимость (современную величину) аннуитета.

Ответы и рекомендации к решению

2.1. 2055,54. **2.2.** 1201,93; 1759,75.

2.3. $\bar{t} = \sum_{k=1}^{n} t_k P_k \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)^{-1} = 1{,}625.$

2.4. 25%. **2.5.** {100; 0; 300} 4).

2.6. $A_2 = 1000 \cdot a(4; 0{,}08) \cdot 1{,}08 = 3312{,}13$ (у. е.).

2.7. Сумма двух аннуитетов: с платежом 10 в течение 10-ти лет и начиная с 7-го года по 11 в течение 4-х лет;
$A = 10 \cdot a(6; 0{,}15) + \ 11 \cdot a(4; 0{,}15) \cdot (1 + 0{,}15)^{-6} \approx$
$\approx 51421972{,}19$ руб.

2.8. Верхний предел цены P должен совпадать с ценой станка, уравнивающей выгодность рассматриваемых альтернатив, т.е. являться современным эквивалентом потока доходов $CF = \{(2000; 1), (2000; 2), (2000 + 6000; 3)\}$ при ставке 8%.

Отсюда, в соответствии с формулами (2.2), (2.9)–(2.11), получим $P = 2000 \cdot a(3; 0{,}08) + 6000 \cdot 1{,}08^{-3} \approx 9917{,}19$ долл.

2.9. $S = 500 \cdot 1{,}06^{2-1/4} + 525 \cdot 1{,}06^{2-1/2} + \cdots + 500 + 25 \cdot (8-1) =$ $= 4923390{,}9$ тыс. руб.; $A = S \cdot 1{,}06^{-2} = 4381800{,}37$ руб.

2.10. $S = 100 \cdot \frac{1{,}05^{24}-1}{0{,}6} \approx 4450{,}2$ руб.

2.11. Соответственно увеличится на 2,61% и уменьшится на 1,97%.

2.12. Увеличатся соответственно на 14,89% и на 26,38%.

2.13. Увеличится в 1,2 раза. **2.14.** 31,99%. **2.15.** 2675,04.

2.16. $n \approx 7{,}5$ лет.

2.17. а) $200 \cdot 1{,}126^n = 50 \cdot (1{,}126^n - 1)/0{,}126$; $n = [5{,}908596] = 5$; б) $200 \cdot 1{,}126^4 = R \cdot (1{,}126^4 - 1)/0{,}126$, $R \approx 66{,}68$ долл.

2.18. Для пенсионера поток ежемесячных выплат по 150 долл. имеет современную величину 13 608 долл., а для фирмы – 11 390 долл. Отсюда понятно, что предлагаемый г-ном Копейкиным вариант выгоден для фирмы и невыгоден для него.

2.19. а) $S \approx 1811005{,}09$ тыс. руб.; б) $S \approx 1817437{,}49$ тыс. руб.

2.20. а) 183,153 тыс. руб.; б) 201,468 тыс. руб.; в) 192, 092 тыс. руб.

2.21. $S \approx 1852933{,}06$ у.е. **2.22.** $R \approx 12621{,}35$ руб.

2.23. $i \approx 0{,}07$ (7%) с точностью до 1%. **2.24.** 49197,21 руб.

2.25. 40473,36 руб.

2.26. а) 153924,77 руб.; б) 161351,47 руб.; в) 162590,29 руб.

2.27. а) 3,68%; б) 2,29%.

2.28. $A = \frac{R}{p}\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}(1+i)^{-m} = \frac{R}{p}\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}(1+i)^{-m} =$

$$= \frac{2400}{4}\frac{1-1{,}085^{-7}}{1{,}085^{1/4}-1}1{,}085^{-3} = 99189{,}32 \text{ руб.}$$

2.29. а) $R = 86225{,}75$ у.е. б) $R = 72292$ у. е. Годовые расходы в первом случае вырастут на 13933,75 у.е. больше, чем во втором.

2.30. $R_2 = 1{,}0842$. **2.31.** $R_1 = 73360{,}95$ руб. **2.32.** 25943,24 руб.

2.33. а) 790627,42 руб.; б) 766734,66 руб.; в) 754636,77 руб.; г) 693898,07 руб.

2.34. 621169,64 руб. **235**. 13306,29 у. е. **2.36.** 1 млн руб.

2.37. $A = R \cdot [1-(1+i)^{-k}]^{-1} = R(1+i)^k \cdot [(1+i)^k - 1]^{-1}$.

Глава 3
ОБЛИГАЦИИ

Одним из долговых обязательств является облигация. Облигация является важнейшим финансовым инструментом, рынок облигаций самый крупный по капиталовложениям сегмент финансового рынка. Облигация – это ценная бумага, удостоверяющая право ее держателю на получение определенного дохода в определенные сроки. Имеется два основных типа облигаций. Облигации первого типа предполагают получение определенной денежной суммы в определенный срок и называются бескупонными, они практически ничем не отличаются от векселя (долговой расписки). Основной же тип облигаций предполагает регулярную выплату процентных денег в виде так называемых купонных платежей. Именно купонные облигации имеют наибольшее распространение, и в основном им посвящена данная глава.

3.1. Основные понятия и определения

Облигация является потоком платежей, т.е. совокупностью финансовых событий, характеризующихся величинами денежных платежей и моментами времени исполнения этих платежей. Основываясь на этом приведем основные характеристики облигации, которые как правило указываются на самой облигации.

Номинальная стоимость облигации *N*. Это сумма денег, выплачиваемая владельцу облигации в определенный момент времени – дату погашения облигации. Номинальную стоимость облигации иногда называют просто номиналом.

Дата погашения облигации T. Это обычная календарная дата (число, месяц и год), в момент достижения которой владелец имеет право получения номинальной стоимости облигации.

Срок до погашения облигации n. Этот срок равен числу лет от момента покупки облигации до момента ее погашения. При анализе облигации сначала рассмотрим основной случай, когда срок до погашения n является целым числом.

Купонный доход C. Это постоянные платежи, которые выплачиваются владельцу облигации в течение каждого периода. Рассмотрим случай, когда период равен году и купонные платежи выплачиваются в конце периода.

Купонная ставка c. Это процентная ставка, с помощью которой рассчитывается купонный платеж по формуле $C = cN$. Далее купонный платеж будем означать как cN.

Процентная ставка r. Это банковская ставка, с помощью которой все платежи по облигации приводятся к одинокому (как правило, современному) моменту времени.

Приведем основные характеристики потока платежей, который представляет облигация.

3.2. Текущая стоимость облигации

Как и для каждого потока платежей наиболее важной характеристикой облигации является приведенная стоимость, которая называется текущей стоимостью облигации и обозначается буквой P. Для того, чтобы вычислить эту стоимость приведем все платежи (номинальную стоимость и купонные платежи) к начальному моменту времени (сроку приобретения облигации).

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{cN}{(1+r)^k} + \frac{N}{(1+r)^n} \ . \tag{3.1}$$

Первое слагаемое $\sum_{k=1}^{n} \frac{cN}{(1+r)^k}$ вычисляет приведенную стоимость всех купонных платежей, а второе слагаемое $\frac{N}{(1+r)^n}$ вычисляет современную величину номинальной стоимости облигации, выплачиваемой при ее погашении. Купонные платежи образуют обыкновенную ренту постнумерандо с рентным платежом cN, процентной ставкой r и сроком n и, поэтому, образуют геометрическую прогрессию, сумма которой вычисляется по формуле (2.11) и равна $c \cdot N \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$. Таким образом, формулу (3.1) можно переписать в виде

$$P = c \cdot N \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} \; . \tag{3.2}$$

Пример 3.1. Найти текущую стоимость облигации, если ее номинальная стоимость составляет 1000 у.е., срок до погашения 6 лет, а купонные платежи выплачиваются в конце каждого года по годовой купонной ставке 12%. Банковская процентная ставка равна 10%.

Решение. Подставим в формулу (3.2) данные в задаче величины номинала $N = 1000$, срока погашения $n = 6$, купонной ставки $c = 0{,}12$ и процентной ставки $r = 0{,}1$. В итоге, используя инженерный калькулятор, получим

$$P = c \cdot N \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} =$$
$$= 0{,}12 \cdot 1000 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-6}}{0{,}1} + 1000 \cdot 1{,}1^{-6} = 1087{,}11. \blacksquare$$

Следует заметить, что если купонная ставка выше процентной ставки, $c > r$, то текущая стоимость облигации выше ее номинальной стоимости, $P > N$.

Если купонная ставка ниже процентной ставки, то текущая стоимость облигации ниже ее номинальной стоимости.

Если же купонная ставка облигации равна банковской процентной ставке, то текущая стоимость и номинальная стоимость облигации равны друг другу.

Действительно, первое слагаемое $c \cdot N \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ в правой части формулы (3.1), выражающее приведенную величину потока купонных платежей, возрастает с ростом купонной ставки c, а второе слагаемое $N(1+r)^{-n}$, выражающее современную величину номинальной стоимости облигации, остается неизменным при изменении купонной ставки c. При равенстве купонной ставки процентной ставке, подставляя в формулу (3.2) $c = r$, получим

$$P = c \cdot N\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} = r\,N\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} =$$
$$= N \cdot (1-(1+r)^{-n}) + N(1+r)^{-n} =$$
$$= N - N(1+r)^{-n} + N(1+r)^{-n} = N.$$

Это доказывает, что при $c = r\ P = N$, при $c > r\ P > N$, а при $c < r\,P < N$. ■

Пример 3.2. Номинальная цена 12-процентной облигации за 3 года до погашения равна 1500 руб. Найти текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 10%, б) 14%, в) 12%.

Решение. Найдем текущую стоимость облигации по формуле (3.2)

$$P = c \cdot N\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n}.$$

а) $P = 0{,}12 \cdot 1500 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-3}}{0{,}1} + 1500 \cdot (1+0{,}1)^{-3} = 1574{,}61$ руб.

б) $P = 0{,}12 \cdot 1500 \cdot \frac{1-(1+0{,}14)^{-3}}{0{,}14} + 1500 \cdot (1+0{,}14)^{-3} = 1430{,}35$ руб.

в) $P = 0{,}12 \cdot 1500 \cdot \frac{1-(1+0{,}12)^{-3}}{0{,}12} + 1500 \cdot (1+0{,}2)^{-3} = 1500$ руб.

Итак, мы видим, что при ставке рефинансирования 10% меньшей купонной ставке 12% текущая стоимость облигации равная 1574,61 руб. больше номинальной равной 1500 руб. При ставке рефинансирования $r = 14\%$ большей купонной ставки $c = 12\%$ текущая стоимость облигации 1430,35 руб. меньше номинальной стоимости 1500 руб. При ставке рефинансирования 12% равной купонной ставке 12% текущая стоимость облигации $P = 1500$ руб. равна номинальной стоимости $N = 1500$ руб. ■

Рассмотрим случай, когда купонные платежи поступают p раз за период. В этом случае приведенная величина потока всех платежей облигации вычисляется по формуле

$$P = \sum_{k=1}^{pn} \frac{\frac{cN}{p}}{(1+r)^{k/p}} + \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Первое слагаемое представляет собой сумму pn членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{\frac{cN}{p}}{(1+r)^{1/p}}$ и знаменателем $q=\frac{1}{(1+r)^{1/p}}$. Используя формулу суммы pn членов геометрической прогрессии $S_{pn}=b_1\frac{1-q^{pn}}{1-q}$, получим $P=\frac{\frac{cN}{p}}{(1+r)^{1/p}}\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{1-\frac{1}{(1+r)^{1/p}}}+\frac{N}{(1+r)^n}$. Перемножая знаменатели первой и второй дроби, получаем окончательную формулу вычисления текущей стоимости – кратной облигации

$$P=\frac{cN}{p}\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{(1+r)^{1/p}-1}+N\cdot(1+r)^{-n}\,.$$

Ввиду того, что при начислении процентов k раз в год эффективная годовая ставка процентов $r_{эфф}$ обладает свойством $1+r_{эфф}=\left(1+\frac{r}{k}\right)^k$, где r – номинальная годовая процентная ставка, формула текущей стоимости -кратной облигации при k-кратоном начислении процентов имеет вид

$$P=\frac{cN}{p}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kn}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k/p}-1}+N\cdot\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kn}\,.$$

3.3. Рыночная цена и текущая доходность

Держатель облигации может дожидаться даты погашения и в качестве процентов получать регулярно купонные платежи, а может в любой момент времени продать облигацию. Как и любая ценная бумага облигация имеет свою рыночную стоимость V, зависящую от привлекательности различных своих характеристик и доверия к эмитенту, а также от ситуации на рынке.

С понятием рыночной номинальной стоимости облигации тесно связан *курс облигации. К.* Курс облигации равен отношению рыночной стоимости к номинальной стоимости, $K=\frac{N}{N}$. Курс облигации часто выражается в процентах. В этом случае он равен

$$K=\frac{V}{N}\cdot 100\,. \qquad (3.3)$$

Пример 3.3. Рыночная цена15-процентной облигации номиналом 8000 руб. за 3 года до погашения равна 7800 руб. Найдите текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 12%, б) 15%, в) 18% и ее курс.

Решение. Найдем текущую стоимость облигации по формуле

$$P = c \cdot N \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n},$$

подставив $c = 0{,}15$, $N = 8000$, $n = 3$, $r = 0{,}12;\ 0{,}15;\ 0{,}18$.

а) $P = 0{,}15 \cdot 8000 \cdot \frac{1-(1+0{,}12)^{-3}}{0{,}12} + 8000 \cdot (1+0{,}12)^{-3} =$

$= 8576{,}44$ руб.

б) $P = 0{,}15 \cdot 8000 \cdot \frac{1-(1+0{,}15)^{-3}}{0{,}15} + 8000 \cdot (1+0{,}15)^{-3} =$

$= 8000$ руб.

в) $P = 0{,}15 \cdot 8000 \cdot \frac{1-(1+0{,}18)^{-3}}{0{,}18} + 8000 \cdot (1+0{,}18)^{-3} =$

$= 7748{,}17$ руб.

Курс облигации во всех трех случаях определяется отношением рыночной цены облигации V к номиналу и равен

$$K = \frac{V}{N} \cdot 100 = \frac{7800}{8000} \cdot 100 = 97{,}5\%.$$

Пример 3.4. Рыночная цена облигации составляет 4000 руб., номинальная стоимость равна 2500 руб., срок до погашения – 5 лет, купонные ежегодные платежи – 700 руб., доходность – 10%. Стоит ли продать облигацию и почему?

Решение. Для того, чтобы оценить выгодность продажи облигации, необходимо найти ее текущую стоимость. Воспользуемся формулой

$$P = c \cdot N \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n},$$

подставив $c \cdot N = 700$, $N = 2500$, $n = 5$, $r = 0{,}1$, получим

$$P = 700 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} + 2500 \cdot 1{,}1^{-5} = 4205{,}85.$$

Как видим, текущая стоимость облигации выше, чем ее рыночная цена, Поэтому, облигацию продавать не стоит. ■

С рыночной ценой облигации связана еще одна очень важная величина, выражающая те проценты от вложенных в покупку облигации средств, которые покупатель облигации будет получать регулярно. Эта величина называется **текущей доходностью облигации $\boldsymbol{i}$.** Она равна отношению купонного платежа к рыночной цене облигации и вычисляется по формуле

$$i = \frac{cN}{V} \text{ или в процентах } i = \frac{cN}{V} \cdot 100. \qquad (3.4)$$

Пример 3.5. Три облигации с одинаковой номинальной стоимостью 2000 руб., купонной ставкой 9% и сроком до погашения 5 лет имеют различные текущие доходности к моменту погашения – 10%, 11% и 12%. Как будут отличаться рыночные цены облигаций? Найдите их.

Решение. Подставив в уравнение $i = \frac{cN}{V} \cdot 100$ значения $c = 0{,}09$, $N = 2000$, получим $i = \frac{0{,}09 \cdot 2000}{V} \cdot 100$ при указанных значениях доходности к погашению следующие равенства, из которых найдем значения рыночной стоимости V.

$10 = \frac{0{,}09 \cdot 1000}{V} \cdot 100.$ Откуда $V = \frac{0{,}09 \cdot 2000 \cdot 100}{10} = 1800.$

$11 = \frac{0{,}09 \cdot 1000}{V} \cdot 100.$ Откуда $V = \frac{0{,}09 \cdot 2000 \cdot 100}{11} = 1636{,}36.$

$12 = \frac{0{,}09 \cdot 1000}{V} \cdot 100.$ Откуда $V = \frac{0{,}09 \cdot 2000 \cdot 100}{12} = 1500.$

Как видим, повышение текущей доходности требует значительного понижения рыночной цены.

3.4. Доходность к погашению

Текущая доходность к погашению учитывает только ставку рефинансирования и номинальную стоимость облигации, но не учитывает ситуацию на рынке. Покупая облигацию на рынке, мы должны знать процент дохода, который принесет нам эта покупка. Причем, этот процент как правило не совпадает со ставкой рефинансирования. Соответствующим показателем является доходность к погашению ρ. Эта величина служит заменой процентной ставки r в ситуации, когда текущая доходность P не совпадает с рыночной стоимостью V.

Если известны рыночная цена облигации V, ее номинальная стоимость N, срок до погашения n и купонная ставка c, то доходность к погашению определяется как решение уравнения

$$V = \sum_{k=1}^{n} \frac{cN}{(1+\rho)^k} + \frac{N}{(1+\rho)^n} \ . \tag{3.5}$$

Суммируя первое слагаемое как сумму геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{cN}{1+\rho}$ и знаменателем $q = \frac{1}{1+\rho}$ по аналогии с выводом (3.2) и (2.11) получим эквивалентное уравнение

$$V = c \cdot N \frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} \, . \tag{3.6}$$

Поделив обе части уравнения (3.6) на N получим

$$K = c \cdot \frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + (1+\rho)^{-n} \, . \tag{3.7}$$

Это уравнение является уравнением высокой степени и не может быть решено с помощью формул, однако можно найти решение ρ приближенно с любой степенью точности. Кроме того, существуют приближенные формулы для вычисления ρ.

При небольших значениях n ($n \le 10$) хорошее приближение дает формула

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)} \ . \tag{3.8}$$

При $n > 10$ лучше применять формулу

$$\rho \approx \frac{c}{K} \cdot \frac{n^2-K^2}{n^2-K} \, .$$

По аналогии с анализом текущей доходности легко доказать следующие утверждения.

Падение рыночной цены облигации влечет увеличение ставки доходности к погашению.

Если рыночная стоимость облигации выше ее номинальной стоимости, $V > N$, то доходность к погашению ниже купонной ставки, $\rho < c$.

Если рыночная стоимость облигации ниже ее номинальной стоимости, $V < N$, то доходность к погашению выше купонной ставки, $\rho > c$.

Если рыночная стоимость облигации ее номинальной стоимости, $V = N$, то доходность к погашению равна купонной ставке, $\rho = c$.

Пример 3.6. Найти доходность к погашению следующей облигации. Период обращения $n = 10$ лет, номинальная стоимость $N = 1000$ у.е., ежегодные купонные выплаты $cN = 50$, рыночная цена $V = 900$ у.е.

Решение. Подставим в уравнение (3.7) параметры облигации и решим относительно ρ.

Имеем $\frac{900}{1000} = \frac{50}{1000} \cdot \frac{1-(1+\rho)^{-10}}{\rho} + (1+\rho)^{-10}$;

$$0{,}05 \cdot \frac{1-(1+\rho)^{-10}}{\rho} + (1+\rho)^{-10} - 0{,}9 = 0\,.$$

Решим это уравнение методом последовательных приближений. В качестве первого приближения возьмем $\rho = 0{,}07$, тогда правая часть равна $-0{,}041$. При $\rho = 0{,}06$ правая часть равна 0,026. Так как вычисленные значения имеют разные знаки, то в качестве решения уравнения, с точностью до 0,005, можно взять среднее значение $\rho \approx 0{,}065$ или 6,5%. ■

Последний пример можно также решить, используя приближенную формулу (3.8). Подставив параметры облигации, получим $\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)} = \frac{2(0{,}05\cdot10+1-0{,}9)}{0{,}9-1+10(1=0{,}9)} = 0{,}0635$ или 6,35%. Небольшое расхождение связано как с неточностью решения уравнения (3.7) так и с неточностью приближенной формулы (3.7).

Формула (3.8) вычисления доходности к погашению дает хорошее приближение при небольших значениях n ($n \leq 10$). При больших значениях n ($n > 10$) лучшее приближение дает следующая формула

$$\rho \approx \frac{c}{K} \cdot \frac{n^2 - K^2}{n^2 - K}\,.$$

Применив эту формулу к предыдущему примеру, получим $\rho \approx \frac{0{,}05}{0{,}9} \cdot \frac{100-0{,}81}{100-0{,}9} = 0{,}056$. Как видим, погрешность достаточно велика.

3.5. Средний срок поступления дохода

Кроме доходности облигации и ее стоимости номинальной и рыночной важной характеристикой облигации является средний срок поступления дохода. Также как и для любого потока платежей для облигации необходимо учитывать распределение доходов по времени. Чем больше срок поступления платежей, тем менее ценной становится ценная бумага. Это связано с несвоевременностью поступления дохода (дорога ложка к обеду), в результате чего деньги обесцениваются, а также с увеличением риска вложения денег в облигацию.

Средний срок нельзя подсчитать как среднее всех сроков платежей, так как необходимо учитывать еще и величину каждого платежа, точнее говоря, долю каждого платежа в сумме всех платежей (доходов) облигации. Поэтому, также как и в общем случае произвольного потока платежей, средний срок поступления дохода облигации вычисляется как взвешенная сумма ожиданий каждого платежа. То есть средний срок поступления дохода для облигации равен средневзвешенной сумме сроков поступления купонных платежей и погасительного платежа. Воспользовавшись формулой (2.10), получаем формулу среднего срока поступления дохода для облигации

$$T = \frac{cN \cdot 1 + cN \cdot 2 + \cdots + cN \cdot n + n \cdot N}{n \cdot cN + N}. \tag{3.9}$$

Преобразуем формулу (3.4), воспользовавшись тем, что по формуле суммы арифметической прогрессии

$$cN \cdot 1 + cN \cdot 2 + \cdots + cN \cdot n = \frac{cN \cdot 1 + cN \cdot n}{2} \cdot n.$$

Тогда, вынеся за скобку N в числителе и знаменателе правой части формулы (3.4), получим

$$T = \frac{N \cdot \left(\frac{cn+n}{2} \cdot n + n\right)}{N(cn+1)} = \frac{n\left(\frac{cn+n}{2}+1\right)}{n\left(c+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{c(n+1)}{2}+1}{c+\frac{1}{n}}.$$

В итоге получаем формулу среднего срока поступления дохода облигации

$$T = \frac{\frac{c(n+1)}{2}+1}{c+\frac{1}{n}}. \qquad (3.10)$$

Выведем формулу среднего срока поступления дохода в случае, если купонные платежи поступают p раз в год, например раз в месяц ($p = 12$). В этом случае купонный платеж составляет величину $\frac{cN}{p}$, а всего таких платежей будет pn. Тогда формула (3.5) примет вид $T = \frac{\frac{cN}{p}\cdot\frac{1}{p}+\frac{cN}{p}\cdot\frac{2}{p}+\cdots+\frac{cN}{p}\cdot\frac{np}{p}+n\cdot N}{n\cdot cN+N}$. Опять, воспользовавшись формулой суммы арифметической прогрессии и вынося за скобки в числителе и знаменателе, получим

$$\frac{cN}{p}\cdot\frac{1}{p}+\frac{cN}{p}\cdot\frac{2}{p}+\cdots+\frac{cN}{p}\cdot\frac{np}{p} = \frac{\frac{cN}{p}\cdot\frac{1}{p}+\frac{cN}{p}\cdot n}{2}\cdot pn = \frac{cN\left(n+\frac{1}{p}\right)}{2}\cdot n,$$

$$T = \frac{N\cdot\left(\frac{c\left(n+\frac{1}{p}\right)}{2}\cdot n+n\right)}{N(cn+1)} = \frac{n\left(\frac{c\left(n+\frac{1}{p}\right)}{2}+1\right)}{n\left(c+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{c\left(n+\frac{1}{p}\right)}{2}+1}{c+\frac{1}{n}}.$$

В итоге получаем формулу среднего срока поступления дохода облигации с p-кратными купонными платежами

$$T = \frac{\frac{c\left(n+\frac{1}{p}\right)}{2}+1}{c+\frac{1}{n}}. \qquad (3.11)$$

Отметим, что средний срок поступления дохода от облигации не зависит от величины номинала.

Пример 3.6. Купонная ставка 5-летней облигации номиналом 1000 руб. равна 17% годовых (выплаты в конце года). Найти средний срок поступления дохода от облигации.

Решение. Поскольку купонные платежи осуществляются раз в год, средний срок поступления дохода от облигации определяется по формуле (3.10)

$$T=\frac{\frac{c(n+1)}{2}+1}{c+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{0{,}17\cdot 6}{2}+1}{0{,}17+\frac{1}{6}}=4{,}49\approx 4{,}5\text{ года.}\ \blacksquare$$

Пример 3.7. Купонная ставка 10-летней облигации номиналом 5000 руб. равна 14% годовых, выплаты производятся один раз в квартал. Найти средний срок поступления дохода от облигации.

Решение. Поскольку купоны оплачиваются 4 раза в год, применим формулу (3.11) с $p=4$.

$$T=\frac{\frac{c\left(n+\frac{1}{p}\right)}{2}+1}{c+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{0{,}14\left(10+\frac{1}{4}\right)}{2}+1}{0{,}14+\frac{1}{10}}=7{,}16\approx 7\text{ лет.}\ \blacksquare$$

3.6. Дюрация

Определение средней среднего срока поступления дохода облигации не совсем корректно, так как платежи можно складывать лишь тогда, когда они приведены к одному моменту времени. Формулы (3.9)–(3.11) служат хорошими приближениями среднего срока при небольших значениях процентной ставки. Для облигации, как и для любого потока платежей приведение всех платежей к современному виду приводит к точному определению длительности платежа, называемого дюрацией (*duration* в переводе с английского означает продолжительность).

Дюрацией D потока платежей

$$CF=\{(P_1;t_1),(P_2;t_2),\dots,(P_n;t_n)\}$$

при процентной ставке i называется величина

$$D=\sum_{k=1}^{n}w_k t_k \tag{3.12}$$

w_k – доля приведенного платежа $(P_k;t_k)$ в приведенной величине P всего потока платежей

$$w_k = \frac{P_k(1+i)^{-t_k}}{P},$$
$$P = P_1(1+i)^{-t_1} + P_2(1+i)^{-t_2} + \dots + P_n(1+i)^{-t_n}. \quad (3.13)$$

Формулу вычисления дюрации можно записать в виде, аналогичном формуле (2.10) вычисления средней величины потока платежей, с той лишь разницей, что рассматриваются не номинальные, а приведенные платежи.

$$D = \frac{t_1P_1(1+i)^{-t_1} + t_2P_2(1+i)^{-t_2} + \dots + t_nP_n(1+i)^{-t_n}}{P_1(1+i)^{-t_1} + P_2(1+i)^{-t_2} + \dots + P_n(1+i)^{-t_n}}. \quad (3.14)$$

Пример 3.8. Найти дюрацию потока платежей (1000;10), (2000;2), (3000;3), (4000;40) при процентной ставке $i = 10\%$.

Решение. Найдем приведенную величину потока

$$P = 1000 \cdot 1.1^{-1} + 2000 \cdot 1.1^{-2} + 3000 \cdot 1.1^{-3} + 4000 \cdot 1.1^{-4} = 7547{,}98.$$

Найдем весовые коэффициенты по формуле (3.13)

$$w_k = \frac{P_k(1+i)^{-t_k}}{P}. \ w_1 = \frac{1000 \cdot 1{,}1^{-1}}{7547{,}98} = 0.1204, w_2 = \frac{2000 \cdot 1{,}1^{-2}}{7547{,}98} = 0.219,$$
$$w_3 = \frac{3000 \cdot 1{,}1^{-3}}{7547{,}98} = 0.2986, w_4 = \frac{4000 \cdot 1{,}1^{-4}}{7547{,}98} = 0.362.$$

Легко проверить, что $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$. Теперь по формуле (3.12) находим

$$D = \sum_{k=1}^{n} w_k t_k = 0{,}1204 \cdot 1 + 0{,}219 \cdot 2 + 0{,}2986 \cdot 3 + 0{,}362 \cdot 4 = 2{,}9022 \ \blacksquare$$

Если поток платежей состоит из одного платежа, то дюрация совпадает со сроком этого платежа. В случае потока положительных платежей дюрация выражает собой ожидаемый средний момент времени между началом и окончанием потока платежей, $t_1 < D < t_n$.

Главное же свойство дюрации состоит в том, что она выражает относительное изменение приведенной стоимости потока платежей при изменении процентной ставки i. Под относительным изменением приведенной стоимости P подразумевается скорость его изменения при изменении i, т.е. производная функции $P(i)$, деленная на P. Имеет место формула

$$\frac{P'(i)}{P(i)} = -\frac{D}{1+i} \ . \tag{3.15}$$

Действительно, продифференцировав знаменатель правой части формулы (3.14), получим числитель правой части формулы (3.14), умноженный на $-(1+i)^{-1}$.

Отметим также следующее свойство дюрации. $D = D(i)$ является убывающей функцией от процентной ставки i.

Применим понятие дюрации облигации, являющейся потоком платежей $CF = \{(1; cN), (2; cN), \dots, (n; cN + N)\}$.

Причем рассмотрим два случая: 1) в качестве процентной ставки i берется обычная ставка рефинансирования r, а в качестве приведенной величины P текущая стоимость облигации; 2) в качестве процентной ставки i берется текущая доходность облигации ρ, а в качестве приведенной величины P рыночная стоимость V облигации. Резюмируем свойства дюрации облигации.

1. Для бескупонной облигации ($c = 0$) дюрация совпадает со сроком погашения, $D = n$.

2. Для относительного изменения рыночной цены $\frac{\Delta V}{V}$ при изменении ставки текущей доходности на $\Delta\rho$ и текущей стоимости $\frac{\Delta P}{P}$ при изменении процентной ставки на Δr справедливы следующие приближенные формулы

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+\rho}\Delta\rho \, ; \quad \frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{D}{1+r}\Delta r \, . \tag{3.16}$$

3. Дюрация $D(\rho)$ как функция текущей доходности ρ убывает при возрастании ρ, соответственно дюрация $D(r)$ как функция процентной ставки r убывает при возрастании r. Дюрация облигации не зависит от номинальной стоимости и выражается формулами

$$\begin{aligned} D &= \frac{1+\rho}{\rho} - \frac{n(c-\rho)+1+\rho}{c((1+\rho)^n - 1)+\rho} \\ D &= \frac{1+r}{r} - \frac{n(c-r)+1+r}{c((1+r)^n - 1)+r} \end{aligned} \tag{3.17}$$

4. Если облигация продается по номиналу, $c = \rho$, то

$$D = \frac{1+\rho}{\rho}\left(1 - (1+\rho)^{-n}\right) \qquad (3.18)$$

5. Дюрация $D = D(c)$ является убывающей функцией купонной ставки c.

6. Для бессрочных облигаций $(n \to \infty)$ дюрация равна $D = \frac{\rho}{1+\rho}$.

Пример 3.9. Облигация продается по номинальной стоимости со сроком погашения 9 лет с выплатой купонов в конце года по купонной ставке 10%. Найти дюрацию облигации.

Решение. Так как облигация продается по номинальной стоимости, то доходность к погашению совпадает с купонной ставкой, $\rho = \text{c} = 10\%$. Поэтому можно воспользоваться формулой (3.18). Подставляя в эту формулу, получаем

$$D = \frac{1+0{,}1}{0{,}1} \cdot (1 - (1+0{,}1)^{-9}) = 6{,}335 \text{ года. } \blacksquare$$

Пример 3.10. Облигация со сроком погашения 10 лет и купонной ставкой 11% имеет доходность к погашению $\rho = 9\%$. Найти ее дюрацию.

Решение. Воспользуемся общей формулой (3.17)

$$D = \frac{1+\rho}{\rho} - \frac{n(c-\rho)+1+\rho}{c((1+\rho)^n - 1)+\rho} = \frac{1+0{,}09}{0{,}09} - \frac{10(0{,}11-0{,}09)+1+0{,}09}{0{,}11((1+0{,}09)^{10}-1)+0{,}09} = 6{,}745 \text{ лет. } \blacksquare$$

Очень важным применением дюрации является возможность оценивать относительное изменение цены облигации по отношению к изменению доходности.

Пример 3.11. Дюрация облигации равна 9. Известно, что ее доходность к погашению увеличилась с 10% до 11%. На сколько процентов изменилась цена облигации.

Решение. Фактически требуется найти относительное изменение цены облигации при данном изменении доходности к погашению. Воспользуемся формулой (3.16) $\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+\rho}\Delta\rho$.

В нашем случае $\rho = 0{,}1$, $\Delta\rho = 0{,}11 - 0{,}1 = 0{,}01$, $D = 9$. Тогда $\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{9}{1+0{,}1} \cdot 0{,}01 \approx -0{,}08$. Это означает, что цена облигации понизилась на 8%. $\blacksquare$

3.7. Выпуклость облигации. Иммунизация портфеля облигаций

Говоря о приближенных вычислениях той или иной величины, мы употребляем термин первое приближение и более точное второе приближение. На языке разложения функции в ряд Тейлора $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x-x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots$, $f(x_0)$ – это нулевое приближение значения $f(x)$, прибавление члена $f'(x_0)(x - x_0)$ дает первое приближение, а дальнейшее прибавление члена $\frac{f''(x-x_0)}{2}(x - x_0)^2$ дает второе приближение. Применительно к рыночной стоимости облигации V как функции от доходности к погашению ρ, $V = V(\rho)$, при изменении начальной доходности ρ_0 на величину $\Delta\rho$, $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, изменение цены $\Delta V = V(\rho) - V(\rho_0)$ представимо в виде

$$\Delta V = V'(\rho_0)\Delta\rho + \frac{1}{2}V''(\Delta\rho)^2 + \cdots$$

Относительное изменение цены $\frac{\Delta V}{V}$ приближенно равно

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{V'}{V}\Delta\rho + \frac{1}{2}\cdot\frac{V''}{V}(\Delta\rho)^2 . \qquad (3.19)$$

Первый член правой части формулы (3.19) согласно формуле (3.16) выражается через дюрацию $\frac{V'}{V} = -\frac{D}{1+\rho}\Delta\rho$, а для выражения второго члены введем понятие выпуклости облигации. По формуле (3.15) с заменой i на ρ дюрация D представляет собой эластичность цены V по множителю наращения ставки текущей доходности ρ, взятой со знаком минус, $D = -\frac{V'}{V}(1 + \rho)$.

Определим выпуклость облигации W как коэффициент при $(\Delta\rho)^2$

$$W = \frac{V''(\rho)}{V(\rho)} . \qquad (3.20)$$

Дифференцируя дважды функцию $V(\rho) = \sum_{k=1}^{n}\frac{cN}{(1+\rho)^k} + \frac{N}{(1+\rho)^n}$, получим $V'' = \sum_{k=1}^{n} k(k + 1)cN(1 + \rho)^{-k-2} + n(n + 1)N(1 + \rho)^{-n-2}$. Вынеся N за знак суммы и поделив на V, получим

$$W = \frac{c}{K}\sum_{k=1}^{n} k(k` + 1)\,(1+\rho)^{-k-2} + \frac{n(n+1)}{K}(1+\rho)^{-n-2}\,. \qquad (3.21)$$

Тогда относительное изменение цены дается формулой (второе приближение)

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+\rho}\Delta\rho + \frac{1}{2}W(\Delta\rho)^2\,. \qquad (3.22)$$

Как видим, чем больше выпуклость облигации, тем более чувствительна цена к изменению доходности.

Под **портфелем облигаций** мы подразумеваем набор нескольких пакетов облигаций разного типа, причем пакет облигаций одного типа мы можем считать одной облигацией. Под иммунизацией портфеля облигаций понимается замена портфеля новым портфелем той же стоимости и доходности при первоначальной процентной ставке, а при на скачках рыночной процентной ставки доходность нового портфеля будет выше доходности первоначального портфеля.

Рассмотрим бескупонную облигацию номинальной стоимости N и временем до погашения n. Дюрация такой облигации равна n, а стоимость $\frac{N}{(1+r)^n}$. Можно заменить покупку этой облигации на покупку двух облигаций так, что стоимость покупки не меняется, т.е. текущая стоимость первоначальной облигации равна сумме текущих стоимостей двух новых облигаций. В тоже время при изменении процентной ставки сумма текущих стоимостей двух новых облигаций будет выше текущей стоимости первоначальной облигации. Это связано с тем, что две новых облигации можно подобрать так, что функция стоимости $P_1(r)$ первоначальной облигации и функция стоимости $P_2(r)$ двух новых облигаций имеют одинаковые значения и одинаковые дюрации D_1 и D_2 при данной процентной ставке r_0, а выпуклость функции $P_2(r)$ больше, чем выпуклость функции $P_1(r)$.

Пусть N – номинальная стоимость первоначальной облигации, а n – ее срок, Тогда

$$P_1(r) = \frac{N}{(1+r)^n},\, D_1 = n.$$

Пусть N_1 и N_2 – номинальные стоимости двух новых облигаций, а n_1 и n_2 – их сроки. Тогда

$$P_2(r) = \frac{N_1}{(1+r)^{n_1}} + \frac{N_2}{(1+r)^{n_2}}, P_1(r_0) = P_2(r_0).$$

Пусть также w_1, w_2 – ценовые доли (веса) каждой облигации во всей стоимости двух новых облигации. Тогда

$$w_1 = \frac{\frac{N_1}{(1+r_0)^{n_1}}}{\frac{N_1}{(1+r_0)^{n_1}}+\frac{N_2}{(1+r_0)^{n_2}}}, \qquad w_2 = \frac{\frac{N_2}{(1+r_0)^{n_2}}}{\frac{N_1}{(1+r_0)^{n_1}}+\frac{N_2}{(1+r_0)^{n_2}}},$$

$w_1 + w_2 = 1$. Дюрация потока платежей, состоящего из двух новых облигаций равна

$$D_2 = \frac{n_1\frac{N_1}{(1+r_0)^{n_1}}+n_2\frac{N_2}{(1+r_0)^{n_2}}}{\frac{N_1}{(1+r_0)^{n_1}}+\frac{N_2}{(1+r_0)^{n_2}}} = n_1 w_1 + n_2 w_2.$$

В результате систему уравнений

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ n_1 w_1 + n_2 w_2 = n \end{cases} \tag{3.23}$$

Решая эту систему, найдем ценовые доли w_1, w_2, а затем и денежные суммы, которые необходимо потратить на каждую из новых облигаций. Две новые облигации иммунизируют первоначальную облигацию, означает, что $P_1(r) < P_2(r)$. Чтобы это доказать достаточно доказать, что $P_1''(r_0) < P_2''(r_0)$. Приведем это доказательство, заметив, что его можно пропустить без ущерба для понимания сути иммунизации.

Вычислим вторые производные.

$$P_1''(r_0) = \frac{n(n+1)N}{(1+r_0)^{n+2}} = \frac{P}{(1+r_0)^2}(n^2+n),$$

$$P_2''(r_0) = \frac{n_1(n_1+1)N_1}{(1+r_0)^{n_1+2}} + \frac{n_2(n_2+1)N_2}{(1+r_0)^{n_2+2}} = \frac{P}{(1+r_0)^2}(n_1^2 w_1 + n_2^2 w_2 + n).$$

Отсюда видно, что неравенство $P_1''(r_0) < P_2''(r_0)$ равносильно неравенству $n^2 < n_1^2 w_1 + n_2^2 w_2$. Но

$$n^2 = (n_1 w_1 + n_2 w_2)^2 = n_1^2 w_1^2 + n_1^2 w_1^2 + 2n_1 n_2 w_1 w_2 =$$

$$= n_1^2 w_1(1-w_2) \quad + n_2^2 w_2(1-w_1) \quad + 2n_1 n_2 w_1 w_2 =$$

$$= n_1^2 w_1 + n_2^2 w_2 - n_1^2 w_1 w_2 - n_2^2 w_1 w_2 + 2n_1 n_2 w_1 w_2 \ =$$

$$= n_1^2 w_1 + n_2^2 w_2 - w_1 w_2 (n_1 - n_2)^2 < n_1 w_1 + n_2 w_2.$$

Пример 3.12. Найти портфель из 3-летней и 5-летней облигаций иммунизирующий 4-летнюю облигацию с номинальной стоимостью 2000 у.е., если процентная ставка составляет 12%.

Решение. Подставив данные задачи в (3.23), получим систему уравнений $\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ 3w_1 + 5w_2 = 4 \end{cases}$. Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 3, получаем $2w_2 = 1$. Следовательно $w_2 = \frac{1}{2}, w_1 = \frac{1}{2}$. Теперь по очереди определим стоимости 4-летней, 5-летней и 3-летней облигаций:

$$P = 2000 \cdot 1{,}12^{-4} = 1271{,}04; P_1 = \frac{1}{2}P = 635{,}52; P_2 = \frac{1}{2}P = 635{,}52;$$

Найдем номинальные стоимости 3-летней и 5-летней облигаций:

$$\mathrm{N}_1 = \mathrm{P}_1 \cdot 1.12^3 = 635{,}52 \cdot 1{,}12^3 = 892{,}86;$$

$$\mathrm{N}_2 = \mathrm{P}_2 \cdot 1.12^5 = 635{,}52 \cdot 1{,}12^5 = 1120{,}0.$$

Таким образом, иммунизирующий портфель состоит из 3-летней облигации номинальной стоимостью 892,96 у.е. и 5-летней облигации стоимостью 1120 у.е. Можно непосредственно проверить, что при изменении процентной ставки стоимость данного портфеля будет выше, чем стоимость 4-летней облигации. ■

3.8. Оценивание облигаций в произвольный момент времени

Рассмотренные ранее характеристики облигаций применимы в случае, когда срок до погашения облигации составляет целое число периодов. Проанализируем оценивание облигаций в моменты времени не совпадающие с датами купонных выплат. По-прежнему будем считать, что купонные платежи выплачиваются регулярно в конце каждого периода (в конце года или p раз в год в конце малого периода, равного $\frac{1}{p}$ части года). Время будем измерять в периодах купонных платежей.

Пусть до момента погашения облигации остается m купонных периодов, и время t (измеряемое в долях купонного периода) до начала ближайшего следующего купонного платежа,

$0 \leq t < 1$. Необходимо дисконтировать текущую стоимость облигации за m периодов для промежутка t между моментом оценивания и ближайшей купонной датой. На практике имеется два способа такого дисконтирования: дисконтирование по схеме простых и по схеме сложных процентов. Обозначим через T время (в купонных периодах) с момента оценивания до момента погашения облигации, через $P = P_T$ искомую текущую стоимость в момент оценивания, через P_m – приведенную величину потока платежей облигации в момент ближайшего купонного платежа. Для облигации с p −кратными купонными платежами при k −кратном начислении процентов

$$P_m = C_p + \frac{C_p}{1 + r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + r_p\right)^2} + \cdots + \frac{C_p + N}{\left(1 + r_p\right)^m}, \tag{3.24}$$

где $r_p = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k/p} - 1$ – процентная ставка за малый период, $C_p = \frac{cN}{p}$ – купонный платеж за малый период, m – число оставшихся купонных периодов.

По схеме простых процентов (применяемой при оценивании облигации внутри последнего купонного периода)

$$P_T = \frac{P_m}{1+t \cdot r_p} =$$

$$= \frac{1}{1 + t \cdot r_p}\left(C_p + \frac{C_p}{1 + r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + r_p\right)^2} + \cdots + \frac{C_p + N}{\left(1 + r_p\right)^m}\right). \tag{3.25}$$

По схеме сложных процентов (более распространенной среди дилеров рынка облигаций)

$$P_T = \frac{P_m}{\left(1+r_p\right)^t} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + r_p\right)^t} \cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1 + r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + r_p\right)^2} + \cdots + \frac{C_p + N}{\left(1 + r_p\right)^m}\right). \tag{3.26}$$

Текущая стоимость $P = P_T$ внутри купонного периода, также как и наращенная сумма на дату купонного периода, является убывающей функцией процентной ставки и возрастающей функцией купонной ставки.

Пример 3.13. Найти текущую стоимость облигации с номиналом 1000 руб., купонной ставкой 10% с годовыми купонными платежами и сроком до погашения 1,3 года относительно номинальной ставки 12% с годовым периодом начисления процентов.

Решение. В нашем случае

$T = 1{,}3;\ t = 0{,}3;\ m = 1;\ k = p = 1;\ r = 0{,}12;\ c = 0{,}1;$

$r_p = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k/p} - 1 = r = 0{,}12;\ C_p = \frac{cN}{p} = 0{,}1 \cdot 1000 = 100.$

Тогда в схеме простых процентов

$$P_T = \frac{1}{1 + t \cdot r_p} \cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1 + r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + r_p\right)^2} + \cdots + \frac{C_p + N}{\left(1 + r_p\right)^m}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+0{,}3\cdot 0{,}12}\left(0{,}1 \cdot 1000 + \frac{0{,}1\cdot 1000+1000}{1+0{,}12}\right) = 1044{,}54.$$

В схеме сложных процентов цена облигации к моменту оценивания будет

$$P_T = \frac{P_m}{\left(1 + r_p\right)^t} = \frac{1}{\left(1 + r_p\right)^t} \cdot$$

$$\cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1 + r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + r_p\right)^2} + \cdots + \frac{C_p + N}{\left(1 + r_p\right)^m}\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+0{,}12)^{0{,}3}}\left(0{,}1 \cdot 1000 + \frac{0{,}1\cdot 1000+1000}{1+0{,}12}\right) = 1045{,}97. \blacksquare$$

Пример 3.14. Найти текущую стоимость облигации с номиналом 1000 руб., купонной ставкой 10% с полугодовыми купонными платежами и сроком до погашения 1,3 года относительно номинальной ставки 12% с полугодовым периодом начисления процентов.

Решение. В нашем случае срок до погашения 1,3 года в купонных периодах (полгода) равен $T = 2{,}6$; число периодов до следующего купонного платежа равно $t = 0{,}6$; число оставшихся купонных периода равно $m = 2$; $k = p = 2$; $r = 0{,}12$; $c = 0{,}1$;

$r_p = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{p}} - 1 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{\frac{2}{2}} - 1 = \frac{r}{2} = 0{,}06;\ C_p = \frac{cN}{p} = \frac{0{,}1\cdot 1000}{2} = 50.$

Тогда в схеме простых процентов

$$P_T = \frac{1}{1 + t \cdot r_p} \cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1 + r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + r_p\right)^2} + \dots + \frac{C_p + N}{\left(1 + r_p\right)^m} \right) =$$

$$= \frac{1}{1+0{,}6 \cdot 0{,}06}\left(50 + \frac{50}{1+0{,}06} + \frac{50+1000}{(1+0{,}06)^2}\right) = 995{,}82.$$

В схеме сложных процентов

$$P_T = \frac{1}{\left(1 + r_p\right)^t} \cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1 + r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + r_p\right)^2} + \dots + \frac{C_p + N}{\left(1 + r_p\right)^m} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+0{,}06)^{0{,}6}}\left(50 + \frac{50}{1+0{,}06} + \frac{50+1000}{(1+0{,}06)^2}\right) = 996{,}22. \blacksquare$$

Накопительный купон, полная и чистая цена облигации. Когда инвестор покупает облигацию между купонными выплатами, то он должен компенсировать продавцу облигации купонный процент, накопленный со дня купонной выплаты. Эта сумма называется *накопленным процентом (купоном)* и равна $AC_t = C_p \cdot (1 - t)$.

Стоимость облигации P_T, полученная дисконтированием потока платежей на текущий момент времени, отстоящий от срока погашения на величину T, называется *полной* ценой облигации. Будем обозначать ее $P_T^{(\text{полн.})}$. Разность между полной ценой и накопленным купоном называется *чистой (котировочной)* ценой облигации и обозначается $P_T^{(\text{чист.})}$. Внутри текущего купонного периода

$$P_T^{(\text{чист.})} = P_T^{(\text{полн.})} - C_p \cdot (1 - t)\,. \qquad (3.27)$$

Пример 3.15. Найти чистую цену облигации с номиналом 1000 руб., купонной ставкой 10% с годовыми купонными платежами и сроком до погашения 1,3 года относительно номинальной ставки 12% с годовым периодом начисления процентов.

Решение. В нашем случае $T = 1{,}3$; $t = 0{,}3$; $m = 1$; $k = p = 1$; $r = 0{,}12$; $c = 0{,}1$; $r_p = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k/p} - 1 = r = 0{,}1$; $C_p = \frac{cN}{p} = 0{,}1 \cdot 1000 = 100$.

Тогда в схеме простых процентов

$$P_T^{(\text{полн.})} = \frac{1}{1 + t \cdot r_p} \cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1 + \ r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + \ r_p\right)^2} + \cdots + \frac{C_p + N}{\left(1 + \ r_p\right)^m} \right) =$$

$$= \frac{1}{1+0{,}3\cdot 0{,}12}\left(0{,}1 \cdot 1000 + \frac{0{,}1\cdot 1000+1000}{1+0{,}12}\right) = 1044{,}54.$$

Накопленный купон равен $C_p \cdot (1 - t) = 100 \cdot 0{,}7 = 70$. Чистая цена облигации равна

$$P_T^{(\text{чист.})} = P_T^{(\text{полн.})} - C_p \cdot (1 - t) = 1044{,}54 - 70 = 974{,}54 \text{ (руб.)}.$$

В схеме сложных процентов цена облигации к моменту оценивания будет

$$P_T = \frac{P_m}{\left(1 + r_p\right)^t} = \frac{1}{\left(1 + r_p\right)^t} \cdot$$

$$\cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1 + \ r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + \ r_p\right)^2} + \cdots + \frac{C_p + N}{\left(1 + \ r_p\right)^m} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+0{,}12)^{0{,}3}}\left(0{,}1 \cdot 1000 + \frac{0{,}1\cdot 1000+1000}{1+0{,}12}\right) = 1045{,}97.$$

Чистая цена облигации равна

$$P_T^{(\text{чист.})} = P_T^{(\text{полн.})} - C_p \cdot (1 - t) = 1045{,}97 - 70 = 975{,}97 \text{ (руб.)}.$$

Пример 3.16. Найти чистую цену облигации с номиналом 1000 руб., купонной ставкой 10% с полугодовыми купонными платежами и сроком до погашения 1,3 года относительно номинальной ставки 12% с полугодовым периодом начисления процентов.

Решение. В нашем случае срок до погашения 1,3 года в купонных периодах (полгода) равен $T = 2{,}6$; число периодов до следующего купонного платежа равно $t = 0{,}6$; число оставшихся купонных периода равно $m = 2$; $k = p = 2$; $r = 0{,}12$; $c = 0{,}1$; $r_p = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{p}} - 1 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{\frac{2}{2}} - 1 = \frac{r}{2} = 0{,}06$; $C_p = \frac{cN}{p} = \frac{0{,}1\cdot 1000}{2} = 50$.

Тогда в схеме простых процентов

$$P_T = \frac{1}{1 + t \cdot r_p} \cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1 + r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + r_p\right)^2} + \cdots + \frac{C_p + N}{\left(1 + r_p\right)^m} \right) =$$

$$= \frac{1}{1+0{,}6\cdot 0{,}06}\left(50 + \frac{50}{1+0{,}06} + \frac{50+1000}{(1+ 0{,}06)^2}\right) = 995{,}82.$$

Накопленный купон равен $C_p \cdot (1 - t) = 50 \cdot (1 - 0{,}6) = 20$. Чистая цена облигации равна

$$P_T^{(\text{чист.})} = P_T^{(\text{полн.})} - C_p \cdot (1 - t) = 995{,}82 - 20 = 975{,}82 \text{ (руб.)}.$$

В схеме сложных процентов

$$P_T = \frac{1}{\left(1 + r_p\right)^t} \cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1 + r_p} + \frac{C_p}{\left(1 + r_p\right)^2} + \cdots + \frac{C_p + N}{\left(1 + r_p\right)^m} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+0{,}06)^{0{,}6}}\left(50 + \frac{50}{1+0{,}06} + \frac{50+1000}{(1+ 0{,}06)^2}\right) = 996{,}22.$$

Чистая цена облигации равна

$$P_T^{(\text{чист.})} = P_T^{(\text{полн.})} - C_p \cdot (1 - t) = 995{,}22 - 20 = 976{,}22 \text{ (руб.)}.$$

Облигация, являющаяся премиальной (текущая цена выше номинальной) на момент купонной выплаты, является премиальной по полной цене и в любой другой момент. Однако, чистая цена такой облигации при близких значениях купонной и процентной ставок может бать ниже номинала.

Пример 3.17. Найти полную и чистую цену облигации с номиналом 2000 руб. с годовыми купонными платежами в середине последнего купонного периода при процентной ставке, равной 20% годовых и купонной ставке 20,1%.

Решение. По условию задачи

$$N = 2000;\ p = 1;\ r_p = 0{,}2;\ C_p = \frac{cN}{p} = 0{,}201 \cdot 2000 = 402;\ t = 0{,}5.$$

Цена облигации на следующую купонную выплату, т.е. на момент погашения, равна $C_p + N = 2402$.

За полгода до этого ее полная цена станет равной

$$P_T^{(\text{полн.})} = \left(C_p + N\right)\left(1 + r_p\right)^{-0{,}5} = 2402 \cdot (1 + 0{,}2)^{-0{,}5} = 2192{,}7\ .$$

Номинальный купон к середине купонного периода будет

$$C_p \cdot (1 - t) = 402 \cdot (1 - 0{,}5) = 201.$$

Таким образом, чистая цена облигации равна

$$P_T^{(\text{чист.})} = P_T^{(\text{полн.})} - C_p \cdot (1 - t) = 2192{,}7 - 201 = 1991{,}7.$$

Следовательно, полная цена в середине последнего купонного периода выше, а чистая – ниже номинала. ■

Облигация, котирующаяся на момент купонной выплаты с дисконтом (текущая стоимость ниже номинала), внутри купонного периода будет иметь чистую цену ниже номинала. Однако, полная цена облигации, котирующейся на момент купонной выплаты с дисконтом, может принимать внутри купонного периода значение больше номинальной стоимости.

Пример 3.17. Найти полную и чистую цену облигации с номиналом 2000 руб. с годовыми купонными платежами в середине последнего купонного периода при процентной ставке, равной 10% годовых и купонной ставке 8%.

Решение. По условию задачи

$$N = 2000;\, p = 1;\, r_p = 0{,}1;\, C_p = \frac{cN}{p} = 0{,}08 \cdot 2000 = 160;\, t = 0{,}5.$$

Цена облигации на следующую купонную выплату, т.е. на момент погашения, равна

$$C_p + N = 160 + 2000 = 2160.$$

За полгода до этого ее полная цена станет равной

$$P_T^{(\text{полн.})} = \left(C_p + N\right)\left(1 + r_p\right)^{-0{,}5} = 2160 \cdot (1 + 0{,}1)^{-0{,}5} = 2059{,}48.$$

Номинальный купон к середине купонного периода будет

$$C_p \cdot (1 - t) = 160 \cdot (1 - 0{,}5) = 80.$$

Чистая цена облигации равна

$$P_T^{(\text{чист.})} = P_T^{(\text{полн.})} - C_p \cdot (1 - t) = 2059{,}48 - 80 = 1979{,}48.$$

Следовательно, полная цена в середине последнего купонного периода выше, а чистая – ниже номинала. ■

Оценивание облигаций в календарной шкале. Обозначим через T_0, T_1, …, T_m основные *временные (календарные) реквизиты* облигации. T_0 – *начальная дата (дата эмиссии)*, T_m – дата погашения, T_k – даты купонных платежей ($k \neq 0$). Мы будем рассматривать стандартные облигации, для которых число дней между всеми датами купонных платежей одинаково и дата последнего купонного платежа совпадает с датой погашения.

Пример 3.18. Построить поток платежей для стандартной двухлетней облигации с номиналом 2000 руб. и полугодовыми купонами поставке 20% годовых с датой погашения: а) 15.12.2017; б) 31.12.2017.

Решение. По условию задачи купонная ставка $c = 0{,}2$, а размер все купонных платежей одинаков и равен $C_2 = \frac{0{,}2 \cdot 2000}{2} = 200$ руб. Поток платежей по облигации в обоих случаях выглядит следующим образом

$$\{(0{:}\,0), (1{:}\,200), (2{:}\,200), (3{:}\,200), (4{:}\,200 + 2000)\}$$

а) так как все купоны полугодовые, то имеется четыре даты купонных выплат:

$$T_4 = 15.12.2017;\, T_3 = 15.06.2017;\, T_2 = 15.12.2016;\, T_1 = 15.06.2016$$

Поскольку облигация стандартная, то нулевая дата, с которой начинается начисление процентов, это 15.12.2016.

б) в этом случае дата погашения 31.12.2017 является последним днем месяца, поэтому все остальные купонные даты также являются последними днями соответствующих месяцев:

$$T_4 = 31.12.2017;\, T_3 = 30.06.2017;\, T_2 = 31.12.2016;\, T_1 = 30.06.2016.$$

Начальная дата 31.12.2016. ■

Для вычисления полной цены, накопленного купона и чистой цены необходимо задание временных правил, преобразующих календарные даты в шкалу купонных периодов.

Так при оценивании облигаций на купонную дату применяется формула (3.24), поскольку по принятому соглашению все купонные периоды имеют одинаковую продолжительность. В случае же оценки облигации на дату, находящуюся внутри купонного периода необходимо задание правила вычисления параметра t. В свою очередь для этого необходимо определить количество дней между датой последней купонной выплаты и датой оценки облигации (расчетной датой), а также число дней до следующей купонной даты, продолжительность купонного периода и т.п. На облигационных рынках разных стран существуют различные соглашения об определении числа дней между датами и различные временные правила для определения долей календарных промежутков по отношению к содержащим их купонных периодам.

Будем обозначать дату T следующим образом $T = (d; m; y)$, где d – номер дня, m – номер месяца, y – номер года. Пусть $T_0 = (d_0; m_0; y_0)$ – дата выплаты предыдущего купона, $T_1 = (d_1; m_1; y_1)$ – дата выплаты следующего купона относительно текущей даты,

Период от T_0 до T_1 называется *текущим купонным периодом.* Этот период однозначно определяет текущий годовой период, который определяется двумя смежными годовыми купонными датами, такими, что дата оценивания лежит между ними. Годовыми купонными датами называются даты одноименные с датой погашения, т.е. имеющие тот же номер дня и месяца, что и дата погашения. В целом, все правила основаны на годовых и на фактических периодах.

Правила, основанные на годовых купонных периодах. При использовании этих правил накопленный купон вычисляется по формуле

$$AC_t = C(1-t) = C\frac{D}{K} = cN\frac{D}{K},$$

где D – число дней между датами T_0 и T; K – число дней в году в текущем годовом периоде; $C = cN$ – размер годового купона.

Существуют различные способы (временные правила) вычисления числа дней D между датами и числа дней K в текущем годовом периоде. Для вычисления срока между датами используется одно из следующих правил.

Правило $\boldsymbol{ACT/365}$ (используется в Великобритании, Японии). Предполагается, что в году 365(366) дней, т.е. $K = 365(366)$. Срок между датами D задается как точное фактическое число дней между двумя датами.

Банковское правило $\boldsymbol{ACT/360}$ (используется в США, Франции). Предполагается, что в году 360 дней, т.е. $K = 360$. Срок между датами D задается как фактическое число дней меду датами.

Правило $30/360$ (используется федеральными агентствами и корпорациями США). Предполагается, что в году 360 дней, т.е. $K = 360$. Срок меду датами D вычисляется по правилу

$$D = 360(y - y_0) + 30(m - m_0) + (d - d_0) \quad (3.28)$$

Пример 3.19. Найти накопленный купон по правилу $ACT/365$, если дата оценки облигации 20.10.17, а дата выплаты предыдущего купона15.06.17. Купонный платеж 100 руб.

Решение. Найдем номера дней оценивания и выплаты предыдущего купона. 20.10.17 – № 283, 15.06.17 – № 166. Тогда $D = 283 - 166 = 127$, $K = 365$, накопленный купон равен $AC_t = C\frac{D}{K} = 100 \cdot \frac{127}{365} = 34{,}79$ (руб.). ■

Пример 3.20. Найти накопленный купон по правилу $ACT/360$, если дата оценивания облигации 25.07.17, а дата выплаты предыдущего купона 15.04.17. Купонный платеж 100 руб.

Решение. Найдем номера дней оценивания и выплаты предыдущего купона. 25.07.17 – № 206, 15.04.17 – № 105. Тогда $D = 206 - 105 = 101$, $K = 360$, накопленный купон равен $AC_t = C\frac{D}{K} = 100 \cdot \frac{101}{360} = 28{,}06$ (руб.). ■

Пример 3.21. Найти накопленный купон по правилу $30/360$, если дата оценки облигации 27.07.17, а дата выплаты предыдущего купона12.04.17. Купонный платеж 100 руб.

Решение. Число дней в году $K = 360$. Срок в днях D вычисляется по формуле (3.28),

$$D = 360(2017 - 2017) + 30(7 - 4) + (27 - 12) = 105 \text{ дней.}$$

Накопленный купон равен $AC_t = C\frac{D}{K} = 100 \cdot \frac{105}{360} = 29{,}17$ (руб.). ■

Правило ACT/ACT, основанное на фактических купонных периодах (казначейство США, Франции, Австралии). В этом правиле срок между всеми датами задается как точное (фактическое) число дней между датами. Обозначим через $D(T_0; T_1)$ точное число дней в текущем периоде, содержащем дату оценивания облигации, а через $D(T_0; T)$ точное число дней между датой предыдущего купонного платежа и датой оценивания. Тогда накопленный купон вычисляется по формуле

$$AC_t = C\,\frac{D(T_0;T)}{D(T_0;T_1)} \qquad (3.29)$$

Пример 3.22. Найти накопленный купон по правилу ACT/ACT, если дата оценивания облигации 23.07.16, а дата выплаты следующего купона 17.01.17. Купонный платеж 100 руб.

Решение. День выплаты предыдущего купона 23.01.16 имеет № 23, а дата оценивания 23.07.16 имеет № 205, так как год високосный. Тогда число дней $D(T_0;T)$ между датой предыдущего купонного платежа и датой оценивания равно 366 – 205 + 17 = 178, а точное число дней в текущем периоде равно $D(T_0;T_1) = 366$, опять же ввиду того, что 2016 год високосный. Тогда по формуле (3.29)

$$AC_t = C\,\frac{D(T_0;T)}{D(T_0;T_1)} = 100 \cdot \frac{178}{366} = 48{,}63 \text{ руб.} \ ■$$

Пример 3.23. Найти накопленный купон по правилу ACT/ACT, если дата оценивания облигации 11.04.16, дата выплаты следующего купона 15.07.16. а дата выплаты предыдущего купона 15.01.16. Купонный платеж 100 руб.

Решение. В данном случае купонные выплаты осуществляются два раза в год. Найдем номера дней оценивания и выплат предыдущего и следующего купонов, учитывая високосность года. 11.04.16 – № 102, 15.01.16 – № 15, 15.07.16 – № 197. Тогда $D(T_0;T) = 102 - 15 = 87$, а $D(T_0;T_1) = 197 - 15 = 182$. Тогда

$$AC_t = C\,\frac{D(T_0;T)}{D(T_0;T_1)} = 100 \cdot \frac{87}{182} = 47{,}80 \text{ руб.} \ ■$$

Правила определения величины времени t до начала ближайшего купонного платежа. Эти правила отличаются только определением числа дней в купонных периодах. Срок в днях любого купонного периода считается постоянным и равным $K_p = \frac{K}{p}$, где p – число купонных платежей в году, а K – условная продолжительность года 365, 360 и т.п. дней. Тогда t вычисляется как отношение $t = \frac{D(T;T_1)}{K_p}$.

Пример 3.24. Найти параметр t по правилу $ACT/365$, если дата оценки облигации 20.10.17, а дата выплаты предыдущего годового купона 15.06.17.

Решение. Следующая годовая купонная дата 15.06.18 имеет № 166, дата оценивания 20.10.17 имеет № 293.

Тогда $D(T;T_1) = 365 - 293 + 166 = 238$. Так как $p = 1$, то $t = \frac{238}{365} = 0{,}6521$. ■

Пример 3.25. На 25.08.16 найдите полную и чистую цену облигации с датой погашения 15.03.18, номиналом 1000 руб. и купонной ставкой 8%, если процентная ставка равна 10% годовых и кратность ее начисления совпадает с кратностью купонных выплат. Решить задачу для а) годовых и б) полугодовых купонов по правилу ACT/ACT.

Решение. а) Вычисляя номера дня оценивания с учетом высокосности 2015 г. облигации (№ 238), дня предыдущей купонной выплаты 15.03.16 (№ 75) и дату следующей купонной выплаты 15.03.17, найдем величины $D(T_0;T_1) = 365$, $D(T_0;T) =$ 2387 – 75 = =163, $D(T;T_1) =$ 365 – 163 = 202, $t = \frac{202}{365} = 0{,}5534$. По формуле (3.26) полная стоимость облигации равна

$$P_T^{(\text{полн.})} = \frac{1}{(1+r_p)^t} \cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1+r_p} + \frac{C_p}{(1+r_p)^2} + \cdots + \frac{C_p+N}{(1+r_p)^m} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+0{,}1)^{0{,}5534}} \cdot \left(80 + \frac{80+1000}{1+0{,}1} \right) = 1007{,}26.$$

Накопленный купон равен $AC_t = C(1-t) = 80 \cdot 0{,}4466 = 35{,}73$. Чистая цена по формуле (3.27) равна

$$P_T^{(\text{чист.})} = P_T^{(\text{полн.})} - C_p \cdot (1-t) = 1027{,}26 - 35{,}73 = 971{,}53.$$

б) в этом случае даты четырех последующих после даты оценивания купонных платежей 15.09.16 (№ 259), 15.03.17, 15.09.17, 15.03.18. Тогда $D(T_0;T_1) =$ 258 – 74 = 184, $D(T;T_1) =$ 259 – 238 = 21, $t = \frac{21}{184} = 0{,}1141$, $C_p = \frac{80}{2} = 40$, $r_p = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$. По формуле (3.26) полная стоимость облигации равна

$$P_T^{(\text{полн.})} = \frac{1}{(1+r_p)^t} \cdot \left(C_p + \frac{C_p}{1+r_p} + \frac{C_p}{(1+r_p)^2} + \cdots + \frac{C_p+N}{(1+r_p)^m} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+0{,}05)^{0{,}1141}} \cdot \left(40 + \frac{40}{1+0{,}05} + \frac{40}{(1+0{,}05)^2} + \frac{40+1000}{(1+0{,}05)^3} \right) = 1007{,}15.$$

Накопленный купон равен

$$AC_t = C(1 - t) = 40 \cdot (1 - 0{,}1141) = 35{,}44.$$

Чистая цена по формуле (3.27) равна

$$P_T^{(\text{чист.})} = P_T^{(\text{полн.})} - C_p \cdot (1 - t) = 1007{,}15 - 35{,}44 = 971{,}71. \blacksquare$$

Задачи

3.1. Рыночная цена 12-ти процентной облигации номиналом 1000 руб. за два года до погашения равна 1200 руб. Найти текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 10%, б) 14%, в) 12% и ее курс.

3.2. Найти текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1000 руб., сроком погашения 5 лет и ежегодными выплатами по купонной ставке 15%, если годовая процентная ставка составляет 20%.

3.3. Найдите значение текущей рыночной стоимости облигации со сроком обращения n = 7 лет, номинальной стоимостью N = 50 000, купонной ставкой c = 8% и доходностью к погашению ρ =10%, а также значения рыночной стоимости при увеличении и уменьшении доходности к погашению на 2%.

3.4. Рыночная цена 20-ти процентной облигации номиналом 3500 руб. за два года до погашения равна 4300 руб. найти текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 14%, б) 20%, в) 23% и ее курс.

3.5. Найти доходность к погашению облигации со сроком обращения 8 лет, номинальной стоимостью 3000 и купонной ставкой 8%, если: 1) она продается за 3000, 2) ее розничная цена увеличится на 10%, 3) уменьшится на 5%?

3.6. Найти доходность к погашению со сроком обращения 10 лет и номинальной стоимостью N = 1000 у.е., купонные выплаты по которой составляют 50 у.е. ежегодно, если облигация продается по 900 у.е.

3.7. Найти доходность к погашению облигации со сроком обращения 10 лет и купонной ставкой 8%, если: 1) она продается по номиналу, 2) ее розничная цена увеличится на 10%, 3) уменьшится на 5%?

3.8. Рыночная цена облигации составляет 4000 У.е., номинальная стоимость равна 2500 у.е., срок до погашения 5 лет, купонные платежи – 700 у.е., доходность – 10%. Стоит ли продать облигацию и почему?

3.9. Курс облигации равен 95, купонный доход – 15%, выплаты ежеквартально. Найти текущую доходность облигации.

3.10. Чему равна выраженная в процентах доходность к погашению облигации со сроком обращения 9 лет, номинальной стоимостью 2000 и купонной ставкой 9% при розничной цене на 10% больше номинальной?

3.11. Чему равна доходность к погашению, выраженная в процентах, облигации со сроком обращения 8 лет, номинальной стоимостью 2000 и купонной ставкой 8% при розничной цене на 7% меньше номинальной?

3.12. Чему равна доходность к погашению облигации со сроком обращения 10 лет и номинальной стоимостью N = 2000 у.е., купонные выплаты по которой составляют 80 у.е. ежегодно, если облигация продается по 1900 у.е.?

3.13. Рыночная цена облигации составляет 4000 у.е., номинальная стоимость равна 2500 у.е., срок до погашения 5 лет, купонные платежи – 600 у.е., процентная ставка – 10%. Чему равна текущая стоимость и курс облигации?

3.14. Облигация продается по номинальной ставке со сроком погашения 10 лет и купонной ставкой 12%. Чему равна дюрация облигации, выраженная в годах?

3.15. Облигация со сроком погашения 10 лет и купонной ставкой 10% имеет доходность к погашению 8%. Чему равна дюрация облигации, выраженная в годах?

3.16. Дюрация облигации равна 8. На сколько процентов изменилась цена облигации при увеличении доходности к погашению с 12% до 12,5%?

3.17. Дюрация облигации составляет 5 лет. Чему равно относительное процентное изменение цены облигации при увеличении доходности с 7% до 8%?

3.18. Облигации со сроком погашения 6 лет, купонной ставкой 11% и номиналом 1000 у.е. продается по цене 800 у.е. Чему равна доходность к погашению облигации?

3.19. Облигации со сроком погашения 5 лет, купонной ставкой 10% и номиналом 2000 у.е. продается по цене 1900 у.е. Чему равна доходность к погашению облигации?

3.20. Облигации продается за 2000 у.е. при доходности к погашению 6%. Дюрация облигации составляет 8 лет. Чему равна новая цена облигации при увеличении доходности до 7%?

3.21. Облигация номиналом 1000 руб., сроком погашения 6 лет и полугодовыми купонными платежами по годовой купонной ставке 13% продается через 1,38 года, Найти ее чистую стоимость, если годовая процентная ставка составляет 11%.

3.22. На 24.08.1998 найти чистую цену облигации номиналом 1000 USD, датой погашения 15.10.2010, годовыми купонами по купонной ставке 10% и при процентной ставке 8%. Использовать правило ACT/ACT. Найти чистую цену такой же облигации с полугодовыми и квартальными купонными выплатами.

Ответы и рекомендации к решению

3.1. 1034,71; 967,07; 1000. **3.2.** 850,47.

3.3. 45131,58; 40872,49; 50000.

3.4. 3845,8; 3500; 3345,23; 122,86%. **3.5.** 0,08; 0,0639; 0,0887.

3.6. 0,635. **3.7.** 0,08; 0,0664; 0,0874.

3.8. Найдем текущую стоимость облигации

$$P = C \cdot \frac{1- 1+r^{-n}}{r} + N \cdot (1+r)^{-n} =$$

$$= 700 \cdot \frac{1- (1=0/1)^{-5}}{0{,}1} + 2500 \cdot (1+0{,}1)^{-5} = 4205{,}85 > 40000.$$

Продавать облигацию не стоит.

3.9. 15,79%. **3.10.** 7,47%. **3.11.** 9,24%. **3.12.** 4,63%.

3.13. 3826,78: 1,6.

3.14. Если облигация продается по номиналу, то $c = \rho$ и

$D = \frac{1+\rho}{\rho}\left(1 - (1+\rho)^{-n}\right) = 6{,}328.$ **3.15.** 6,97.

3.16. Уменьшится на 3,57%. **3.17.** Уменьшится на 4,67%.

3.18. 16,23%. **3.19.** 11,34%. **3.20.** 1849,06. **3.21.** 1081,35.

3.22. 1151,33 USD; 1166,49 USD; 1174,14 USD.

Глава 4

ПОРТФЕЛЬ ЦЕННЫХ БУМАГ

Эта глава посвящена актуальной теме финансовой теории, общее название которой теория инвестиций. Здесь мы рассмотрим инвестиции в ценные бумаги. Надо сказать, что многие из рассмотренных ранее финансовых операций тоже являются инвестициями, однако доходность этих операций считалась строго определенной, лишенной риска. Вложение же денежных средств в ценные бумаги как и в любой бизнес весьма рискованно, из-за чего многие индивидуумы предпочитают хранить деньги в банке. Однако, инвестирование в ценные бумаги гораздо более доходно, чем вложение денег на банковский депозит.

Главная цель любого инвестора – обеспечить максимальную доходность инвестиций. Для достижения этой цели необходимо определить активы и пропорции имеющихся денежных средств на покупку этих активов. Другой не менее важной целью является обеспечение наименьшего риска. Инвестирование в портфель ценных бумаг должно быть таким, чтобы доходность была как можно более высокой, а риск наименьшим. Трудность заключается в том, что большая доходность, как правило, сопряжена с большим риском.

Решение задачи выбора активов составляет содержание теории портфеля. В данной главе мы дадим только введение в эту теорию, ограничившись портфелями Блэка (допускающими отрицательные вложения в ценные бумаги) и акцентировав внимание на портфелях, состоящих из двух ценных бумаг.

4.1. Доходность ценной бумаги и портфеля

Для определения доходности ценной бумаги (как и любого актива) за определенный промежуток времени (например, год) будем исходить из стоимости ценной бумаги в начале периода p_0 и ее стоимости в конце периода p_1 Возможные дивиденды за рассматриваемый период обозначим через d. Тогда **доходностью** ценной бумаги этот период называется величина

$$r = \frac{p_1 + d - p_0}{p_0} \ . \tag{4.1}$$

Если не рассматривать дивиденды и другие факторы, от которых зависит доходность (например, инфляцию) то формула (4.1) примет вид $r = \frac{p_1 - p_0}{p_0}$.

Пусть портфель X формируется из n ценных бумаг со стоимостями в начале периода p_{01}, p_{02},..., p_{0n}, стоимостями в конце периода p_{11}, p_{12},..., p_{1n} и дивидендами d_1, d_2,..., d_n. При формировании портфеля покупается k_i бумаг –го вида, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда начальная стоимость портфеля равна $p_{X0} = k_1 p_{01} + k_2 p_{02} + \dots + k_n p_{0n}$, стоимость портфеля в конце периода $p_{X1} = k_1 p_{11} + k_2 p_{12} + \dots + k_n p_{1n}$, дивиденды $d_X = k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_n d_n$.

Доходностью портфеля X является величина

$$r_X = \frac{p_{X1} + d_X - p_{X0}}{p_{X0}} \tag{4.2}$$

Портфелем, состоящим из n видов ценных бумаг, называется вектор

$X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, где $x_i = \frac{p_{0i}}{p_{X0}}$ – доля инвестиций в ценные бумаги вида i. $r_i = \frac{p_{1i} + d_i - p_{0i}}{p_{0i}}$ – доходность ценной бумаги вида i.

Доходность портфеля X выражается формулой

$$r_X = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \dots + x_n \cdot r_n \tag{4.3}$$

Пример 4.1. Портфель состоит из четырех видов акций, количество которых, а также их стоимости в начале и в конце периода приведены в таблице. Дивиденды не выплачиваются.

	A	B	C	D
Количество	200	300	200	400
Начальная цена	80	80	180	300
Конечная цена	100	60	200	320

Найти доходность портфеля двумя способами по формулам (4.2), (4.3).

Решение. Найдем начальную и конечную цены портфеля

$$p_{X0} = 200 \cdot 80 + 300 \cdot 80 + 200 \cdot 180 + 400 \cdot 300 = 196\,000,$$

$$p_{X1} = 200 \cdot 100 + 300 \cdot 60 + 200 \cdot 200 + 400 \cdot 320 = 206\,000.$$

По формуле (4.2) получим

$$r = \frac{p_{X1} - p_{X0}}{p_{X0}} = \frac{206000 - 196000}{196000} = 0{,}051\ (5{,}1\%).$$

Для применения формулы (4.3) вычислим ценовые доли каждого вида акций и их доходности.

$$x_1 = \frac{80 \cdot 200}{196000} = 0{,}0816\ (8{,}16\%); \quad x_2 = \frac{80 \cdot 300}{196000} = 0{,}1225\ (12{,}24\%);$$
$$x_3 = \frac{180 \cdot 200}{196000} = 0{,}1837\ (18{,}37\%); \ x_4 = \frac{400 \cdot 300}{196000} = 0{,}6122\ (61{,}22\%);$$
$$r_1 = \frac{100 - 80}{80} = 0{,}25\ (25\%); \qquad r_2 = \frac{60 - 80}{80} = -0{,}25\ (-25\%);$$
$$r_3 = \frac{200 - 180}{180} = 0{,}1111\ (11{,}11\%); \ r_4 = \frac{320 - 300}{300} = 0{,}0667\ (6{,}67\%).$$

Доходность портфеля по формуле (4.3) равна

$$r = 0{,}0615 \cdot 0{,}25 + 0{,}1224 \cdot (-0{,}25) + 0{,}1837 \cdot 0{,}1111 +$$
$$+0{,}6122 \cdot 0{,}0667 = 0{,}051\ (5{,}1\%),$$

что совпадает с результатом, полученным по формуле (4.2). ■

Начальные стоимости ценных бумаг известны, а стоимости ценных бумаг в конце периода также как и доходности неизвестны, носят случайный характер, и мы можем найти их вероятностные характеристики с помощью кропотливого анализа статистических материалов. Доходность каждой ценной бумаги является случайной величиной R_i. Математическое ожидание $\mu_i = E(R_i)$ этой случайной величины называется ее **эффективностью** и служит заменой детерминированной доходности. Заменой детерминированной доходности портфеля служит **эффек-**

тивность портфеля μ, называемая также **доходностью** и определяемая по формуле

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \cdots + x_n \cdot \mu_n \,. \tag{4.4}$$

4.2. Риск и корреляция ценных бумаг

Основной особенностью вложения денежных средств в ценные бумаги, как и в любые другие активы, является случайный характер доходности таких вложений. Это приводит к неопределенности величины доходности финансовой операции. А это означает, что финансовая операция характеризуется еще одной необыкновенно важной величиной, а именно *риском*.

Понятие риска. Общее определение риска неясно и неоднозначно. Интуитивно риск понимается как возможные потери, связанные с проведением финансовой операции в условиях неопределенности. Назовем риском финансовой операции в условиях неопределенности отклонение доходности от среднего значения.

Существуют следующие финансовые риски.

Банковский риск, который подразделяется на внешний и внутренний. К внешним рискам относятся несвязанные с деятельностью банка или клиента обстоятельства (политические, экономические и т.п.). Внутренние риски подразделяются на потери по основной и вспомогательной деятельности банка. Первые представляют собой наиболее распространенную группу рисков – кредитный, процентный, валютный и рыночный риски. Вторые включают потери по формированию депозитов, риски по новым видам деятельности, риски банковских злоупотреблений.

Кредитный риск – опасность невозврата в срок взятого кредита.

Валютный риск – опасность валютных потерь, вызванная колебанием курса иностранной валюты при проведении внешнеторговых операций.

Инвестиционный риск – риск обесценивания капиталовложений в результате действий органов государственной власти и управления.

Инфляционный риск – возможность обесценивания денежных активов, доходов и прибыли в связи сростом инфляции. Одним из методов страхования инфляционного риска является включение в состав будущего дохода инфляционной премии.

Депозитный риск – возможность досрочного отзыва депозита.

Страховой риск – предполагаемое событие, на случай которого проводится страхование, Событие, рассматриваемое в качестве страхового риска, должно обладать признаками случайности его наступления.

Ценовой риск – риск потерь из-за будущих изменений цены товара или финансового инструмента.

Риск ликвидности активов – невозможность обеспечить банком выплаты денежных средств своим клиентам.

Риск разорения – вероятность больших потерь, ведущих к разорению инвестора.

Найти точное распределение вероятности случайной величины доходности актива в общем случае весьма затруднительно. Наиболее распространенной априорной функцией распределения является нормальное распределение. Плотность нормального распределения задается функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

А вероятность попадания случайной величины ξ в промежуток $(a; b)$ вычисляется по формуле

$$P(a < \xi < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – хорошо изученная функция Лапласа с доступными таблицами значений.

Несмотря на невозможность точно указать функцию распределения вероятностей доходности, с помощью кропотливой обработки статистических данных возможно оценить основные параметры рассматриваемой случайной величины. Это, прежде всего, математическое ожидание $E(\xi) = m$, которое носит также название среднего и оценивается как среднее значение статистических данных. А также дисперсия $D(\xi) = E((\xi - m)^2)$. Величина $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$ носит название среднего квадратичное отклонения. Для случайной величины доходности ценной бумаги величина σ носит название риска и, действительно, является мерой риска вложения средств. Для нормального распределения математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение как раз и являются параметрами m и σ функции плотности.

Итак, для отдельно взятой ценной бумаги A_i можно найти статистическую оценку ее ожидаемой (средней) доходности μ_i, которая называется эффективностью ценной бумаги, а на языке математики и статистики есть ни что иное как математическое ожидание случайной величины ξ_i, $\mu_i = E(\xi_i)$. Также можно найти статистическую оценку риска r_i, который на языке математики и статистики трактуется как среднее квадратичное отклонение случайной величины ξ_i, $r_i = \sigma(\xi_i)$. Однако этого недостаточно, чтобы оценить риск портфеля ценных бумаг. Дело в том, что доходности различных бумаг, входящих в портфель, вообще говоря, зависят друг от друга. Мерой этой зависимости является корреляция. Перейдем к точным определениям.

Ковариацией $cov(X,Y)$ двух случайных величин X, Y называется математическое ожидание произведения их отклонений от средних значений

$$cov(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big). \tag{4.5}$$

Коэффициентом корреляции $\rho(X,Y)$ двух случайных величин X, Y называется ковариация этих величин деленная на произведение их средних квадратичных отклонений,

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Коэффициент корреляции является мерой зависимости случайной величины и обладает свойством $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$. Для независимых случайных величин X, Y $\rho(X,Y) = 0$.

$$\rho(X,X) = 1, cov(X,Y) = \rho(X,Y)\sigma(X)\sigma(Y).$$

Рассмотрим портфель, состоящий из n ценных бумаг A_i, $i = 1,2,\dots,n$, доходности которых являются случайными величинами R_i с эффективностями $\mu_i = E(R_i)$ и рисками $\sigma_i = \sigma(R_i)$. Пусть x_i – ценовые доли бумаг A_i $(x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1)$. Тогда доходностью портфеля является случайная величина $R = x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n$. Эффективность равна

$$\mu = E(R) = E(x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n) = x_1E(R_1) +$$
$$+x_2E(R_2) + \dots + x_nE(R_n) = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \dots + x_n\mu_n.$$

Обозначим через ρ_{ij} коэффициент корреляции случайных величин R_i и R_j. Тогда $cov(R_i, R_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Дисперсия равна квадрату риска и равна

$$\sigma^2 = E(R-\mu)^2 = E(\,(x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n - x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \dots +$$
$$+x_n\mu_n)^2) = E\left(\left(x_1(R_1-\mu_1) + x_2(R_1-\mu_2) + \dots + x_1(R_n-\mu_n)\right)^2\right) =$$
$$\sum\nolimits_{i,j} x_ix_jE(R_i-\mu_i)(R_j-\mu_j) = \sum\nolimits_{i,j} x_ix_jcov(R_i,R_j) = \sum\nolimits_{i,j} x_ix_j\,\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j.$$

Таким образом, имеем три основных соотношения, выражающие ценовые доли, эффективность и риск портфеля и составляющих его ценных бумаг

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ \mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \dots + x_n\mu_n \\ \sigma^2 = \sum\limits_{i,j} x_ix_j\,\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \end{cases} \tag{4.6}$$

Попарные ковариации различных ценных бумаг образуют матрицу

$$V = \begin{pmatrix} cov(R_1,R_1)\; cov(R_1,R_2) \dots\; cov(R_1,R_n) \\ cov(R_2,R_1)\; cov(R_2,R_2) \dots\; cov(R_2,R_n) \\ \dots\;\dots\;\dots \\ cov(R_n,R_1)\; cov(R_n,R_2) \dots\; cov(R_n,R_n) \end{pmatrix},$$

которая называется ковариационной матрицей.

Матрица

$$\begin{pmatrix} 1\;\rho_{12} \dots\; \rho_{1n} \\ \rho_{21}\; 1\; \dots\; \rho_{2n} \\ \dots\;\dots\;\dots \\ \rho_{n1}\;\rho_{n2} \dots\; 1 \end{pmatrix}$$

называется корреляционной матрицей. Дисперсия σ^2 выражается в матричном виде как произведение вектор-строки ценовых долей портфеля $X^T = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$ на ковариационную матрицу A и на вектор-столбец X,

$$\sigma^2 = X^T A X\ . \qquad (4.7)$$

Методы уменьшения риска финансовых операций. Обратим внимание на два очень важных подхода. Это диверсификация и хеджирование финансовых операций.

Диверсификация. Метод диверсификации применим к некоррелированных финансовым операциям. Он основан на том, что при увеличении числа независимых финансовых операций, квадратичное отклонение средней доходности этих операций уменьшается.

Точнее, для средней доходности $R = \frac{1}{n}(R_1 + R_2 + \dots + R_n)$ n независимых финансовых операций с одинаковыми дисперсиями $D(R_k)$ дисперсия средней доходности равна $D(R) = \frac{1}{n}D(R_k)$. Следовательно, риск средней доходности $r = \frac{1}{\sqrt{n}}r_k$ обратно пропорционален $\sqrt{n}$ и стремится к нулю при увеличении числа операций n.

Так что в соответствии с народной мудростью, состоящей в том, что яйца надо перевозить в разных корзинах, инвестировать лучше в большое количество разных ценных бумаг.

Хеджирование. Суть хеджирования состоит в том, для основной финансовой операции подбирается такая финансовая операция, доходность которой увеличивается при уменьшении доходности основной операции. Это возможно, если коэффициент корреляции этих операций отрицателен, желательно близок к минус единице.

Например, если в формулу $D(R_1 + R_2) = r_1^2 + 2\rho_{12}r_1r_2 + r_2^2$ подставить $\rho = -1$, $r_1 = r_2$, получим $D(R_1 + R_2) = 0$, т.е. суммарная финансовая операция является безрисковой.

Пример 4.2. Доли ценных бумаг в портфеле равны $x_1 = 0{,}3$; $x_2 = 0{,}4$; $x_3 = 0{,}3$. Ожидаемые доходности (эффективности) равны $\mu_1 = -10\%$, $\mu_1 = 15\%$, $\mu_3 = 18\%$, а ковариационная матрица равна $V = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 7 \\ -5 & 4 & 6 \\ 7 & 6 & 16 \end{pmatrix}$. Найти ожидаемую доходность и риск портфеля.

Решение. Ожидаемую доходность найдем по формуле (4.4).

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + x_3 \cdot \mu_3 = 0{,}3 \cdot (-10) + 0{,}4 \cdot 15 + 0{,}3 \cdot 16 = 7{,}8\%$$

Дисперсию найдем по формуле (4.6)

$$\sigma^2 = X^T AX = (0{,}3\ 0{,}4\ 0{,}3)\begin{pmatrix} 9\ -5\ 7 \\ -5\ 4\ 6 \\ 7\ 6\ 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} =$$

$$= (0{,}3\ 0{,}4\ 0{,}3)\begin{pmatrix} 0{,}3 \cdot 9 + 0{,}4 \cdot (-5) + 0{,}3 \cdot 7 \\ 0{,}3 \cdot (-5) + 0{,}4 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 6 \\ 0{,}3 \cdot\ 7 + 0{,}4 \cdot 6 + 0{,}3 \cdot 16 \end{pmatrix} =$$

$$= (0{,}3\ 0{,}4\ 0{,}3)\begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 1{,}9 \\ 9{,}3 \end{pmatrix} = 0{,}3 \cdot 2{,}8 + 0{,}4 \cdot 1{,}9 + 0{,}3 \cdot 9{,}3 = 4{,}39.$$

Риск равен $\sigma = \sqrt{4{,}39} = 2{,}1$. ■

Пример 4.3. Дана ковариационная матрица $V = \begin{pmatrix} 4\ -6\ 5 \\ -6\ 9\ 8 \\ 5\ 8\ 16 \end{pmatrix}$. Найти корреляционную матрицу.

Решение. Средние квадратичные отклонения ценных бумаг, составляющих портфель, равны $\sigma_1 = \sqrt{4} = 2$, $\sigma_2 = \sqrt{9} = 3$, $\sigma_3 = \sqrt{16} = 4$.

Тогда $\rho_{12} = \frac{cov(R_1,R_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-6}{2 \cdot 3} = -1$, $\rho_{13} = \frac{cov(R_1,R_3)}{\sigma_1\sigma_3} = \frac{5}{2 \cdot 4} = 0{,}625$, $\rho_{23} = \frac{cov(R_3,R_2)}{\sigma_2\sigma_3} = \frac{8}{4 \cdot 3} = 0{,}67$.

Корреляционная матрица равна $\begin{pmatrix} 1\ -1\ 0{,}625 \\ -1\ 1\ 0{,}67 \\ 0{,}625\ 0{,}67\ 1 \end{pmatrix}$. ■

Пример 4.4. Данные о распределении доходностей двух ценных бумаг A и B приведены в таблице. Найти ковариацию и коэффициент корреляции этих бумаг.

A	–10	–12	11	4	8
B	12	14	18	13	–10
P (вероятность)	0,1	0,15	0,35	0,2	0,2

Решение. Найдем доходности μ_1 и μ_2 бумаг A и B.

$$\mu_1 = 0{,}1 \cdot (-10) + 0{,}15 \cdot (-12) + 0{,}35 \cdot 11 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 8 = 3{,}45,$$

$$\mu_2 = 0{,}1 \cdot 12 + 0{,}15 \cdot 14 + 0{,}35 \cdot 18 + 0{,}2 \cdot 13 + 0{,}2 \cdot (-10) = 10{,}2.$$

Найдем ковариацию по формуле (4,5)

$$cov(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big) = \sum_{i=1}^{5} p_i(x_i - \mu_1)(y_i - \mu_2) =$$

$$= 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot (-10 - 3.45) \cdot (12 - 10{,}2) + 0{,}15 \cdot (-12 - 3.45) \cdot$$

$$\cdot (14 - 10{,}2) + 0{,}35 \cdot (11 - 3.45) \cdot (18 - 10{,}2) + 0{,}2 \cdot (4 - 3.45) \cdot$$

$$\cdot (13 - 10{,}2) + 0{,}2 \cdot (8 - 3.45) \cdot (-10 - 10{,}2) = -8{,}69.$$

Найдем средние квадратичные отклонения σ_1 и σ_2 бумаг A и B.

$$\sigma_1 = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{5} p_i(x_i - \mu_1)^2} =$$

$$\sqrt{0{,}1 \cdot (-13{,}45)^2 + 0{,}15 \cdot (-15{,}45)^2 + 0{,}35 \cdot 7{,}55^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}55^2 + 0{,}2 \cdot 4{,}55^2} = 8{,}83.$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{5} p_i(y_i - \mu_2)^2} =$$

$$\sqrt{0{,}1 \cdot (1{,}8)^2 + 0{,}15 \cdot (3{,}8)^2 + 0{,}35 \cdot 7{,}8^2 + 0{,}2 \cdot 2{,}8^2 + 0{,}2 \cdot (-20{,}2)^2} = 10{,}3421.$$

Коэффициент корреляции равен

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-8{,}69}{8{,}83 \cdot 10{,}3421} = -0{,}09516. \ \blacksquare$$

4.3. Портфель из двух ценных бумаг. Случай полной корреляции и случай полной антикорреляции

Для портфеля, состоящего из двух ценных бумаг имеется только один коэффициент корреляции ρ_{12}, который будем обозначать через ρ. Выражение дисперсии портфеля имеет простой вид.

$$\sigma^2 = E(R - \mu)^2 = E(\ (x_1R_1 + x_2R_2 - x_1\mu_1 + x_2\mu_2)^2) =$$

$$= E\left(\big(x_1(R_1 - \mu_1) + x_2(R_1 - \mu_2)\big)^2\right) =$$

$$= E(x_1^2(R_1 - \mu_1)^2 + 2x_1x_2(R_1 - \mu_1)(R_1 - \mu_2) + x_2^2(R_2 - \mu_2)^2) =$$

$$= x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\rho + x_2^2\sigma_2^2.$$

Соотношения (4.6) примут вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \\ \sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 \end{cases} \tag{4.8}$$

Проанализируем портфель двух ценных бумаг при различных значениях коэффициента корреляции ρ.

Случай полной корреляции, $\rho = 1$. В этом случае любое относительное увеличение доходности одной из бумаг влечет за собой пропорциональное относительное увеличение другой бумаги, а относительное уменьшение доходности одной из бумаг влечет за собой пропорциональное относительное уменьшение другой бумаги. Риск имеет простое выражение, а именно, $\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\sigma_2^2 = (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2)^2$. Следовательно $\sigma = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2$. Система уравнений (4.8) примет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \\ \sigma = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 \end{cases} \tag{4.9}$$

Пользуясь первым уравнением системы (4.8), заменим переменные $x_1 = 1 - t$, $x_2 = t$, $t\epsilon[0;1]$. В итоге получим параметрическое уравнение отрезка

$$[A;B]\colon \begin{cases} (1-t)\mu_1 + t\mu_2 = \mu \\ (1-t)\sigma_1 + t\sigma_2 = \sigma \end{cases} \tag{4.10}$$

В системе координат $\mu o \sigma$ точка A $(t = 0)$ имеет координаты $A(\mu_1;\sigma_1)$, а точка B $(t = 1)$ – $B(\mu_2;\sigma_2)$.

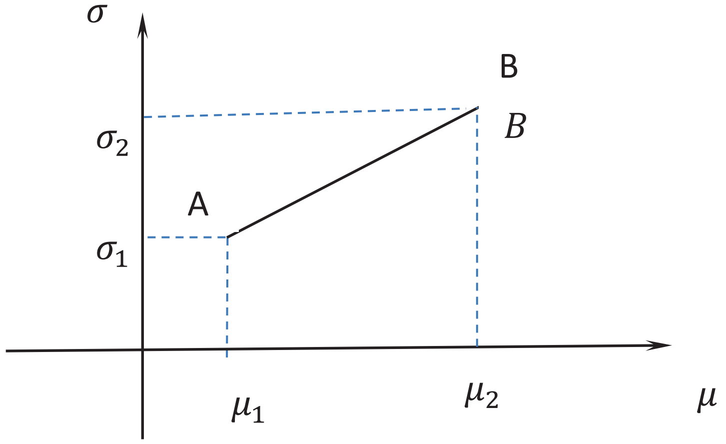

Рисунок 4.1 – Зависимость между риском и доходность портфеля из двух бумаг в случае полной корреляции, $\rho = 1$.

Если инвестор формирует портфель минимального риска, то он должен включить только бумагу типа A. Портфель в этом случае имеет вид $X = (1; 0)$, доходность портфеля равна μ_1, риск σ_1.

При формировании портфеля максимальной доходности необходимо инвестировать только в бумагу B. Портфель имеет вид $X = (0; 1)$, его доходность равна μ_2, риск σ_1.

Инвестор может выбирать портфель, параметры которого принадлежат множеству допустимых портфелей, т.е. принадлежат отрезку $[A; B]$. Выбор может определятся как индивидуальной склонностью инвестора к риску, так и рассмотрением других величин, характеризующий рынок ценных бумаг, например, функцию полезности.

Пример 4.5. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых равны $A(6; 10)$, $B(20; 30)$. Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Найти портфель минимального риска и портфель максимальной доходности.

Решение. Так как допустимое множество портфелей представляет из себя отрезок $[A; B]$ (см. рис. 4.1), то видно, что портфель минимального риска состоит только из бумаги A и имеет вид $(1; 0)$, а его параметры (доходность и риск) совпадают с параметрами бумаги $A(6; 10)$. Портфель максимальной доходности состоит только из бумаги B и имеет вид $(0; 1)$, а его параметры совпадают с параметрами бумаги $B(20; 30)$. ■

Пример 4.6. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых (в процентах) равны $A(4; 10)$, $B(20; 40)$. Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Доходность портфеля равна 15%. Найти портфель и его риск.

Решение. Из первого равенства системы (4.10)

$$(1 - t)\mu_1 + t\mu_2 = \mu,$$

подставив в него $\mu = 15$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 20$, найдем значение t. Имеем $4(1 - t) + 20t = 15$. Следовательно $4 - 4t + 20t = 15$. Откуда $16t = 11$, $t = 0{,}6875$.

Риск портфеля определим из второго равенства системы (4.10).

$$\sigma = (1 - t)\sigma_1 + t\sigma_1 = 0{,}3125 \cdot 10 + 0{,}6875 \cdot 40 = 30{,}625.$$

Портфель имеет вид $(0{,}3125; 0{,}6875)$ ■

Пример 4.7. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых (в процентах) равны $A(20;40)$, $B(30;70)$. Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Риск портфеля равен 50%. Найти портфель и его риск.

Решение. Из второго равенства системы (4.10)

$$(1-t)\sigma_1 + t\sigma_2 = \sigma,$$

подставив в него $\sigma = 50$, $\sigma_1 = 40$, $\sigma_2 = 70$, найдем значение t. Имеем $40(1-t) + 70t = 50$. Следовательно $40 - 40t + 70t = 50$. Откуда $30t = 10$, $t = 0{,}333$.

Доходность портфеля определим из второго равенства системы (4.10).

$$\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_1 = 0{,}667 \cdot 20 + 0{,}333 \cdot 30 = 23{,}33.$$

Портфель имеет вид (0,667; 0,333) ■

Портфель полной антикорреляции, $\rho = -1$. В этом случае любое относительное увеличение доходности одной из бумаг влечет за собой пропорциональное относительное уменьшение другой бумаги, а относительное уменьшение доходности одной из бумаг влечет за собой пропорциональное относительное увеличение другой бумаги. Риск имеет простое выражение, а именно

$$\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\sigma_2^2 = (x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2)^2.$$

Следовательно $\sigma = |x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2|$. Система уравнений (4.8) примет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \\ \sigma = |x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2| \end{cases} \tag{4.11}$$

Как видно из выражения риска в системе (4.11), в случае полной антикорреляции возможно полное хеджирование, т.е. можно подобрать ценовые доли x_1, x_2 так, что риск портфеля будет равен 0. Ценовые доли безрискового портфеля являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2 = 0. \end{cases}$$

Выразим x_2 из первого уравнения и подставим во второе. $x_1 = 1 - x_2$, $(1 - x_2)\sigma_1 - x_2\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 - (\sigma_1 + \sigma_2)x_2 = 0$, $(\sigma_1 + \sigma_2)x_2 = \sigma_1$. Следовательно,

$$x_2 = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_2)}, x_1 = 1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Таким образом, безрисковый портфель имеет вид

$$X = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}; \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right). \quad (4.12)$$

Заметим, что портфель нулевого риска не зависит от доходностей бумаг, и определяется только их рисками, причем ценовая доля одной бумаги пропорциональна риску другой.

Вычислим доходность безрискового портфеля $\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2$.

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \ . \quad (4.13)$$

Множество допустимых портфелей в случае полной антикорреляции представляет собой ломаную линию ACB.

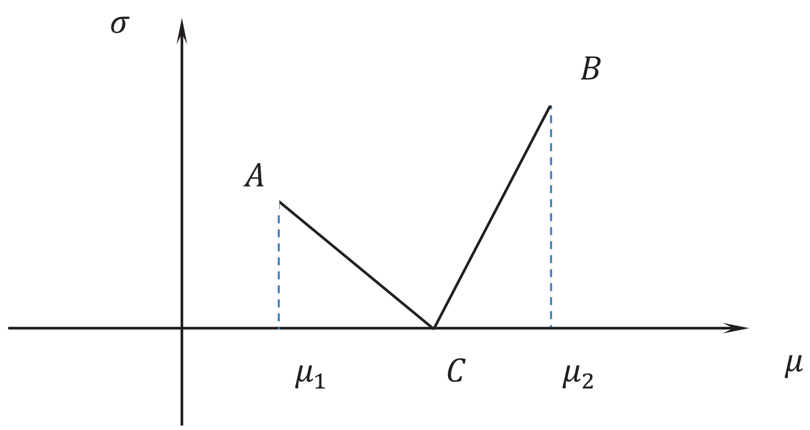

Рисунок 4.2 – Зависимость между риском и доходностью портфеля из двух бумаг в случае полной антикорреляции, $\rho = -1$.

Пример 4.8. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых равны (в процентах) $A(10; 20)$, $B(30; 60)$.

Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Найти портфель минимального риска и его доходность, а также портфель максимальной доходности и его риск.

Решение. В случае полной корреляции портфелем минимального риска является безрисковый портфель. Его доходность по формуле (4.12) равна

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{10 \cdot 60 + 30 \cdot 20}{20 + 60} = 15\,.$$

Портфель минимального риска, заданный ценовыми долями по формуле (4.11) равен

$$X = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2};\ \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) = \left(\frac{60}{20 + 60};\ \frac{20}{20 + 60}\right) = (0{,}75; 0{,}25)$$

Таким образом, портфель минимального риска имеет вид $X = (0{,}75; 0{,}25)$, а его параметры равны $(15; 0)$.

В случае полной антикорреляции портфель максимальной доходности состоит из одной бумаги максимальной доходности, в нашем случае из бумаги B, (см. рис 4.2). В ценовых долях он имеет вид $(0; 1)$, а его параметры доходности и риска равны $(30; 60)$. ■

Пример 4.9. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых равны $A(0{,}3; 0{,}4)$, $B(0{,}4; 0{,}6)$. Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Найти портфель нулевого риска и его доходность.

Решение. Портфель минимального риска, заданный ценовыми долями по формуле (4.11) равен

$$X = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2};\ \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) = \left(\frac{0{,}6}{0{,}4 + 0{,}6};\ \frac{0{,}4}{0{,}4 + 0{,}6}\right) = (0{,}6; 0{,}4)\,.$$

Его доходность по формуле (4.12) равна

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4}{0{,}4 + 0{,}6} = 0{,}34\,.$$

Можно для проверки найти доходность портфеля по основной формуле $\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}34$. ■

Пример 4.10. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемые доходности которых равны 15% и 27%, а ценовые доли относятся как 2:1. Найти портфель его доходность.

Решение. Найдем ценовые доли портфеля. Так как $x_1 : x_2 = 2 : 1$, то $x_1 = 2t$, $x_2 = t$. Так как $x_1 + x_2 = 1$, то $2t + t = 1$, $t = \frac{1}{3}$. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Доходность портфеля равна

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = \frac{1}{3} \cdot 15 + \frac{2}{3} \cdot 27 = 5 + 18 = 33\%. \blacksquare$$

Пример 4.11. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых равны $A(15; 26)$, $B(30; 40)$. Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Доходность портфеля равна 20%. Найти портфель и его риск.

Решение. Подставив данные задачи в систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = \mu \end{cases}$, получим $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 15x_1 + 30x_2 = 20. \end{cases}$

Разделив второе уравнение на 5, получим $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}$.

Вычтем из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 3. Получим $3x_2 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{2}{3}$.

Найдем риск портфеля

$$\sigma = |x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2| = \left|\frac{1}{3} \cdot 26 - \frac{2}{3} \cdot 40\right| = 18.$$

Итак, портфель равен $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, а его риск равен 18%. $\blacksquare$

Пример 4.12. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых равны $A(10; 15)$, $B(20; 25)$. Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Риск портфеля равна 5%. Найти портфель и его доходность.

Решение. Подставив данные задачи в систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \sigma = |x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2| \end{cases}$, получим $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ |15x_1 - 25x_2| = 5 \end{cases}$.

Рассмотрим 2 случая.

В первом случае выражение под знаком модуля отрицательное, и мы имеем $15x_1 - 25x_2 = -5$, Разделим на 5. $3x_1 - 5x_2 = -1$. В результате $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 = -1 \end{cases}$. Ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на 5, получим $8x_1 = 4$. Следовательно $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 0{,}5$. Портфель равен $(0{,}5; 0{,}5)$, его доходность равна $\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 20 = 15$.

Во втором случае выражение под знаком модуля положительное, и мы имеем $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 15x_1 - 25x_2 = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 = 1 \end{cases}$. Ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на 5. Получим $8x_1 = 6$. Следовательно $x_1 = 0{,}75$, $x_2 = 0{,}25$. Портфель равен $(0{,}75; 0{,}25)$, его доходность равна $\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = 0{,}75 \cdot 10 + 0{,}25 \cdot 20 = 12{,}5$.

Неоднозначность решения задачи связана с тем, что допустимое множество портфелей пересекает горизонтальную прямую $\sigma = 0{,}05$ в двух точках (см. рис. 4.2), имеющих разное значение доходности. Практическое значение имеет только первое решение, так как при равном риске у него большая доходность.

4.4. Портфель произвольной корреляции из двух бумаг

Если $\rho \neq \pm 1$, то множество допустимых портфелей представляет из себя дугу гиперболы, лежащую внутри ΔABC и соединяющую точки A и B. Эти точки соответствуют портфелям $(1; 0)$ и $(0; 1)$, состоящим только из одного вида бумаг.

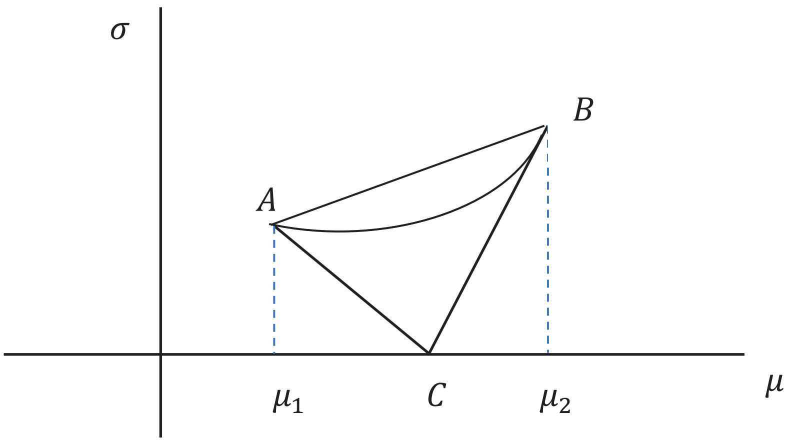

Рисунок 4.3 – Отрезок $[A; B]$ – множество допустимых портфелей при $\rho = 1$.
Ломаная линия ABC – множество допустимых портфелей при $\rho = -1$.
Дуга AB – множество допустимых портфелей при $\rho \neq \pm 1$.

Независимые портфели, $\rho = 0$. В этом случае система уравнений (4.8) принимает следующий вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \\ \sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 \end{cases} \quad (4.14)$$

Найдем портфель минимального риска и его доходность и риск. Для этого необходимо найти точку минимума функции $\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2$. Сделаем замену переменной $x_2 = t$, тогда из первого уравнения системы (4.13)

$$x_1 = 1 - t \text{ и } \sigma^2 = (1-t)^2\sigma_1^2 + t^2\sigma_2^2.$$

Функция $\sigma^2(t)$ является параболой с ветвями вверх, которая принимает наименьшее значение в вершине. Вершина параболы находится из уравнения $\left(\sigma^2(t)\right)' = 0.$ Найдем производную

$$\left(\sigma^2(t)\right)' = ((1-t)^2\sigma_1^2 + t^2\sigma_2^2)' = -2(1-t)\sigma_1^2 + 2t\sigma_2^2 =$$
$$= 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t - 2\sigma_1^2.$$

Решим уравнение $2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t - 2\sigma_1^2 = 0.$

Отсюда $2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t = 2\sigma_1^2.$

Следовательно $t = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$

Поэтому $x_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}, x_1 = 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$

Портфель минимального риска равен

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}; \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) \tag{4.15}$$

Доходность портфеля минимального риска равна

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \tag{4.16}$$

Минимальный риск портфеля из двух независимых бумаг равен

$$\begin{aligned}\sigma = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^4 + \sigma_1^4\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}} = \\ = \sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\end{aligned} \tag{4.17}$$

Пример 4.13. Портфель состоит из независимых бумаг с рисками $\sigma_1 = 0{,}2$ и $\sigma_2 = 0{,}3$. Найти портфель минимального риска и его риск.

Решение. Найдем портфель по формуле (4.14)

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) = \left(\frac{0{,}3^2}{0{,}2^2 + 0{,}3^2}; \frac{0{,}2^2}{0{,}2^2 + 0{,}3^2}\right) =$$

$$= (0{,}692 : 0{,}308\,).$$

Риск портфеля по формуле (4.16) равен

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{\sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2}} = 0{,}166\,.$$

Как видим, риск портфеля меньше риска каждой из бумаг. Так что рассмотренный пример наглядно демонстрирует возможность уменьшения риска с помощью диверсификации. ■

Пример 4.14. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг $A(0{,}7; 0{,}3)$ и $B(0{,}5; x)$ (первая координата равна доходности ценной бумаги, а вторая – риску) имеет ценовые доли $X = (0{,}6; 0{,}4)$. Найти риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

Решение. Вычислим ценовую долю второй бумаги по формуле (4.15) $x_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{0{,}3^2}{0{,}3^2+x^2} = \frac{0{,}09}{0{,}09+x^2}$ и приравняем к данной доле $x_2 = 0{,}4$.

$\frac{0{,}09}{0{,}09+x^2} = 0{,}4$. Отсюда $0{,}09 = 0{,}4(0{,}09 + x^2)$. Следовательно $0{,}4x^2 = 0{,}09 - 0{,}4 \cdot 0{,}09$.

$$x^2 = \frac{0{,}09-0{,}4\cdot 0{,}09}{0{,}4} = 0{,}135,\ x = \sqrt{0{,}135} = 0{,}3674\,.$$

Доходность портфеля вычисляем по формуле (4.16)

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3674^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}3^2}{0{,}3^2 + 0{,}3674^2} = 0{,}62\,.$$

Риск портфеля вычисляем по формуле (4.17)

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}3674}{\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}3674^2}} = 0{,}2324\,.$$

Таким образом, портфель минимального риска имеет параметры $(0{,}611; 0{,}223)$. Благодаря эффекту диверсификации риск этого портфеля меньше каждого из рисков составляющих его ценных бумаг, а доходность является промежуточной между доходностями составляющих его бумаг. ■

Пример 4.15. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг $A(0{,}9; 0{,}4)$ и $B(x; y)$ (первая координата равна доходности ценной бумаги, а вторая – риску) имеет ценовые доли $X = (0{,}2; 0{,}8)$. Его доходность равна 0,7. Найти риск второй бумаги, ее доходность и риск портфеля минимального риска.

Решение. Вычислим ценовую долю второй бумаги по формуле (4.15)

$x_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{0{,}4^2}{0{,}4^2+y^2} = \frac{0{,}16}{0{,}16+y^2}$ и приравняем к данной доле $x_2 = 0{,}8$

$\frac{0{,}16}{0{,}16+y^2} = 0{,}8$. Отсюда $0{,}16 = 0{,}8(0{,}16 + y^2)$. Следовательно $0{,}8y^2 = 0{,}16 - 0{,}8 \cdot 0{,}16$.

$$y^2 = \frac{0{,}16-0{,}8\cdot 0{,}16}{0{,}8} = 0{,}04,\ y = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2.$$

Выразим доходность портфеля минимального риска по формуле (4.16)

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}2^2 + x \cdot 0{,}4^2}{0{,}4^2 + 0{,}2^2} = \frac{0{,}16x + 0{,}036}{0{,}2}$$

и приравняем к заданной доходности портфеля минимального риска $\mu = 0{,}7$

$\frac{0{,}16x+0{,}036}{0{,}2} = 0{,}7; 0{,}16x = 0{,}14 - 0{,}036; x = \frac{0{,}104}{0{,}16} = 0{,}65$.

Итак, вторая бумага имеет следующие параметры (доходность и риск) $B(0{,}65; 0{,}2)$.

Риск портфеля минимального риска по формуле (4.16) равен

$$\sigma = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{\sqrt{0{,}4^2 + 0{,}2^2}} = 0{,}1789. ■$$

Портфель из двух произвольных бумаг. Портфель минимального риска находится аналогично случаю двух независимых бумаг. Необходимо найти точку минимума функции от ценовых долей портфеля, выражающей дисперсию

$$\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 .$$

Сделаем замену переменной $x_2 = t$, $x_1 = 1 - t$. Тогда из первого уравнения системы (4.8)

$$\sigma^2 = (1-t)^2\sigma_1^2 + 2t(1-t)\rho\sigma_1\sigma_2 + t^2\sigma_2^2.$$

Функция $\sigma^2(t)$ является параболой с ветвями вверх, которая принимает наименьшее значение в вершине. Вершина параболы находится из уравнения $\left(\sigma^2(t)\right)' = 0$. Найдем производную

$$\left(\sigma^2(t)\right)' = ((1-t)^2\sigma_1^2 + 2(t-t^2)\rho\sigma_1\sigma_2 t^2\sigma_2^2)' =$$

$$= -2(1-t)\sigma_1^2 + 2t\sigma_2^2 = 2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t + (2-4t)\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1^2.$$

Решим уравнение $2(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)t - 2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 = 0.$

Отсюда $2(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)t = 2\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2.$

Следовательно $t = \frac{\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}.$

Поэтому

$$x_2 = \frac{\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}, x_1 = 1 - \frac{\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Портфель минимального риска равен

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}; \frac{\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}\right). \qquad (4.18)$$

Доходность портфеля минимального риска равна

$$\mu = \frac{\mu_1(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)+\mu_2(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Минимальный риск портфеля из двух независимых бумаг равен

$$\sigma = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2)^2 + \sigma_2^2(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2)^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}} =$$

$$= \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{(\sigma_2-\rho\sigma_1)(\sigma_1-\rho\sigma_2)}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Пример 4.16. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности этих бумаг равны 0,2 и 0,4, а риски 0,3 и 0,5. Коэффициент корреляции равен 0,5. Найдите портфель минимального риска, его риск и доходность.

Решение. Выразим риск портфеля минимальной доходности

$$\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 = 0{,}09x_1^2 + 0{,}15x_1x_2 + 0{,}25x_2^2$$

Сделаем замену переменной $x_2 = t, x_1 = 1 - t$. Тогда

$$\sigma^2 = 0{,}09(1-t)^2 + 0{,}15t(1-t) + 0{,}25t^2,$$
$$\sigma^2 = 0{,}19t^2 - 0{,}03t + 0{,}09.$$

Функция $\sigma^2(t)$ является параболой с ветвями вверх, которая принимает наименьшее значение в вершине. Вершина параболы находится из уравнения $\left(\sigma^2(t)\right)' = 0$.

Найдем производную

$$\left(\sigma^2(t)\right)' = (0{,}19t^2 - 0{,}03t + 0{,}09)' = 0{,}38t - 0{,}03\,.$$

Решим уравнение $0{,}38t - 0{,}03 = 0$.

Отсюда $t = \frac{0{,}03}{0{,}38} = 0{,}079\,.$

Следовательно $x_2 = 0{,}079, x_1 = 0{,}921$.

Портфель минимального риска равен $X = (0{,}921; 0{,}079)$. Его доходность равна

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}921 + 0{,}4 \cdot 0{,}079 = 0{,}2158.$$

Квадрат риска равен

$$\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 = 0{,}09x_1^2 + 0{,}15x_1x_2 + 0{,}25x_2^2 =$$
$$= 0{,}09 \cdot 0{,}921^2 + 0{,}15 \cdot 0{,}921 \cdot 0{,}079 + 0{,}25 \cdot 0{,}079^2 = 0{,}0888\,. \blacksquare$$

Пример 4.17. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности этих бумаг равны 0,6 и 0,8, а риски 0,3 и 06. Коэффициент корреляции равен –0,5. Риск портфеля равен 0,25. Найдите портфель и доходность.

Решение. Выразим риск портфеля

$$\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 = 0{,}36x_1^2 - 0{,}48x_1x_2 + 0{,}64x_2^2\,.$$

Сделаем замену переменной $x_2 = t, x_1 = 1 - t$. Тогда

$$\sigma^2 = 0{,}36(1-t)^2 - 0{,}48t(1-t) + 0{,}64t^2,$$
$$\sigma^2 = t^2 - 1{,}2t + 0{,}36 = (t - 0{,}6)^2.$$

Приравняем найденную дисперсию к данной

$$(t-0{,}6)^2 = 0{,}25^2.$$

Рассмотрим два случая: $t - 0{,}6 = -0{,}25$ и $t - 0{,}6 = 0{,}25$.
В первом случае $t = 0{,}35$.
Ценовые доли портфеля равны $x_1 = 0{,}65$, $x_2 = 0{,}35$.
Доходность равна

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = 0{,}65 \cdot 0{,}6 + 0{,}35 \cdot 0{,}8 = 0{,}67.$$

Во втором случае $t = 0.85$
Ценовые доли портфеля равны $x_1 = 0{,}15$, $x_2 = 0{,}85$.
Доходность равна

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = 0{,}15 \cdot 0{,}6 + 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}77.$$

Интерес представляет второй случай, так как в этом случае при равном риске доходность больше. ■

4.5. Портфель из трех независимых бумаг

Для портфеля из трех бумаг система уравнений (4.6) примет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + x_3\mu_3 \\ \sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 + 2x_1x_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2x_1x_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2x_2x_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \end{cases}$$

Исследование этой системы носит гораздо более сложный характер и выходит за рамки данного учебного пособия. Желающие более глубоко изучить теорию портфеля ценных бумаг могут обратиться, например, к учебникам [5], [7], [10].

Мы ограничимся случаем независимых бумаг. В этом случае все коэффициенты корреляции равны 0, $\rho_{12} = \rho_{12} = \rho_{12} = 0$.

Дисперсия выражается следующим образом

$$\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2\,.$$

Как и во всех предыдущих случаях, наиболее важной является задача отыскания портфеля наименьшего риска. Для этого надо найти наименьшее значение функции

$$\sigma^2(x_1; x_2; x_3) = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2\,.$$

При условии $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Эта задача уже не сводится к исследованию функции одной переменной и решается с помощью функции Лагранжа $L(x_1; x_2; x_3; \lambda)$

$$L = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1)\,.$$

Согласно теории выпуклых функций функция L принимает наименьшее значение в стационарной точке. То есть при таких значениях переменных $x_1; x_2; x_3; \lambda$, для которых все частные производные по эти переменных равны 0. В итоге получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2\sigma_1^2 x_1 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2\sigma_2^2 x_2 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 2\sigma_3^2 x_3 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Выразим x_1 из первого уравнения $2\sigma_1^2 x_1 = -\lambda$

$x_1 = -\frac{\lambda}{2\sigma_1^2}$. Аналогично выразим x_2 и x_3 из второго и третьего уравнений $x_2 = -\frac{\lambda}{2\sigma_2^2}$, $x_3 = -\frac{\lambda}{2\sigma_3^2}$. Подставим найденные выражения x_1, x_2, x_2

$$-\frac{\lambda}{2\sigma_1^2} - \frac{\lambda}{2\sigma_2^2} - \frac{\lambda}{2\sigma_3^2} - 1 = 0\,.$$

Вынесем $-\lambda$ за скобку и перенесем –1 в правую часть уравнения

$$-\lambda\left(\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2} + \frac{1}{2\sigma_3^2}\right) = 1\,.$$

Выразим λ и приведем к общему знаменателю

$$\lambda = \frac{-1}{\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2} + \frac{1}{2\sigma_3^2}} = \frac{-2\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2}\,.$$

Подставим найденное выражение λ в выражения x_1, x_2, x_3.

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2\sigma_3^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2},\ x_2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_3^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2},\ x_3 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}.$$

Таким образом, портфель, выраженный в ценовых доля, входящих в него ценных бумаг, равен

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2\sigma_3^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2}, \frac{\sigma_1^2\sigma_3^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2}, \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2}\right)$$

$$X = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2}\left(\sigma_2^2\sigma_3^2; \sigma_1^2\sigma_3^2; \sigma_1^2\sigma_2^2\right). \qquad (4.19)$$

Доходность портфеля равна

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2^2\sigma_3^2+\mu_2\sigma_1^2\sigma_3^2+\mu_3\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2}. \qquad (4.20)$$

Риск портфеля равен

$$\sigma = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2+x_2^2\sigma_2^2+x_3^2\sigma_3^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^4\sigma_3^4+\sigma_1^4\sigma_2^2\sigma_3^4+\sigma_1^4\sigma_2^4\sigma_3^2}{(\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2)^2}} = \qquad (4.21)$$
$$= \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2}}.$$

Пример 4.18. Найти портфель наименьшего риска, составленный из трех независимых ценных бумаг $A(0{,}2; 0{,}3)$, $B(0{,}1; 0{,}4)$, $C(0{,}4; 0{,}3)$. Найти доходность и риск этого портфеля. В скобках указаны доходность и риск соответствующей ценной бумаги.

Решение. Найдем портфель наименьшего риска по формуле (4.19).

$$X = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2}\left(\sigma_2^2\sigma_3^2; \sigma_1^2\sigma_3^2; \sigma_1^2\sigma_2^2\right) =$$
$$= \frac{1}{0{,}3^2 0{,}4^2+0{,}3^2 0{,}3^2+0{,}4^2 0{,}3^2}\left(0{,}3^2 0{,}4^2; 0{,}3^2 0{,}3^2; 0{,}4^2 0{,}3^2\right)$$
$$= \frac{(0{,}0144; 0{,}0081; 0{,}0144)}{0{,}0369} = (0{,}39025\colon 0{,}2195; 0{,}39025).$$

Итак, $X = (0{,}39025\colon 0{,}2195; 0{,}39025)$.

Доходность портфеля равна

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + x_3\mu_3 =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}39025 + 0{,}1 \cdot 0{,}21095 + 0{,}4 \cdot 0{,}39025 = 0{,}256.$$

Риск портфеля равен

$$\sigma = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2} =$$
$$\sqrt{0{,}364^2 0{,}3^2 + 0{,}272^2 0{,}4^2 + 0{,}364^2 0{,}3^2} = 0{,}1889.$$

Пример 4.19. Ценовые доли портфеля наименьшего риска, состоящего из трех независимых бумаг, относятся как 2:3:5. Риск первой бумаги равен 0,6. Найти риски второй и третьей бумаг, а также риск портфеля.

Решение. Сначала найдем ценовые доли входящих в портфель бумаг. Используя пропорциональность долей, их можно представить в виде $x_1 = 2t$, $x_2 = 3t$, $x_3 = 5t$. Воспользовавшись равенством $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, найдем t. $2t + 3t + 4t = 1$. Следовательно $t = 0{,}1$. Тогда ценовые доли составляющих портфель ценных бумаг равны $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}3$, $x_3 = 0{,}5$. Подставим в формулы (4.19)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sigma_2^2\sigma_3^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2} \\ x_2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_3^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2} \\ x_3 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2} \end{cases}$$

найденные значения $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}3$, $x_3 = 0{,}5$ и $\sigma_1 = 0{,}6$. Получим систему уравнений относительно

$$\sigma_2^2 = u \text{ и } \sigma_3^2 = v. \begin{cases} \frac{uv}{0{,}6u+0{,}6v+uv} = 0{,}2 \\ \frac{0{,}6v}{0{,}6u+0{,}6v+uv} = 0{,}3 \\ \frac{0{,}6u}{0{,}6u+0{,}6v+uv} = 0{,}5 \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на третье, получим $\frac{v}{u} = 0{,}6$, $v = 0{,}6u$. Подставим в первое уравнение $\frac{0{,}6u^2}{0{,}6u+0{,}36u+0{,}6u^2} = 0{,}2$. Сократив левую часть уравнения на $0{,}6u$, получим $\frac{u}{1{,}6+u} = 0{,}2$. Умножим на знаменатель $u = 0{,}32 + 0{,}2u$. Отсюда $0{,}8u = 0{,}32$, $u = 0{,}4$.

Подставив найденное значение u в третье уравнение, получим $\frac{0,24}{0,24+0,6v+0,4v} = 0,5$, $\frac{0,24}{0,24+v} = 0,5$, $0,24 = 0,12 + 0,5v$, $v = 0,24$. Таким образом, $\sigma_2^2 = 0,4$; $\sigma_3^2 = 0,24$; $\sigma_2 = 0,63$; $\sigma_3 = 0,49$.

Риск найдем по формуле (4.20)

$$\sigma = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_2^2\sigma_3^2}} = \frac{0,6\cdot\sqrt{0,4}\cdot\sqrt{0,24}}{\sqrt{0,36\cdot 0,4+0,36\cdot 0,24+0,4\cdot 024}} = 0,3254. \blacksquare$$

4.6. Портфель, содержащий безрисковую бумагу

Если портфель содержит несколько безрисковых бумаг, то резонно рассматривать ту из них, которая имеет большую доходность. Например, если имеется два абсолютно надежных банка, то резонно вносить денежные средства в тот из них, процентная ставка которого выше. Портфель, содержащий безрисковую бумагу и несколько рисковых бумаг, носит название портфеля Тобина. Его изучение достаточно сложно и выходит за рамки данного учебного пособия. Желающие более глубоко изучить теорию портфеля Тобина могут обратиться, например, к учебникам [5], [7], [10]. Мы ограничимся рассмотрением двух бумаг, одна из которых безрисковая.

Анализ портфеля, состоящего из одной рисковой и одной безрисковой бумаг, имеет смысл, если есть возможность объединить все рисковые бумаги в одну ценную бумагу с усредненной доходностью и риском. Такая ситуация возникает пред инвестором при определении доли денежных средств для хранения в банке (с чрезвычайно низкой доходностью, но отсутствием риска) и для покупки ценных бумаг (с ощутимой доходностью, но большим риском).

Итак, мы имеем портфель, состоящий из двух бумаг $A(\mu_1; 0)$ и $B(\mu_2; \sigma_2)$, при этом $\mu_1 < \mu_2$ (иначе не было бы смысла рассматривать рисковый портфель, а вкладывать деньги только в безрисковую бумагу).

Соотношения (4.14) примут вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \\ \sigma = x_2\sigma_2 \end{cases} \qquad (4.22)$$

Если обозначить $x_2 = t$, $x_1 = 1 - t$, $t \in [0; 1]$, то $t = \frac{\sigma}{\sigma_2}$, $\mu = (1-t)\mu_1 + t \cdot \mu_2 = \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_2}\right)\mu_1 + \frac{\sigma}{\sigma_2}\mu_2 = \mu_1 + \frac{\sigma}{\sigma_2}(\mu_2 - \mu_1)$, и допустимое множество портфелей является отрезком, задающимся в системе координат (μ, σ) уравнением $\mu = \mu_1 + \frac{\sigma}{\sigma_2}(\mu_2 - \mu_1)$, $0 \le \sigma \le \sigma_2$.

При $\sigma = 0$ портфель определяется точкой $A(\mu_1; 0)$, а при $\sigma = \sigma_2$ точкой $B(\mu_2; \sigma_2)$ (рис. 4.4).

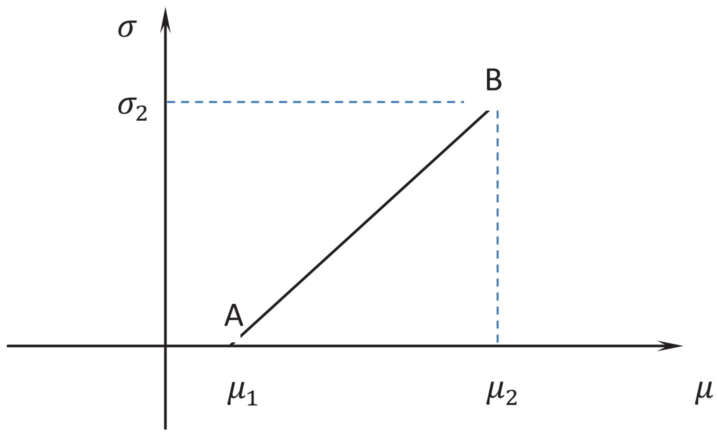

Рисунок 4.4 – Допустимое множество портфелей, состоящих из двух бумаг, одна из которых безрисковая

Из рисунка видно, что риск портфеля линейно убывает от σ_2 при $x_1 = 0$ до 0 при $x_1 = 1$.

Пример 4.20. Одна из двух ценных бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры доходности и риска (0,35; 0,5), доходность безрисковой бумаги $\mu_1 = 0{,}1$. Найти портфель и его риск, если его доходность равна 0,3.

Решение. Зависимость доходности от риска имеет вид $\mu = \mu_1 + \frac{\sigma}{\sigma_2}(\mu_2 - \mu_1)$.

Подставляя данные задачи, получим

$$0{,}3 = 0{,}1 + (0{,}35 - 0{,}1)\frac{\sigma}{0{,}5}.$$

Отсюда $0{,}2 = 0{,}25\frac{\sigma}{0{,}5}$, $\sigma = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}25} = 0{,}4$.

Тогда $x_2 = t = \frac{\sigma}{\sigma_2} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8$, $x_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Таким образом, портфель, заданный параметрами доходности и риска равен $X = (0{,}2; 0{,}8)$. ■

Пример 4.21. Одна из двух ценных бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры доходности и риска $(0{,}4; 0{,}6)$, доходность безрисковой бумаги $\mu_1 = 0{,}1$. Найти портфель и его риск, если его риск равен 0,3.

Решение. Зависимость доходности от риска имеет вид $\mu = \mu_1 + \frac{\sigma}{\sigma_2}(\mu_2 - \mu_1)$.

Подставляя данные задачи, получим

$$\mu = 0{,}1 + (0{,}4 - 0{,}1)\frac{0{,}3}{0{,}6}.$$

Отсюда $\mu = 0{,}1 + 0{,}3\frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}25$.

Тогда $x_2 = t = \frac{\sigma}{\sigma_2} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$, $x_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Таким образом, портфель, заданный параметрами доходности и риска равен $X = (05; 0{,}5)$. ■

Задачи

4.1. Одна из двух бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры (0,6; 0,5), доходность безрисковой бумаги равна 0,2. Найти портфель и его риск, если его доходность равна 0,4.

4.2. Одна из двух бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры (0,3; 0,5), доходность безрисковой бумаги равна 0,1. Найти портфель и его риск, если его доходность равна 0,2.

4.3. Одна из двух бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры (0,4; 0,7), доходность безрисковой бумаги равна 0,1. Найти портфель и его доходность, если его риск равен 0,35.

4.4. Доли ценных бумаг в портфеле равны $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}3$; $x_3 = 0{,}5$; ожидаемые доходности равны $\mu_1 = -20\%$, $\mu_2 = 15\%$, $\mu_3 = 25\%$, ковариационная матрица имеет вид $V = \begin{pmatrix} 16 & -10 & -5 \\ -10 & 25 & 10 \\ -5 & 10 & 36 \end{pmatrix}$. Найти ожидаемую доходность и риск портфеля.

4.5. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A(8; 20), $B(12, 24)$. Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Найти множество допустимых портфелей, построить график. Определить доходность портфеля минимального риска.

4.6. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A(6; 10), B(20; 40). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Найти: а) портфель минимального риска, б) портфель максимальной доходности.

4.7. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемые доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A(10; 25), B(30; 45). Коэффициент корреляции бумаг равен –1, а его доходность равна 20%. Найти портфель и его риск.

4.8. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны $A(20; 30)$, $B(30; 50)$. Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Доходность портфеля равна 25%. Найти портфель и его риск.

4.9. Доходность портфеля минимального риска из трех независимых бумаг (0.2; 0,3), (0,9; 0,6) и (x; 0,8) равна 0,75 (первое число в скобках — доходность ценной бумаги, вторая – ее риск). Найти доходность третьей бумаги.

4.10. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны $A(20; 30)$, $B(30; 60)$. Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Риск портфеля равен 50%. Найти портфель и его доходность

4.11. Портфель минимального риска из трех независимых бумаг (x; 0,7), (0,3; 0,6) и (0,4; 0,8) имеет доходность 0,5 (первое число в скобках – доходность ценной бумаги, вторая – ее риск). Найти портфель и доходность первой бумаги.

4.12. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемые доходности которых равны 20% и 50%, а ценовые доли относятся как 1:4. Найти портфель и его доходность.

4.13. Найти портфель минимального риска из трех независимых бумаг (0,3; 0,7), (0,2; 0,6) и (0,4; 0,8) и его доходность и риск (первое число в скобках – доходность ценной бумаги, вторая – ее риск).

4.14. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемые доходности которых равны 20% и 70%, а ценовая доля бумаги A и в три раза меньше ценовой доли бумаги B. Найти портфель и его доходность.

4.15. Найти портфель минимального риска из трех независимых бумаг, дисперсии которых равны 25, 4 и 16 соответственно.

4.16. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны $A(10; 30)$, $B(30; 60)$. Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Найти портфель минимального риска и его доходность, а также портфель максимальной доходности и его риск.

4.17. Для портфеля из трех независимых бумаг с доходностью и риском соответственно (0,1; 0,4), (0,3; 0,6) и (0,5; 0,8) найти портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.18. Для портфеля из двух бумаг с доходностью и риском соответственно (0,2; 0,6) и (0,4; 0,9) в случае полной антикорреляции найти портфель нулевого риска и его доходность.

4.19. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,3 и 0,7, а риски 0,2 и 0,6. Коэффициент корреляции равен 1/2. Риск портфеля равен 0,5. Найти портфель и его доходность.

4.20. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемые доходности которых равны 15% и 25%, а ценовые доли относятся как 2:3. Найти портфель и его доходность.

4.21. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны $A(10; 20)$ и $B(20; 40)$. Коэффициент корреляции бумаг равен 0,3. Найти портфель минимального риска, его риск и его доходность.

4.22. Портфель состоит из двух активов, ожидаемая доходность и риск (в процентах) которых равны $A(20; 10)$ и $B(30; 40)$. Коэффициент корреляции активов A и B равен –0,5. Найти портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.23. Портфель состоит из десяти активов, ценовые доли которых образуют арифметическую прогрессию, причем доля шестого актива равна 0,11. Найти портфель.

4.24. Портфель состоит из двух ценных бумаг А и В, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны А(10; 15) и В(20; 30). Коэффициент корреляции бумаг равен –0,5. Ожидаемая доходность портфеля равна 14. Найти ценовые доли бумаг А и В в портфеле и риск портфеля.

4.25. Портфель состоит из трех активов А, В и С, ценовые доли которых образуют геометрическую прогрессию, причем ценовая доля актива С равна 1/6. Найти портфель.

4.26. Доходности двух независимых бумаг, составляющих портфель минимального риска равны 10% и 20%. Риски бумаг (первой ко второй) относятся как 3:4. Найти риски обеих бумаг, портфель минимального риска и его доходность, если его риск равен 12%.

4.27. Портфель состоит из трех активов А, В и С, ценовые доли которых образуют арифметическую прогрессию, причем ценовая доля актива A равна 0,2. Найти портфель.

4.28. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны А(10; 20) и В(30; 50). Коэффициент корреляции бумаг равен –1, а его доходность равна 20%. Найти портфель и его риск.

4.29. Портфель состоит из трех активов А, В и С. Ценовая доля актива А В равна 0,3, а ценовая доля актива А на 10% больше ценовой доли актива С. Найти портфель.

4.30. Портфель состоит из двух ценных бумаг А и В, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны А(10; 20) и В(20; 40). Коэффициент корреляции бумаг равен –1, а его риск равен 5%. Найти портфель и его доходность.

4.31. Портфель состоит из трех активов А, В и С. Ценовая доля актива А равна 0,4, а ценовая доля актива В в 1,4 раза больше ценовой доли актива С. Найти портфель.

4.32. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A(10; 20) и B(20; 60). Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Определить доходность портфеля минимального риска и риск портфеля максимальной доходности. Изобразить график допустимого множества портфелей.

4.33. Портфель состоит из трех активов A, B и C, взятых в равных ценовых долях. Ожидаемые доходности активов равны $\mu_1 = -15\%$, $\mu_2 = 12\%$, $\mu_3 = 12\%$. Найти ожидаемую доходность портфеля.

4.34. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемые доходности которых равны 15% и 25%, а ценовая доля бумаги A в четыре раза меньше ценовой доли бумаги B. Найти портфель и его доходность.

4.35. Портфель состоит из акций четырех видов, данные о которых приведены в таблице

	A	*B*	*C*	*D*
Количество	200	350	150	400
Начальная цена	70	90	180	300
Конечная цена	100	60	250	310

Найти доходность портфеля двумя способами.

4.36. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемые доходности которых равны 30% и 20%, а ценовая доля бумаги A на 40% меньше ценовой доли бумаги B. Найти портфель и его доходность.

4.37. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2$ равна 0,32. Доходности актива μ_1, μ_2, за периоды t_1, t_2, соответственно составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,1. Найти доходность актива за каждый период.

4.38. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг (0,7; 0,3), (0,4; x) (первая цифра доходность ценной бумаги, вторая – ее риск) имеет вид (0,6; 0,4). Найти риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

4.39. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2$ равна 0,5. Доходность актива за второй период на 25% выше, чем за первый. Найти доходность актива за каждый период.

4.40. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг (0,9; 0,4), (*x*;*y*) (первая цифра – доходность ценной бумаги, вторая – ее риск) имеет вид (0,2; 0,8), его доходность равна 0,7. Найти риск второй бумаги, ее доходность, а также риск портфеля минимального риска.

4.41. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2$ равна 0,536. Доходность актива за первый период в 1,4 раза меньше, чем за второй. Найти доходность актива за каждый период.

4.42. Найти портфель минимального риска из двух независимых бумаг, дисперсии которых равны 10 и 20 соответственно.

4.43. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равна 0,95. Доходности актива μ_1, μ_2 за периоды t_1, t_2 соответственно, равны 0,2 и 0,3. Найти доходность актива за период t_3.

4.44. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,5 и 0,8, а риски 0,2 и 0,6. Коэффициент корреляции равен нулю. Найти портфель минимального риска и его доходность.

4.45. Доходность актива за квартал равна 9,2727%. Найти доходность актива за месяц, предполагая ее постоянство.

4.46. Ценовые доли портфеля минимального риска из двух независимых бумаг (0,3; 0,2), (0,5; *x*) (первая цифра – доходность ценной бумаги, вторая – ее риск) относятся как 1:2. Найти риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

4.47. Пусть доходность актива за месяц μ_1 равна 3%. Найти доходность μ актива за год при условии постоянства месячной доходности в течение года.

4.48. В портфеле минимального риска из двух независимых бумаг (0,3; 0,4), (0,5; *x*) (первая цифра – доходность ценной бумаги, вторая – ее риск) ценовая доля первой бумаги в 3 раза больше ценовой доли второй. Найти риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

4.49. Доходность актива за год μ равна 36%. Найти доходность актива за квартал μ_1 при условии ее постоянства.

4.50. Риск портфеля минимального риска из двух независимых бумаг (0,2; *x*), (0,6; 0,8) равен 0,48 (первая цифра – доходность ценной бумаги, вторая – ее риск). Найти риск первой бумаги, портфель минимального риска и его доходность.

4.51. Пусть доходности за два последовательных периода времени t_1; t_2 равны 10% и 20% соответственно. Найти доходность μ за период $t = t_1 + t_2$.

4.52. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг (0,7; 0,3), (x; y) (первая цифра – доходность ценной бумаги, вторая – ее риск) имеет вид (0,8; 0,2), его доходность равна 0,66. Найти риск второй бумаги, ее доходность, а также риск портфеля минимального риска.

4.53. В портфеле минимального риска из двух независимых бумаг (0,4; 0,2), (0,6; x) (первая цифра – доходность ценной бумаги, вторая – ее риск) ценовая доля первой бумаги на 50% больше ценовой доли второй. Найти риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

Ответы и рекомендации к решению

4.1. Обозначим долю безрисковой бумаги через x_1, а долю рисковой бумаги через x_2. Доходность безрисковой бумаги равна $\mu_1 = 0{,}2$, а рисковой бумаги $\mu_2 = 0{,}6$. Имеем систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \mu_1 \cdot x_1 + \mu_2 \cdot x_2 = \mu \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}6 \cdot x_2 = 0{,}4 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 1 - x_1 \\ 2 \cdot x_1 + 6 \cdot (1 - x_1) = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 1 - x_1 \\ -4 \cdot x_1 + = -2 \end{cases}$; $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 0{,}5$.

Риск портфеля равен $\sigma = x_2 \cdot \sigma_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

4.2. $X = (0{,}5; 0{,}5)$, $\sigma = 0{,}25$. **4.3.** $X = (0{,}5; 0{,}5)$, $\mu = 0{,}25$.

4.4. $\mu = 13\%$: $\sigma = 12{,}39$. **4.5.** 8.

4.6. Портфель минимального риска имеет ценовые доли $(1:0)$, портфель максимальной доходности имеет ценовые доли $(0:1)$.

4.7. $X = (0{,}5; 0{,}5)$, $\sigma = 10\%$. **4.8.** $X = (0{,}5; 0{,}5)$, $\sigma = 40\%$.

4.9. Ценовые доли портфеля (0,7191; 0,1798; 0,1011), доходность третьей бумаги $\mu_3 = 4{,}4$. **4.10.** $X = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\sigma = 26{,}67\%$.

4.11. Ценовые доли портфеля (0,3198; 0,4353; 0,2449), доходность первой бумаги $\mu_1 = 0{,}8488$.

4.12. $X = (0{,}2; 0{,}8)$: $\mu = 44\%$.

4.13. Ценовые доли портфеля $(0{,}3198; 0{,}4353; 0{,}2449)$, доходность $\mu = 0{,}2808$, риск $\sigma = 0{,}3959$.
4.14. $X = (0{,}25; 0{,}75)$: $\mu = 57{,}5\%$.
4.15. $0{,}1135; 0{,}7092; 0{,}1773$. **4.16.** $X = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\mu = 16{,}67$.
4.17. $X = \left(\frac{6}{13}; \frac{4}{13}; \frac{3}{13}\right)$: $\mu = 0{,}2538$, $\sigma = 0{,}1883$.
4.18. $X = (0{,}4; 0{,}6)$: $\mu = 0{,}32$. **4.19.** $X = (0{,}2025; 0{,}7975)$: $\mu = 0{,}619$.
4.20. $X = (0{,}4; 0{,}6)$: $\mu = 21\%$.
4,21. $X = (0{,}8947; 0{,}1053)$: $\mu = 11{,}053$, $\sigma = 19{,}574$.
4.22. $X = \left(\frac{6}{7}; \frac{1}{7}\right)$, $\mu = 21{,}43$, $\sigma = 7{,}56$.
4.23. $x_1 = 0{,}01$; $x_2 = 0{,}03$; $x_3 = 0{,}05$; $x_4 = 0{,}07$; $x_5 = 0{,}09$; $x_6 = 0{,}11$; $x_7 = 0{,}13$; $x_8 = 0{,}15$; $x_9 = 0{,}17$; $x_{10} = 0{,}19$.
4.24. $X = (0{,}6; 0{,}4)$, $\sigma = 10{,}82\%$.
4.25. $X = (0{,}5348; 0{,}2985; 0{,}1667)$.
4.26. $\sigma_1 = 15\%$; $\sigma_2 = 20\%$; $x_1 = 0{,}64$; $x_2 = 0{,}36$; $\mu = 13{,}6\%$.
4.27. $X = (0{,}2; 0{,}3333; 0{,}4667)$. **4.28.** $X = (0{,}5; 0{,}5)$; $\sigma = 15\%$.
4.29. $X = (0{,}3667; 0{,}3; 0{,}3333)$.
4.30. 1. $X = (0{,}75; 0{,}25)$; $\mu = 12{,}5\%$. 2. $X = \left(\frac{7}{12}; \frac{5}{12}\right)$; $\mu = 14{,}17\%$.
4.31. $X = (0{,}4; 0{,}35; 0{,}25)$.
4.32. $X = (0{,}75; 0{,}25)$; $\mu = 12{,}5$; $\sigma_2 = 60\%$. **4.33.** $\mu = 3\%$.
4.34. $X = (0{,}2; 0{,}8)$; $\mu = 23\%$. **4.35.** $0{,}052$.
4.36. $X = (0{,}375; 0{,}625)$, $\mu = 23{,}75\%$. **4.37.** $\mu_1 = 0{,}1$; $\mu_2 = 0{,}2$.
4.38. $x = 0{,}3674$; $\mu = 0{,}58$; $\sigma = 0{,}2324$.
4.39. $\mu_1 = 0{,}2$; $\mu_2 = 0{,}25$.
4.40. $x = 0{,}65$; $y = 0{,}2$; $\sigma_{min} = 0{,}1789$. **4.41.** $\mu_1 = 0{,}2$; $\mu_2 = 0{,}28$.
4.42. $x_1 = 0{,}8$; $x_2 = 0{,}2$. **4.43.** $\mu_3 = 0{,}25$.
4.44. $x_1 = 0{,}9$; $x_2 = 0{,}1$; $\mu = 0{,}53$. **4.45.** $\mu = 3\%$.
4.46. $x = 0{,}1414$; $\mu = 0{,}4333$; $\sigma = 0{,}1155$. **4.47.** $\mu = 42{,}58\%$.
4.48. $x = 0{,}6928$; $\mu = 0{,}35$; $\sigma = 0{,}3464$. **4.49.** $\mu = 7{,}99\%$.
4.50. $x = 0{,}6$; $\mu = 0{,}344$; $X = (0{,}64; 0{,}36)$. **4.51.** $\mu = 32\%$.
4.52. $x = 0{,}5$; $y = 0{,}6$; $\sigma_{min} = 0{,}2683$.
4.53. $x = 0{,}245$; $\mu = 0{,}48$; $\sigma_{min} = 0{,}155$.

О Б Р А З Ц Ы
ДОМАШНИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная № 1

1. Какова простая ставка процентов, при которой первоначальный капитал в размере 150 000 руб., достигнет через 100 дней 170 000 руб.? Число дней году считается приближенно и равно 360.
2. В банк 11 февраля на депозит положили сумму 400 000 у.е. под 12% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик снимет 3 октября?
3. Номинальная процентная ставка составляет 17% годовых. Чему равна эффективная процентная ставка, если проценты начисляются ежемесячно?
4. Пусть темп инфляции за год $\alpha = 30\%$. Найти темп инфляции за квартал α_1 при условии его постоянства.
5. Приведите поток
$$CF = \{(0; 5000), (1; 4200), (2; 3500), (3; 6000)\}$$
к моменту времени $t = 2$ при ставке 9%.
6. По вине пенсионного фонда семье в течение 2 лет не доплачивали 600 руб. ежемесячно. Какую сумму должен выплатить фонд вместе с процентами (10% годовых)?
7. Замените единовременный платеж 700 000 руб. в момент времени $t = 1$ и процентной ставкой 10% p-срочной рентой постнумерандо с параметрами $R_1 = 6000$; n_1; $i_1 = 8\%$.
8. Найти доходность к погашению со сроком обращения 10 лет и номинальной стоимостью N = 2000 у.е., купонные выплаты по которой составляют 100 у.е. ежегодно, если облигация продается по 1900 у.е.

9. Доли ценных бумаг в портфеле равны $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}35$; $x_3 = 0{,}4$; ожидаемые доходности равны $\mu_1 = -20\%$; $\mu_2 = 20\%$; $\mu_3 = 25\%$; ковариационная матрица имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -5 \\ -10 & 16 & 8 \\ -5 & 8 & 36 \end{pmatrix}.$$

Найти ожидаемую доходность и риск портфеля

10. Одна из двух бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры (0,4; 0,8), доходность безрисковой бумаги равна 0,3. Найти портфель и его доходность, если его риск равен 0,55.

Контрольная № 2

1. Определить простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 120 000 руб., достигнет через 135 дней величины 170 000 руб.
2. В банк положен депозит в размере 3400 у.е. под 7% годовых по схеме сложных процентов. Найти величину депозита через три года при ежемесячном начислении процентов.
3. Какую ставку должен установить банк, чтобы при инфляции 10% годовых он мог бы иметь 10% реальной доходности.
4. Найти сложную процентную ставку i_c, эквивалентную непрерывной ставке 10%.
5. Резервный фонд создается в течение 15 лет. На поступающие в него средства начисляются сложные проценты по ставке 5% годовых. В течение первых 6 лет в конце каждого года в фонд вносили по 15000 у.е., в течение последующих 4 лет – по 20000 у.е. в конце года, а в последние 5 лет – по 25000 у.е. в конце года. Чему будет равна сумма фонда через 15 лет? Ответ привести с точностью до 0,01.
6. Найти текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 2000 руб., сроком погашения 5 лет и ежегодными выплатами по купонной ставке 15%, если годовая процентная ставка составляет 12%.
7. Какую сумму нужно положить в банк под 12% годовых мужчине 45 лет, чтобы по достижении им пенсионного возраста

60 лет в течение 15 лет в начале каждого месяца снимать по 15 000 рублей, если проценты капитализируются: в конце года; в конце каждого полугодия; в конце каждого квартала; в конце каждого месяца.

8. Замените годовую ренту с параметрами $R_1 = 2$; $n_1 = 2$; $i = 20\%$, на p-срочную (месячную) ренту с параметрами $n_2 = 4$; $i = 20\%$.
9. Найти портфель минимального риска из двух независимых бумаг, дисперсии которых равны 10 и 15 соответственно.
10. Три платежа: 13 000, 25 000 и 35 000 руб., произведенные в начале третьего, начале четвертого периодов и в конце пятого, соответственно, заменить двумя платежами в конце шестого и седьмого периодов. При этом первый платеж в три раза больше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 11%.

Контрольная № 3

1. На какой срок необходимо положить в банк 12 000 руб., чтобы накопить 14 000 руб., если банк принимает вклады под простые 10% годовых?
2. Найти простую процентную ставку $i_{\text{п}}$, эквивалентную сложной ставке в 8% для временного интервала в 10 лет при ежемесячном начислении процентов.
3. Номинальная учетная ставка равна 10%. При этом проценты начисляются ежеквартально. Найти эффективную учетную ставку.
4. При какой годовой сложной процентной ставке сумма удвоится за 7 лет, если проценты начисляются ежеквартально?
5. Даны два потока: $CF_1 = \{(1; 200), (2; 250), (3; 150)\}$ и $CF_2 = \{(1; 150), (2; 300), (3; 100)\}$. Какой из этих потоков является предпочтительнее?
6. В банк положена сумма 180000 руб. сроком на 6 лет по ставке 12% годовых. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для непрерывного начисления процентов.

7. Наращенная сумма 6-летней ренты постнумерандо с ежеквартальным начислением процентов, процентной ставкой 4,5% равна 50 000 руб. Найти приведенную величину.
8. Портфель состоит из трех активов A, B и C. Ценовая доля актива B равна 0,25, а ценовая доля актива A на 1,4% больше ценовой доли актива C. Найти портфель.
9. Портфель состоит из акций четырех видов, данные о которых приведены в таблице

	A	B	C	D
Количество	200	350	150	400
Начальная цена	70	90	180	300
Конечная цена	100	60	250	310

Найти доходность портфеля.
10. Замените две ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 200$; $n_1 = 4$; $i_1 = 10\%$ и $R_2 = 250$; $n_2 = 6$; $i_2 = 12\%$ разовым платежом в момент времени $n = 4$ и процентной ставкой $i = 15\%$.

ОБРАЗЦЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Вариант № 1

1. Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 14% с ежемесячным начислением процентов. Найти сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменится.
2. За сколько лет удвоится капитал в схеме простых процентов при ставке 16% годовых?
3. Найти простую процентную ставку $i_{\text{п}}$, эквивалентную сложной ставке 8% для временного интервала в 5 лет при ежеквартальном начислении процентов.
4. Замените две ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 2500$; $n_1 = 4$; $i_1 = 10\%$ и $R_2 = 3250$; $n_2 = 5$; $i_2 = 10\%$ разовым платежом в момент времени $n = 8$ и процентной ставкой $i = 12\%$
5. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равна 0,8. Доходности актива μ_1, μ_3 за периоды t_1, t_3 соответственно, равны 0,2 и 0,3. Найти доходность актива за период t_2.
6. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,3 и 0,7, а риски 0,2 и 0,8. Коэффициент корреляции равен нулю. Найти портфель минимального риска и его доходность.

Вариант № 2

1. Вексель стоимостью 750 тыс. руб. учитывается за три года до погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Найти сумму, которую получит векселедержатель, и величину дисконта.

2. За сколько лет удвоится капитал в схеме сложных процентов при ставке 16% годовых?
3. Найти простую процентную ставку $i_п$, эквивалентную сложной ставке в 12% для временного интервала в 8 лет при ежемесячном начислении процентов.
4. Консолидируйте три ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 2000$; $n_1 = 3$; $i_1 = 12\%$; $R_2 = 2500$; $n_2 = 5$; $i_2 = 10\%$; $R_3 = 3000$; $n_3 = 6$; $i_3 = 11\%$; 4-летней рентой постнумерандо с $i = 12\%$.
5. Доходность актива за квартал равна 10%. Найти доходность актива за месяц, предполагая ее постоянство.
6. Ценовые доли портфеля минимального риска из двух независимых бумаг (0,2; 0,3), (0,6; x) (первая цифра – доходность ценной бумаги, вторая – ее риск) относятся как 1:2. Найти риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

Вариант № 3

1. Клиент имеет вексель на 30 000 руб., который он хочет учесть 22.04.2017 г. в банке по сложной учетной ставке 10%. Какую сумму он получит, если срок погашения 14.10.2017 г.?
2. Три платежа: 18 000, 28 000 и 40 000 руб., произведенные в начале третьего, начале четвертого периодов и в конце пятого, соответственно, заменить платежом 80 000 руб. Годовая ставка сложных процентов равна 10%.
3. Найти простую процентную ставку i_n, эквивалентную непрерывной ставке 8%.
4. Портфель состоит из двух бумаг А и В. Ожидаемые доходности равны 0,4 и 0,8, а риски 0,1 и 0,5. Коэффициент корреляции равен 0,5. Доходность портфеля равна 0,5. Найти портфель и его риск.
5. Пусть доходность актива за месяц μ_1 равна 3%. Найти доходность μ актива за год при условии постоянства месячной доходности в течение года.
6. В портфеле минимального риска из двух независимых бумаг (0,2; 0,4), (0,5; x) (первая цифра – доходность ценной бумаги,

вторая – ее риск) ценовая доля первой бумаги в 3 раза больше ценовой доли второй. Найти риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

Вариант № 4

1. Номинальная учетная ставка равна 12%. При этом проценты начисляются ежеквартально. Найти эффективную учетную ставку.
2. Три платежа: 15 000, 25 000 и 40 000 руб., произведенные в начале третьего, начале четвертого периодов и в конце пятого, соответственно, заменить двумя платежами в конце шестого и седьмого периодов. При этом первый платеж в три раза больше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 17%.
3. Найти сложную процентную ставку, $i_н$, эквивалентную непрерывной ставке 6%.
4. Замените единовременный платеж 500 000 руб. в момент времени $n= 2$; p-срочной рентой постнумерандо с параметрами R_1; $n_1 = 5$; $i = 15\%$; $p = 6$.
5. Доходность актива за год μ равна 36%. Найти доходность актива за квартал μ_1 при условии ее постоянства.
6. Риск портфеля минимального риска из двух независимых бумаг (0,3; x), (0,6; 0,8) равен 0,5 (первая цифра – доходность ценной бумаги, вторая – ее риск). Найти риск первой бумаги, портфель минимального риска и его доходность.

Вариант № 5

1. Определить период, за который начальный капитал в размере 50 000 руб. вырастет до 75 000 руб., если ставка простых процентов равна 10% годовых.
2. Найти простую процентную ставку i_n, эквивалентную сложной ставке в 10% для временного интервала в 5 лет при ежемесячном начислении процентов.
3. Фонд создается в течение 7 лет, взносы поступают в конце каждого полугодия равными суммами. На поступившие средства в конце года начисляется 10% годовых. На сколько про-

центов возрастет сумма фонда в конце седьмого года при переходе к непрерывной капитализации процентов?

4. Рыночная цена 15-ти процентной облигации номиналом 4000 руб. за два года до погашения равна 4500 руб. найти текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 12%, б) 15%, в) 20% и ее курс.
5. Найти изменение дисконта облигации со сроком обращения n = 6 лет, номинальной стоимостью N = 5000, купонной ставкой c = 10% и доходностью к погашению ρ = 12% при продаже ее в настоящий момент и при продаже ее через год.
6. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны $A(10; 20)$, $B(30; 50)$. Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Доходность портфеля равна 15%. Найти портфель и его риск.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В.* Финансовая математика. М.: КноРус. 2010.
2. *Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В.* Задачи по финансовой математике. М.: КноРус. 2015.
3. *Аль-Натор М.С., Касимов Ю.Ф., Колесников А.Н*. Основы финансовых вычислений. М.: Финансовый университет. 2012. Ч. 1.
4. *Аль-Натор М.С., Касимов Ю.Ф., Колесников А.Н.* Основы финансовых вычислений. М.: Финансовый университет. 2013. Ч. 2.
5. *Аль-Натор М.С., Касимов Ю.Ф., Колесников А.Н.* Основы финансовых вычислений. М.: Финансовый университет. 2014. Ч. 3.
6. *Аль-Натор М.С., Касимов Ю.Ф., Колесников А.Н.* Основы финансовых вычислений. М.: Финансовый университет. 2015. Ч. 4.
7. *Лахметкина Н.И., Петропавловский С.В., Попов В.Ю., Шаповал А.Б.* Количественные методы инвестиционного анализа. М.: Финансовый университет. 2012.
8. *Барбаумов В.Е., Гладких И.М., Чуйко А.С.* Финансовые инвестиции. М.: Финансы и статистика. 2003.
9. *Четыркин Г.М.* Финансовая математика: учебник. М.: «Дело». 2000.
10. *Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С.* Математические методы финансового анализа. М.: АНКИЛ. 2009.
11. *Чуйко А.С., Шершнев В.Г.* Математические основы финансового обслуживания. М.: РЭА. 2000.

Учебное электронное издание на диске

Владимир Александрович Попов

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Учебное пособие
для студентов вечерней и заочной форм обучения

Публикуется в авторской редакции

Техническое редактирование
и компьютерная верстка *Л.Б. Галкиной*
Подписано в печать 20.02.2017.
Гарнитура Cambria.
Объем 8,5 МБ. Тираж 9 экз. Заказ № 121.

Финансовый университет
Москва, 125993 (ГСП-3), Ленинградский просп., 49